

Feuille d'exercices n°2 :
variables aléatoires réelles, moments

Exercice 1. Montrer que si F et G sont des fonctions de répartition et $\lambda \in [0, 1]$, alors $\lambda F + (1 - \lambda)G$ est une fonction de répartition. La fonction FG est-elle une fonction de répartition ?

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans un ensemble fini $\{a_1, \dots, a_n\}$. On pose $p_i := \mathbb{P}(X = a_i)$, $1 \leq i \leq n$, ($\sum_{i=1}^n p_i = 1$). Exprimer la loi de X comme somme pondérée de probabilités de Dirac et tracer sa fonction de répartition.

Exercice 3. Montrer que les fonctions F_1 , F_2 et F_3 ci-dessous sont des fonctions de répartition. Tracer leurs graphes et préciser si elles correspondent à des lois de variables continues ou non. Dans l'affirmative, calculer la densité associée.

1. $F_1(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $F_1(x) = 1 - \exp(-x)$ si $x > 0$.
2. $F_2(x) = 0$ si $x < 0$ et $F_2(x) = 1 - \frac{1}{2} \exp(-x)$ si $x \geq 0$.
3. $F_3(x) = 0$ si $x \leq 1$ et $F_3(x) = 1 - x^{-a}$ si $x > 1$ (avec $a > 0$).
4. La fonction F_4 définie par $F_4(x) = 0$ si $x \leq 1$ et $F_4(x) = 1 - \frac{x^{-a}}{2}$ si $x > 1$ ($a > 0$) n'est pas une fonction de répartition. Pourquoi ?

Exercice 4 (Loi géométrique - loi binômiale négative). Une urne contient des boules, dont une proportion p ($0 < p < 1$) de boules blanches, les autres boules étant rouges. On tire les boules une à une avec remise et on note X_n le rang d'apparition de la n ème boule blanche.

1. Donner la loi de X_1 et calculer son espérance.
2. a) Déterminer la loi de X_n .
b) En dérivant $n - 1$ fois l'égalité $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = 1/(1 - x)$ sur $] - 1, 1[$ (utiliser le théorème de dérivation des séries entières), vérifier que $\sum_{i=n}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = i) = 1$ puis calculer $\mathbb{E}(X_n)$. La loi de X_n est appelée *loi binômiale négative de paramètres n, p* .
3. Pour $n \geq 1$ fixé, on note Y_n le nombre de boules rouges apparues avant la n ème boule blanche. Ecrire Y_n en fonction de X_n . En déduire la loi de Y_n , puis son espérance.

Exercice 5 (Loi binômiale - loi hypergéométrique). Dans une urne contenant N boules dont une proportion p de boules vertes ($0 < p < 1$), on tire n boules ($n \geq 1$), et

on note X le nombre de boules vertes de l'échantillon. Construire l'espace de probabilité associé à l'expérience et déterminer la loi de X si :

- a) les n boules sont tirées une à une avec remise
- b) les n boules sont tirées en une seule fois (dans ce cas on dit que X suit une loi hypergéométrique de paramètres N, n, p)
- c) les n boules sont tirées une à une sans remise.

Exercice 6. Donner la valeur de $I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2/2)dx$. En déduire celle de $J = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)dx$.

Exercice 7. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} telle que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = n) = \frac{c}{n} \mathbb{P}(X = n - 1)$. Déterminer c et la loi de X . Quelle est la valeur de X la plus probable? Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 8. Calculer les espérances et les variances, lorsqu'elles existent, des v.a. de lois suivantes :

1. loi constante, égale à c
2. loi binômiale de paramètres n, p
3. loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$
4. loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$
5. loi de exponentielle de paramètre $\lambda > 0$
6. loi uniforme sur $[a, b]$, $-\infty < a < b < \infty$
7. loi normale de paramètres $m \geq 0, \sigma^2 \geq 0$.

Les résultats de cet exercice sont à connaître.

Exercice 9. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{Z} telle que $\mathbb{P}(X = k) = \frac{a}{3^{|k|}}$, $k \in \mathbb{Z}$.

1. Donner la valeur de a .
2. On pose $Y = 2^X$. Y a-t-elle une espérance? Si oui, la calculer.
3. Même question pour $Z = 4^X$.

Exercice 10. Un puzzle est formé de n morceaux que l'on peut trouver dans des paquets de céréales (les morceaux sont placés de manière uniforme et indépendante, à raison d'un morceau par paquet). Arthur décide d'acheter des paquets jusqu'à ce qu'il possède toutes les pièces du puzzle. Pour tout $k \geq 2$, on note Y_k le nombre de paquets achetés pour obtenir la k ième pièce à partir de l'obtention de la $(k - 1)$ ième pièce, et X_n le nombre total de paquets achetés.

1. Quelle est la loi de Y_k ? Exprimer X_n en fonction des Y_k . En déduire $\mathbb{E}(X_n)$ sous la forme d'une somme.

2. Montrer que

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{dx}{x}, \quad \forall k \geq 2.$$

En déduire un équivalent de $\mathbb{E}(X_n)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 11. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = k(x - x^2)\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité pour une valeur de k que l'on calculera.
2. Soit X une v.a. de densité f . Calculer la fonction de répartition de X , son espérance et sa variance.
3. On pose $Y = 1 - 2X$. Déterminer la loi de Y et calculer son espérance et sa variance.

Exercice 12. Un fournisseur reçoit des pelotes de laine provenant de lots différents. Toutes les pelotes d'un même lot n'ont pas exactement le même poids, mais le poids (en grammes) d'une pelote prise au hasard dans un lot donné peut être représenté par une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

1. Un premier client refuse toute pelote de laine de poids inférieur à 90 g. On lui propose deux lots distincts :
 - lot 1 : $m = 100\text{g}$ $\sigma = 8\text{g}$
 - lot 2 : $m = 96\text{g}$ $\sigma = 4\text{g}$.Quel est le lot donnant le plus faible pourcentage de rebut ?
2. Pour un autre client, le poids minimum exigé est inconnu. Mais il est tel que le choix entre les deux lots ci-dessus est indifférent. Calculer ce poids minimum exigé ainsi que le pourcentage de rebut commun aux deux lots.
3. On considère un troisième lot de poids moyen m et d'écart-type σ inconnus. Calculer m et σ , sachant que dans ce lot les pourcentages de rebut sont 9,18% pour le premier client et 15,87% pour le deuxième.

Exercice 13 (Loi log-normale). Une v.a. X suit une loi *log-normale de paramètres* m et σ^2 si la v.a. $Y = \ln(X)$ suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Cette loi est souvent utilisée pour modéliser le cours d'une action. Déterminer la densité de X et calculer son espérance.

Exercice 14. X suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et Y est 1 v.a. définie par

$$Y(\omega) = X(\omega) \quad \text{si } X(\omega) > 0, \quad Y(\omega) = 2X(\omega) \quad \text{si } X(\omega) \leq 0.$$

Déterminer la loi de Y , son espérance et sa variance.

Exercice 15.

1. Soit X une v.a. positive telle $\mathbb{E}(X) = 0$. On pose, pour $n \geq 1$, $A_n = \{X > 1/n\}$ et $A = \{X > 0\}$. Montrer que $\frac{1}{n}\mathbf{1}_{A_n} \leq X$. En déduire que $\mathbb{P}(A_n) = 0$ puis que $\mathbb{P}(A) = 0$. Que peut-on dire de X ?

2. Soit X une variable aléatoire dont la variance est nulle. Montrer qu'il existe un réel c tel que $X = c$ p.s.

Exercice 16 (Loi de Rayleigh). Soit X une variable aléatoire de densité f

$$x \mapsto f(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/2\sigma^2} \quad \text{si } x \geq 0, \quad f(x) = 0 \quad \text{si } x < 0.$$

1. Montrer que f est bien une densité.
2. Calculer la fonction de répartition de X , puis $\mathbb{P}(-\sigma \leq X \leq \sigma)$.
3. On pose $Y = X^2$. Déterminer la loi de Y .
4. Calculer l'espérance et la variance de X .

Exercice 17 (Loi Gamma - loi du Chi-2).

1. On définit la fonction Γ par $a \mapsto \Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx$.
 - (a) Donner le domaine de définition de Γ .
 - (b) Montrer que $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$, $\forall a > 0$. En déduire $\Gamma(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
2. Une v.a. X suit une *loi Gamma* de paramètres $a > 0$ et $\lambda > 0$ si elle admet pour densité

$$f(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0, \quad f(x) = 0 \quad x \leq 0.$$

Notation : $X \sim \Gamma(a, \lambda)$. Vérifier que f est bien une densité, puis calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\text{Var}(X)$.

3. (a) Montrer qu'une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ est un cas particulier de loi Gamma.
 - (b) Soit X une v.a. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On pose $U = X^2$. Montrer que U suit une loi Gamma dont on précisera les paramètres. Cette loi est appelée *loi du Chi-2 à un degré de liberté*.
 - (c) Montrer que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.
4. Une machine est constituée de n circuits en parallèle : dès que le premier circuit ne fonctionne plus, il est remplacé par le second, et ainsi de suite jusqu'au dernier. La durée de vie (en année) de chaque circuit suit une loi $\Gamma(2, 1)$.
 - (a) Calculer la probabilité qu'un circuit dure moins de 3 ans.
 - (b) Quelle est la durée de vie moyenne de la machine ?

Exercice 18 (Loi de Cauchy). Une variable aléatoire X suit une *loi de Cauchy* si elle admet pour densité $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'elle n'admet pas d'espérance, mais que $\mathbb{E}[X^r]$ est bien définie $\forall 0 \leq r < 1$.

Exercice 19 (Loi de Pareto). Une variable aléatoire X suit une *loi de Pareto* de paramètres $a > 0, \alpha > 0$ si elle admet une densité définie par :

$$f(x) = \alpha \frac{a^\alpha}{x^{\alpha+1}} \mathbf{1}_{[a, +\infty[}(x).$$

1. Calculer la fonction de répartition F de X et donner l'allure des graphes de f et de F .
2. Donner une condition nécessaire et suffisante d'existence de $\mathbb{E}(X)$, et la calculer. Même question pour $\mathbb{E}(X^r)$, $r > 0$.
3. Déterminer la loi des variables aléatoires suivantes, et l'identifier lorsque c'est possible : $T = \lambda X$ ($\lambda > 0$) ; $U = \ln(X/a)$; $V = \sqrt{X}$.

Exercice 20 (Simulation).

1. Soit U une v.a. distribuée suivant la loi uniforme continue sur $[0, 1]$. On pose $X = -\ln(1 - U)$. Quelle est la loi de X ?
2. Soit X une variable aléatoire réelle continue. On suppose que sa fonction de répartition F_X est strictement croissante sur \mathbb{R} . Quelle est la loi de la v.a. $U = F_X(X)$?

Exercice 21. Un coureur du 110m haies effectue sa course en X secondes lorsqu'il ne renverse aucune haies, X suivant une loi normale de moyenne 13,2 s et d'écart-type 0,2 s. Par ailleurs, il peut renverser chacune des 10 haies du parcours avec une probabilité de 0,1, ce qui lui fait perdre 0,2 s à chaque fois. On suppose les passages de haies indépendants. On note N le nombre aléatoire de haies renversées et Y la durée de la course.

1. Exprimer Y en fonction de X et N . Quelle est la loi de N ?
2. Quelle est la probabilité (approximative) que le coureur batte le record de 12,87 s ?

Exercice 22. Soit X une v.a. suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose $Y = [X]$, où $[X]$ désigne la partie entière de X .

1. Trouver la loi de Y , calculer son espérance et sa variance.
2. Montrer que $Z = X - [X]$ est une v.a. continue et calculer sa densité et son espérance.

Exercice 23. Le nombre d'appels reçus par un standard téléphonique pendant une durée $t > 0$ est une v.a. X_t suivant une loi de Poisson de paramètre λt , $\lambda > 0$. On note Y_n le temps auquel se produit le $n^{\text{ième}}$ appel (à partir du temps $t = 0$).

1. Montrer que $\mathbb{P}(Y_1 > t) = \mathbb{P}(X_t = 0)$. En déduire que Y_1 suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.
2. Plus généralement, calculer $\mathbb{P}(Y_n > t)$ en utilisant X_t . En déduire que la fonction de répartition de Y_n est définie par

$$F_{Y_n}(t) = 1 - \exp(-\lambda t) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \quad \text{si } t \geq 0,$$

$F_{Y_n}(t) = 0$ sinon. Montrer alors que Y_n suit une loi Gamma dont on précisera les paramètres.