Probabilités (2009-2010)
L2 DUMI2E

Feuille d'exercices n°3 : fonction génératrice des moments, inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebychev

Exercice 1.

1. Enoncer et démontrer les inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebychev.
2. X est une v.a. modélisant la pluviosité annuelle totale en Belgique. On suppose que X a un moment d'ordre 2. Sa moyenne, déterminée sur un grand nombre d'années, est de 800 millimètres.
   (a) Quelle est la probabilité maximale qu'il pleuve au moins 1200 mm sur une année ?
   (b) Rappeler la définition de la médiane. Quelle est la valeur maximale de la médiane de X ?
   (c) On sait de plus que l'écart-type de X est de 100 mm. Déterminer la probabilité minimale que X soit comprise entre 600 et 1000 mm sur une année.

Exercice 2. Jeu de Pile ou Face. On suppose la pièce non biaisée : la probabilité d'avoir un Pile et celle d'avoir un Face sont égales à 1/2.

1. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, estimer le nombre de lancers nécessaires pour que la fréquence de Pile observée soit comprise entre 0,4 et 0,6 avec une probabilité au moins égale à 0,9.
2. On lance cent fois la pièce. Majorer la probabilité d'avoir plus de 70 fois Face ou moins de 30 fois Face. Calculer explicitement cette probabilité. Commenter.

Exercice 3.

1. Soit X une v.a. ayant une fonction génératrice des moments M_X définie sur un voisinage de 0. On pose $Y = aX + b$. Montrer que la fonction génératrice des moments M_Y de Y est définie sur un voisinage de 0 et que $M_Y(t) = e^{tb}M_X(at)$ sur un voisinage de 0 bien choisi.
2. Calculer la fonction génératrice des moments de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ et en déduire celle de la loi $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$. Retrouver à partir de cette fonction génératrice des moments l'espérance et la variance de la loi $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$.

Exercice 4.

1. Calculer la fonction génératrice des moments d'une v.a. X_n de loi Gamma de paramètres n, λ (cf. Feuille 2 pour une définition). Préciser son domaine de définition.
2. En déduire la fonction génératrice des moments M_{Y_n} de $Y_n = X_n/n$. Calculer la limite de $M_{Y_n}(t)$ en tout t où cela a un sens. La fonction limite obtenue est la fonction génératrice des moments d'une v.a. réelle. Laquelle ?