

**Feuille d'exercices n°5 : variables aléatoires indépendantes,  
lois conditionnelles, espérances conditionnelles**

**Exercice 1.** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables indépendantes de variance finie. On pose  $U = X + Y$  et  $V = XY$ . A quelle condition  $U$  et  $V$  sont non-corrélées ?

**Exercice 2.** Soient  $X, Y$  deux variables aléatoires continues indépendantes et soit  $U$ , indépendante de  $X$  et  $Y$ , à valeurs dans  $\{-1, 1\}$ ,  $\mathbb{P}(U = 1) = \mathbb{P}(U = -1) = 1/2$ . On pose  $S = UX$  et  $T = UY$ . Montrer que  $S^2$  et  $T^2$  sont indépendantes, mais que  $S$  et  $T$  sont en général dépendantes.

**Exercice 3.**  $(X, Y)$  est un couple continu de densité  $f$ . Dire, dans chacun des cas suivants, si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes :

- (i)  $f(x, y) = \frac{1}{y} \exp(-y - x/y)$ ,  $x, y > 0$
- (ii)  $f(x, y) = \frac{1}{(xy)^2}$ ,  $x, y > 1$
- (iii)  $f(x, y) = \frac{3}{(xy)^2}$ ,  $x > y > 1$
- (iv)  $f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}\right)$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ , où  $\rho$  est un paramètre fixé appartenant à  $] -1, 1[$  (discuter suivant  $\rho$ ).

**Exercice 4.** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes continues et de même loi. On note  $F$  leur fonction de répartition et  $f$  leur densité.

1. On pose  $V = \max(X, Y)$ . Exprimer, en fonction de  $F$  et  $f$ , la fonction de répartition de  $V$  et sa densité.
2. Trouver la densité de  $U = \min(X, Y)$ .

**Exercice 5.** Soient  $X$  et  $Y$  deux v.a. indépendantes. Calculer la loi de  $X + Y$  :

1. si  $X$  et  $Y$  suivent la même loi uniforme sur  $[0, 1]$  ;
2. si  $X$  et  $Y$  suivent respectivement les lois exponentielles de paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  ;
3. si  $X$  suit la loi exponentielle de paramètre 1, et  $Y$  a même loi que  $-X$  ;

**Exercice 6.** On appelle loi du khi-2 à  $n$  degrés de liberté (notée  $\chi^2(n)$ ) une loi Gamma  $\mathcal{G}(n/2, 2)$  ( $n$  entier naturel non nul). Une densité d'une variable aléatoire  $X$  suivant une telle loi est donc définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{n/2-1} \exp(-x/2) \mathbf{1}_{]0, +\infty[}(x).$$

1

1. Calculer  $\mathbb{E}(X)$  et  $\text{Var}(X)$ .
2. Calculer la fonction génératrice des moments de  $X$ .
3. Soient  $X$  et  $Y$  deux v.a. indépendantes suivant respectivement des lois  $\chi^2(n)$  et  $\chi^2(m)$ . Quelle est la loi de  $X + Y$  ?
4. Soient  $Y_1, \dots, Y_n$  des v.a. indépendantes telles que pour tout  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ),  $Y_i$  suit la loi  $\mathcal{N}(m_i, \sigma_i^2)$  ( $\sigma_i > 0$ ).
  - (a) Calculer la fonction génératrice des moments de  $Y_i$ . En déduire la loi de  $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ .
  - (b) On pose  $Z_i = ((Y_i - m_i)/\sigma_i)^2$ . Déterminer la f. g. m. de  $Z_i$ . En déduire la loi de  $T_n = \sum_{i=1}^n Z_i$ .

**Exercice 7.** Soit un couple  $(X, Y)$  dont une densité est :

$$f(x, y) = \frac{1}{2x} \mathbf{1}_D(x, y) \quad \text{avec} \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < x, 0 < y < 1/x\}.$$

On considère les variables aléatoires  $U = \sqrt{XY}$  et  $V = \sqrt{Y/X}$ .

1. Montrer que  $U$  et  $V$  sont indépendantes, de même loi continue uniforme sur  $]0, 1[$ .
2. Le plus simplement possible, calculer  $\mathbb{E}[Y]$ .

**Exercice 8.** Soient  $X$  et  $Y$  deux v.a. indépendantes de même loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ . On pose  $T = X/Y$ . Montrer que  $T$  suit une loi de Cauchy dont une densité  $f$  est définie par :  $f(x) = 1/(\pi(x^2 + 1))$ .

**Exercice 9.** Soit  $X$  une v.a. à valeurs dans  $\mathbb{N}$  et soit  $p \in ]0, 1[$ .

1. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que  $X$  suive une loi géométrique de paramètre  $p$  est que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X > n) = (1 - p)^n$ .
2. Soient  $X$  et  $Y$  deux v.a. indépendantes suivant des lois géométriques de même paramètre  $p$ . On pose  $M = \min(X, Y)$  et  $S = X + Y$ . Montrer que  $M$  suit une loi géométrique et  $S$  une loi binômiale négative dont on précisera les paramètres respectifs.
3. Généraliser les résultats de la question précédente lorsque  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont des v.a. indépendantes de même loi géométrique. On pose  $M = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$  et  $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ .

**Exercice 10.** Une urne contient des boules rouges, blanches et noires en proportions respectives  $p, q, r$  ( $p > 0, q > 0, r > 0, p + q + r = 1$ ). On effectue dans cette urne  $n$  tirages successifs avec remise. On désigne par  $X$  (respectivement  $Y$ ) le nombre de boules rouges (respectivement blanches) obtenues.

1. Déterminer la loi conditionnelle de  $X$  sachant  $Y = j$  ( $0 \leq j \leq n$ ).
2. En déduire l'espérance conditionnelle  $\mathbb{E}(X|Y)$ .
3. Vérifier que l'on a bien :  $\mathbb{E}[\mathbb{E}(X|Y)] = \mathbb{E}[X]$ .

**Exercice 11.** Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires entières. On sait que :  $X$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$  et que pour tout entier  $n$ , la loi conditionnelle de  $Y$  sachant  $X = n$  est la loi binômiale  $B(n, p)$  (si  $n = 0$ ,  $\mathbb{P}(Y = 0) = 1$ ).

1. Calculer l'espérance conditionnelle  $\mathbb{E}(Y|X)$ . En déduire  $\mathbb{E}[Y]$ .
2. Déterminer la loi de  $Y$ . Retrouver ainsi  $\mathbb{E}[Y]$ .
3. Déterminer les lois conditionnelles de  $X$  sachant  $Y = m$ , et calculer l'espérance conditionnelle  $\mathbb{E}(X|Y)$ .
4. Calculer le coefficient de corrélation  $\rho(X, Y)$ .  $Y$  peut-elle être presque sûrement une fonction affine de  $X$  ?

**Exercice 12.** Soit  $(X, Y)$  un couple continu tel que :

-  $Y$  admet pour densité la fonction :  $y \mapsto y^{-2}\mathbf{1}_{[1, +\infty[}(y)$   
 - la densité conditionnelle de  $X$  sachant  $Y = y$  ( $y \geq 1$ ) est la fonction :  $x \mapsto y^2 x e^{-yx} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$ .

1. Quelle est la densité du couple  $(X, Y)$  ?
2. Calculer la densité marginale de  $X$ .
3. Calculer la densité conditionnelle de  $Y$  sachant  $X = x$ .
4. Calculer  $\mathbb{E}(Y|X)$ .

**Exercice 13.** Soit un couple de variables aléatoires  $(X, Y)$  dont la loi conjointe a pour densité :  $f(x, y) = e^{-y}\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x)\mathbf{1}_{[x, +\infty[}(y)$ .

1. Donner les densités marginales de  $X$  et  $Y$ .
2. Donner les densités conditionnelles de  $X$  sachant  $Y = y$  et de  $Y$  sachant  $X = x$ .
3. Calculer les espérances conditionnelles  $\mathbb{E}(X|Y)$  et  $\mathbb{E}(Y|X)$ .
4. Vérifier que  $\mathbb{E}[\mathbb{E}(X|Y)] = \mathbb{E}(X)$  et  $\mathbb{E}[\mathbb{E}(Y|X)] = \mathbb{E}(Y)$ .

**Exercice 14.** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes. On note  $Z$  leur somme.

1. On suppose dans cette question que  $X$  et  $Y$  suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs  $\lambda$  et  $\mu$ .
  - (a) Montrer que  $Z$  suit une loi de Poisson.
  - (b) Montrer que la loi conditionnelle de  $X$  sachant que  $Z = n$  est une loi binômiale. En déduire  $\mathbb{E}(X|Z)$ .
2. On suppose maintenant que  $X$  et  $Y$  suivent des lois binômiales  $B(n_1, p)$  et  $B(n_2, p)$ .
  - (a) Montrer que  $Z$  suit une loi binômiale.
  - (b) Montrer que la loi conditionnelle de  $X$  sachant que  $Z = n$  ( $n \leq n_1 + n_2$ ) est une loi hypergéométrique. En déduire  $\mathbb{E}(X|Z)$ .

**Exercice 15.** Soit  $X$  une variable aléatoire de densité :  $x \mapsto x^{-2}\mathbf{1}_{[1, +\infty[}(x)$  et  $Y$  une variable aléatoire indépendante de  $X$  et de même loi.

1. Déterminer une densité du couple  $(U, V)$  défini par :  $U = XY, V = X/Y$
2. Calculer les densités conditionnelles de  $U$  sachant  $V = v$  et de  $V$  sachant  $U = u$ .
3. Calculer les espérances conditionnelles  $\mathbb{E}(U|V)$  et  $\mathbb{E}(V|U)$  si elles existent.

**Exercice 16. Somme d'un nombre aléatoire de variables de Bernoulli.** Soient  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  une suite de variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre  $p$  ( $0 < p < 1$ ), et  $X$  une variable aléatoire à valeurs entières indépendante des  $Z_i, 1 \leq i \leq n$ . On définit l'application  $S$  de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall \omega \in \Omega, S(\omega) = \sum_{i=1}^{X(\omega)} Z_i(\omega)$$

(avec la convention :  $S(\omega) = 0$  si  $X(\omega) = 0$ ). On admet que  $S$  est une variable aléatoire.

1. Montrer que la loi conditionnelle de  $S$  sachant  $X = n$  est la loi  $B(n, p)$ .
2. *1er exemple d'application* : on suppose que  $X$  suit la loi binômiale  $B(m, a)$ . Calculer  $\mathbb{E}(S|X)$ , en déduire  $\mathbb{E}(S)$ ,  $\mathbb{E}(SX)$  puis  $\text{Cov}(S, X)$ .
3. *2ème exemple d'application* : le nombre d'oeufs pondus par un insecte dans une enceinte fermée est une variable aléatoire  $X$  suivant la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ . Chaque oeuf a, indépendamment des autres, une probabilité  $p$  de donner un insecte adulte. On appelle  $Y$  le nombre d'insectes adultes après l'éclosion et le développement des larves. Montrer que  $Y$  suit la loi de Poisson de paramètre  $p\lambda$  (on pourra utiliser l'exercice 9). Donner la loi du nombre d'oeufs pondus, sachant qu'on a observé  $m$  insectes adultes après l'éclosion et le développement des larves.