Probabilités (2009-2010)
L2 DUMI2E

Feuille d'exercices n°4 :
couples aléatoires, covariance

Exercice 1. Soient X et Y deux variables aléatoires. Rappeler les conditions d'existence du coefficient de corrélation linéaire $\rho(X,Y)$. On pose $U = aX + b$ et $V = cY + d$, où a, b, c, d sont des réels. Calculer $\rho(U,V)$ en fonction de $\rho(X,Y)$.

Exercice 2. n personnes se répartissent au hasard dans les 3 hôtels d'un village, chaque hôtel disposant d'au moins n places. On désigne par X (respectivement Y, Z) le nombre de personnes allant dans l'hôtel A (respectivement B et C).

1. Quelle est la loi de X ? celle de Y ? celle de Z ?
2. Exprimer $X + Y$ en fonction de n et Z. En déduire $\mathrm{Var}(X + Y)$.
3. Sans calculer $\mathbb{E}(XY)$, donner la valeur de $\rho(X,Y)$.

Exercice 3. Une urne contient $2n$ boules ($n \geq 2$), dont n sont numérotées de 1 à n, et n ne portent pas de numéro. On tire simultanément n boules dans cette urne. Pour $i = 1, ..., n$ on note X_i la variable qui vaut 1 si la boule i est dans l'échantillon tiré, et 0 sinon.

1. Donner la loi de X_i.
2. Pour $i \neq j$, calculer $\mathbb{P}(X_i = 1, X_j = 1)$. En déduire $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$.
3. Soit S la somme des numéros tirés. Ecrire S en fonction des X_i. En déduire $\mathbb{E}(S)$ et $\mathrm{Var}(S)$.

Exercice 4. On lance une infinité de fois une pièce amenant à chaque lancer "pile" avec la probabilité p ($0 < p < 1$) et "face" avec la probabilité $q = 1-p$. On appelle "série" une succession de piles (ou de faces) interrompue par le résultat contraire. La "longueur" de la série est le nombre de piles (ou faces) qui la composent. Par exemple, pour l'événement PPFFFPFFF..., la première série est une série de piles et a pour longueur 2, la deuxième est une série de faces et a pour longueur 3, etc... On note X la v.a. égale à la longueur de la première série si cette longueur est finie, et égale à 0 dans le cas où les lancers successifs donneraient tous "pile" ou tous "face". On définit de même Y, longueur de la deuxième série.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la loi du couple (X,Y). En déduire la loi de Y.

Exercice 5. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, dont la loi conjointe est définie par :

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = a^i b^j, \quad a, b > 0.$$

1. Quelles conditions doivent remplir a et b ?
2. Donner les lois marginales de X et Y.
3. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.

Exercice 6. Soit (X, Y) un couple discret à valeurs dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, dont la loi conjointe est donnée par :

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{1}{e} \frac{(i + j)\lambda^{i+j}}{i!j!}, \forall i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}.$$

1. Calculer λ.
2. Trouver les lois marginales de X et Y.
3. Trouver la loi de $X + Y$, puis calculer $\mathbb{E}[2^{X+Y}]$.

Exercice 7. Soit (X, Y) un couple aléatoire à valeurs dans $\{0, 1\} \times \mathbb{N}^*$, dont la loi est définie par :

$$\mathbb{P}(X = 0, Y = k) = \frac{2^k - 1}{4^k}, \quad \mathbb{P}(X = 1, Y = k) = \frac{1}{4^k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

1. Déterminer les lois de X et Y, donner leurs espérances et leurs variances.
2. On pose $S = X + Y$ et $T = XY + 1$. Déterminer les lois de S et de T.
3. Trouver la loi du couple (S, T) (distinguer les cas $\mathbb{P}(S = k, T = 1), \mathbb{P}(S = k, T = k)$ pour $k \neq 1$, $\mathbb{P}(S = k, T = j)$ pour $k \neq j \neq 1$).
4. Calculer $\mathbb{P}(S = T)$.

Exercice 8. Pour les fonctions f suivantes, peut-on choisir le réel k de telle sorte que f soit une densité de probabilité ? Si oui, donner la valeur de k, et calculer les densités marginales correspondantes.

1. $f(x, y) = \begin{cases} k \text{ si } x > 1, y > 0, xy < 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$
2. $f(x, y) = \begin{cases} k \text{ si } x > 1, y > 0, x^2 y < 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$
3. $f(x, y) = \begin{cases} k(y^2 - x^2 + 1) \text{ si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$
4. $f(x, y) = \begin{cases} k \text{ si } |x| + |y| \leq 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

5. $f(x,y) = \begin{cases} kx \text{ si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \min(x, 1-x) \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

Exercice 9. Soit (X, Y) un couple de loi continue uniforme sur $[0,1] \times [0,1]$, c'est-à-dire de densité $f(x,y) = 1$ si $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$ et $f(x,y) = 0$ sinon. On considère les variables aléatoires suivantes :

$$U = \inf(X, Y) \quad \text{et} \quad V = \sup(X, Y).$$

1. Déterminer une densité de probabilité de V, puis de U.
2. Calculer l'espérance et la variance de U et V.
3. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre U et V.

Exercice 10. Deux transistors sont montés sur le même circuit imprimé. Leurs durées de vie est un couple de v. a. (X, Y) dont une densité est donnée par :

$$f(x,y) = \begin{cases} 6e^{-2x}e^{-3y} \text{ si } x > 0, y > 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer les lois de X et Y.
2. Calculer $\mathbb{P}(X > Y)$.

Exercice 11. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires admettant pour densité

$$f(x,y) = \begin{cases} 4xe^{-(x+y)} \text{ si } 0 < x < y, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer les densités des marginales de X et Y.
2. Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Exercice 12. Soit (X, Y) un couple de densité $f(x,y) = (x+y)\mathbf{1}_D(x,y)$, où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

1. Vérifier que f est bien une densité et calculer les densités marginales de X et Y.
2. Calculer $\mathbb{P}(X + Y \leq 1)$.
3. Déterminer une densité de $U = \max(X, Y)$.

Exercice 13. En utilisant l'égalité suivante,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-(x^2 + y^2)) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) \mathrm{d}x \right)^2,$$

et un changement de variables adéquat, montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.

Exercice 14. Soit (X,Y) un couple de loi uniforme sur le disque unité, c'est-à-dire de densité $f(x,y)=1$ si $x^2+y^2\leq 1$, $f(x,y)=0$ sinon. On pose $R=\sqrt{X^2+Y^2}$. Calculer la densité du couple (X,R).

Exercice 15. Soit (X,Y) un couple de densité

$$f(x,y)=\exp(-(x+y))\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(y).$$

On considère les variables U et V définies par $U=X+Y$, $V=X/Y$.

1. Déterminer la densité du couple (U,V).
2. En déduire les densités de U et V.
3. Calculer $\mathbb{E}(U)$ et $\mathrm{Var}(U)$. Que peut-on dire des moments de V ?

Exercice 16. Soit (X,Y) un couple aléatoire continu de densité f. Montrer que $X+Y$ a une densité donnée par

$$f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,z-x)\mathrm{d}x.$$

Exercice 17. Soit un couple aléatoire (X,Y) dont la loi conjointe a pour densité

$$f(x,y)=\begin{cases} xe^{-(x+y)} \text{ si } x,y\geq 0,\\ 0 \text{ sinon.}\end{cases}$$

On pose $U=\inf(X,Y)$ et $V=\sup(X,Y)$. Quelle est la loi du couple (U,V) ?