

Chapitre 11

Economie et mathématiques

Elyès Jouini

Dans sa préface à la quatrième édition des *Eléments d'économie politique pure ou théorie de la richesse sociale*, publiée à Lausanne en 1900, Léon Walras écrit "Toute cette théorie est une théorie mathématique, c'est à dire que si l'exposition peut s'en faire dans le langage ordinaire, la démonstration doit s'en faire mathématiquement." Il ajoute même plus loin "Il est à présent bien certain que l'économie politique est, comme l'astronomie, comme la mécanique, une science à la fois expérimentale et rationnelle... Le XX^{ème} siècle, qui n'est pas loin, sentira le besoin (...) de remettre les sciences sociales aux mains d'hommes d'une culture générale, habitués à manier à la fois l'induction et la déduction, le raisonnement et l'expérience. Alors l'économie mathématique prendra son rang à côté de l'astronomie et de la mécanique mathématiques; et, ce jour-là aussi, justice nous sera rendue."

Aujourd'hui, pourtant, certains s'interrogent encore sur la réalisation de cette préface en forme de prophétie. Parmi eux, d'aucuns iront même jusqu'à affirmer qu'il n'y a pas de place pour les mathématiques dans le discours économique. Tout au plus admettent-ils l'utilité des techniques statistiques. Nous allons pour notre part, tenter de lever les objections de principe à un mariage de l'économie et de la mathématique puis montrer concrètement, sur des exemples, comment l'une et l'autre peuvent s'enrichir et progresser de concert.

1 Sciences et mathématiques

L'introduction des mathématiques dans une théorie est généralement perçue comme signe de rigueur, d'exactitude et de quantification.

Ainsi, la mécanique est-elle le plus bel exemple de la mathématisation d'un phénomène. La maîtrise des calculs qui y sont associés a permis des réalisations spectaculaires, donnant au monde l'image d'une maîtrise totale des forces gravitationnelles : mise en orbite de satellites artificiels, alunissage d'engins... et, plus proche de nous, envoi de véritables bases-laboratoires dans l'espace, vers lesquels des astronautes vont et viennent, observent, écoutent, réparent...

Face à ces exploits, nul ne songe à remettre en cause la mathématisabilité de la physique. Galilée déjà écrivait "Il (l'univers) est écrit en langue mathématique et ses caractères sont des triangles, des cercles, et d'autres figures géométriques sans l'intermédiaire desquels il est humainement impossible d'en comprendre un seul mot".

Pourtant, tous les domaines de la physique ne se prêtent pas aussi bien à la quantification et à la prédictibilité. Ils n'en demeurent pas moins scientifiques et mathématisés. La thermodynamique¹, par exemple, postule, à travers le deuxième principe dans sa formulation moderne, l'existence de l'entropie, fonction fondamentale des variables d'état extensives qui permet de caractériser les états d'équilibre, et d'où l'on peut déduire les diverses équations d'état (relations entre variables). Elle fournit ainsi des relations fructueuses non entre variables d'état mais entre équations d'état, relations qui pour être explicitées et mises en oeuvre nécessitent des mathématiques. La thermodynamique proprement dite ne donne pas la moindre expression analytique² de cette fonction entropie ou des potentiels thermodynamiques. Ce qui est alors du ressort des mathématiques, c'est la caractérisation fonctionnelle, algébrique ou analytique, des classes d'ensembles d'équations d'état consistantes avec l'existence d'une fonction entropie sous-jacente. Elle permet notamment au travers de la topologie des diagrammes de phase d'expliquer des comportements génériques (théorie des transitions de phase).

Dans le même ordre d'idées et pourtant complètement différente, la météorologie, branche à part entière de la physique, est à même de décrire analytiquement les relations entre variables. Cependant, le grand nombre de ces variables et de ces relations rendent vaines toute tentative de calcul, même sur les ordinateurs les plus puissants. Le météorologiste se doit alors d'abandonner l'approche quantitative pour se diriger vers des prédictions qualitatives à court terme.

Il serait pourtant tentant d'objecter que ce n'est pas la science étudiée qui

¹L'auteur souhaite remercier Roger Balian pour une relecture attentive et notamment pour des précisions extrêmement utiles sur cette illustration de notre propos par la thermodynamique.

²Mais les progrès de la mécanique statistique depuis plus d'un siècle ont permis d'une part d'expliquer la signification microscopique du deuxième principe, d'autre part de calculer le potentiel thermodynamique d'un matériau (pas trop complexe) à partir des interactions connues entre ses constituants élémentaires. Ce sont donc d'autres mathématiques, très élaborées aussi, qui fournissent explicitement (analytiquement ou numériquement) l'ensemble des équations d'état.

est rebelle à l'approche quantitative mais que ce sont plutôt nos procédures opératoires qui sont insuffisantes. Il suffit alors de se pencher de plus près sur la question pour s'apercevoir que les difficultés ne sont pas que techniques. En effet, par nature, les équations de la météorologie dynamique sont profondément instables. Plus précisément, cela signifie que même si l'on se concentre sur un tout petit nombre d'équations et de variables, la moindre perturbation des données initiales peut induire, à moyen terme, des différences dans l'évolution sans commune mesure avec la perturbation initiale.

Cette digression nous permet de revenir à une question beaucoup plus fondamentale : quantitative ou qualitative, prédictive ou explicative, quels sont les buts de la science ? Il n'est pas dans mon propos de répondre en quelques phrases à une question aussi importante du point de vue scientifique et philosophique. En outre, buts de la science et buts des scientifiques ne convergent pas nécessairement. La diversité des buts des uns et des autres nous permet de parler d'un continuum que nous ne saurions décrire dans ce simple exposé.

René Thom, nous éclaire cependant sur la nature de ce continuum en écrivant "Il n'en demeure pas moins qu'(il) a deux pôles. Un pôle regarde la connaissance pure : comprendre le réel, tel est en ce point, le but fondamental de la science. L'autre pôle concerne l'action : agir efficacement sur le réel, tel serait selon ce point de vue le but de la science." Ces deux approches ne sont ni antagonistes ni faussement antagonistes : s'il est utile de comprendre pour agir et d'expérimenter (donc agir) pour comprendre, il se peut également que la compréhension ne nous laisse pas moins impuissant et que l'action soit dénuée de compréhension. Ainsi, ces deux approches doivent-elles tout simplement coexister. C'est donc au travers de cette définition bipolaire des buts de la science que le rôle des mathématiques dans une discipline donnée doit être analysé. C'est au travers de cette définition bipolaire qu'il nous faut tenter de montrer que mathématiques et économie peuvent s'enrichir mutuellement.

Il faut tout d'abord signaler qu'au regard de l'approche que nous nous sommes imposées, les mathématiques réduites simplement aux statistiques, quoique utiles, n'en accroissent pas pour autant la scientificité de l'économie. En effet, les statistiques permettent d'établir un cliché de l'économie à une date données et ne sauraient ni expliquer, ni agir sur le réel. Même si l'on étend notre champ d'analyse à la statistique, en tant que corps de connaissances par opposition aux statistiques en tant que données chiffrées, il est clair que les techniques d'analyse statistique moderne permettent de recon-

naître des types de comportement (cycles, croissance...) à partir de séries de données temporelles, cependant tant que ces comportements observés ne sont pas justifiés par un modèle acceptable il est difficile d'admettre des prévisions qui ne seraient fondées que sur les observations antérieures. Ainsi sans contester le statut de science à la statistique, il est possible de contester la scientificité d'une approche uniquement statistique de l'économie. De même que si l'étude des astres (astronomie) est sans conteste une science, cela ne confère pas pour autant un caractère scientifique à l'astrologie.

Mais trêve de discours et passons aux exemples. Les deux exemples retenus devraient illustrer respectivement les deux pôles de notre approche. Le premier, la théorie de l'équilibre général, remonte aux travaux de Léon Walras en 1870 et a trouvé sa modélisation globale dans les travaux de Gérard Debreu et plus précisément dans *Theory of value*, 1959, travaux pour lesquels Gérard Debreu a obtenu le prix Nobel d'économie en 1983. Le deuxième exemple, quoique prenant ses sources dans le précédent, comme l'essentiel de la théorie économique moderne, est beaucoup plus récent et relève de la finance. Il s'agit de la théorie de l'arbitrage qui doit ses résultats les plus spectaculaires à Fisher Black, Robert Merton et Myron Scholes.

2 Théorie de l'équilibre général

Le but de la théorie de l'équilibre général, ou théorie de la valeur, est de décrire et d'expliquer les phénomènes de marché. La question fondamentale étant de savoir comment se forment les prix des biens économiques et quels sont les liens entre ces prix et l'interaction des différents agents de l'économie. Cette théorie s'attache donc en premier à définir de façon claire des concepts d'apparence aussi élémentaire qu'agent, bien, demande, richesse, équilibre... et à étudier les propriétés normatives de la notion d'équilibre ainsi dégagée.

La théorie de l'équilibre général suppose l'existence d'un marché sur lequel sont échangés des biens, ces derniers peuvent être physiques (on retrouve alors la définition classique du mot bien) ou immatériels (il s'agit par exemple du concept de services).

Un bien est défini par toutes ses caractéristiques "physiques" (modèle, couleur, âge, état... pour une voiture; nature, renommée du "vendeur"... pour un service;...) ainsi que par des caractéristiques spatio-temporelles (lieu de la livraison, date de la livraison...) Ainsi une tonne de blé livrable immédiatement n'est pas identifiable au contrat à terme correspondant à la livraison

d'une tonne de blé, de la prochaine récolte, dans un an. D'ailleurs ces deux biens n'ont aucune raison d'avoir le même prix puisque le prix du second va certainement dépendre des anticipations des agents quant à la qualité de la prochaine récolte. De plus, un bien pourra être défini de façon contingente à la réalisation de certains événements. Ainsi, une assurance incendie, correspond elle à l'achat du montant de l'indemnisation, uniquement si un incendie a lieu.

En fait, la théorie ne se préoccupe pas des qualités définissant chaque bien, il suffit de savoir qu'ils existent, sont échangeables et qu'il est possible d'en définir une quantité unitaire. Mathématiquement, il suffit alors d'associer à ce marché un espace de dimension égale au nombre de biens échangeables, dans lequel un vecteur représentera ce que l'on appelle un panier de biens : chaque coordonnée est associée à un bien et représente donc la quantité de ce bien présente dans le panier.

On suppose alors qu'il existe un prix pour chaque bien. Le prix est alors une quantité réelle telle que le prix d'une quantité donnée du bien est égal au produit de cette quantité par le prix du bien. Il s'agit donc d'un prix unitaire. Il est clair alors que l'ensemble des prix peut être associé à un vecteur dans l'espace précédent et que le prix d'un panier de biens est alors égal au produit scalaire du vecteur "panier" et du vecteur "prix".

Face à ce marché nous supposons qu'un consommateur a la possibilité de choisir entre deux paniers de biens celui qu'il préfère et ceci indépendamment du prix associé. On dit alors que le consommateur est muni d'une relation de préférence.

A ce niveau d'exposé, il est inutile de décrire les hypothèses que la théorie est amenée à faire sur ces relations. Elles relèvent cependant toutes de la logique (le consommateur préfère plus à moins, si le consommateur préfère "a" à "b" et "b" à "c", il préfère alors "a" à "c"...), et on parle alors de consommateur rationnel.

Le consommateur est supposé par ailleurs être doté d'une richesse initiale c'est à dire qu'il possède au départ des quantités données, éventuellement nulles, de chaque bien. Afin de faciliter notre étude, nous allons supposer que notre économie est une économie d'échange, c'est à dire sans industrie de transformation, les agents échangent donc entre eux en essayant de satisfaire au mieux leurs besoins.

En fait, face aux prix, notre consommateur va déterminer la valeur de son allocation initiale et en déduire que toute allocation de valeur inférieure ou égale lui est accessible. Il choisit alors parmi ces allocations accessibles, celles

qui lui offrent un maximum de contentement, c'est à dire celles qui ne sont préférées par aucune autre accessible. Le comportement du consommateur peut alors être modélisé par la donnée d'une fonction qui, à un vecteur de prix et un vecteur d'allocation initiale, associe le vecteur correspondant à ce maximum de contentement dans l'ensemble des admissibles. Ce vecteur est appelé demande du consommateur.

Ainsi, chaque consommateur apparaît comme déterminé par sa fonction de demande. On dira qu'il y a équilibre dans cette économie si la somme des demandes ainsi déterminées sur l'ensemble des consommateurs est exactement égale à la somme des allocations initiales de ces mêmes consommateurs. Un équilibre consiste donc en la donnée de prix et d'allocations initiales telles qu'en échangeant les biens à ces prix, chaque consommateur peut atteindre son maximum de contentement sous sa contrainte de budget.

Réciproquement, dans un marché en équilibre, les prix des biens sont ceux qui égalisent l'offre et la demande globales de l'économie. La question naturelle est alors : existe-t-il un prix d'équilibre pour tout système d'allocations initiales et pour tout ensemble de consommateurs. La réponse est positive, quand à la démonstration de cette existence, elle relève, sous les hypothèses les plus fortes, du théorème du point fixe de Brouwer et sous des hypothèses moins fortes (présence de production, non-convexités...) de la topologie et de la géométrie différentielle ainsi que de l'analyse non-différentiable. D'une façon générale, il est possible de montrer qu'à allocations initiales fixées, plusieurs équilibres peuvent coexister.

L'ensemble des couples (équilibres, allocations initiales) peut être représenté génériquement par une hyper-surface (dans l'espace prix-allocations) de même dimension que l'espace des allocations (c'est à dire de dimension le nombre de consommateurs multiplié par le nombre de biens échangeables). Cette surface est appelée variété des équilibres.

A titre d'illustration, la figure ci-dessus, représentant un "S" inversé, est un exemple de ce que peut être une section de la variété des équilibres. Cet exemple, loin d'être innocent va nous permettre de montrer comment cette variété peut expliquer certains phénomènes du marché et d'éviter certaines erreurs grossières d'analyse qui sont encore trop souvent faites.

Supposons que les allocations initiales de l'économie soient en "a". Ces allocations représenteront - par exemple - pour nous la production globale de pétrole. Supposons que le prix d'équilibre soit en "p" de telle sorte que le couple (prix, allocations) soit dans la branche supérieure du "S" formé par la courbe. Supposons que la quantité globale de pétrole produite aug-

mente à présent petit à petit, on peut supposer que les différents opérateurs de l'économie vont ajuster par petites variations leur demande aux nouvelles données de l'économie jusqu'à atteindre un nouveau prix d'équilibre au voisinage de "p" (principe de continuité) et que le point (prix, allocations) va se déplacer parallèlement à l'axe des allocations sur la branche supérieure du "S".

Supposons à présent que l'on arrive à une production "b", avec le même raisonnement, le prix d'équilibre est en "q". Cependant, dorénavant toute augmentation de production, aussi petite soit elle, ne peut plus s'appliquer dans la continuité des prix : le nouveau prix d'équilibre, à droite de "b" ne peut se situer qu'au voisinage de "r". Ainsi, une toute petite augmentation de la production a entraîné une chute brutale des cours (krach).

Supposons à présent, qu'affolés, les producteurs décident de revenir à l'ancienne production (c'est à dire en "b") en détruisant, par exemple le surplus ayant entraîné le krach ou en régulant leur production. Cette fois-ci le principe de continuité peut s'appliquer et les prix, au lieu de remonter en "q" se retrouvent en "r", tout déplacement vers la gauche va à présent avoir lieu sur la branche inférieure du "S". Le krach est donc irréversible. Ce n'est que par de longs efforts de concertation et d'énormes restrictions sur la production que l'on pourra passer à gauche de "a" et retrouver un prix élevé, au voisinage de "p".

Ainsi, un certain nombre d'intuitions économiques se trouvent prises en défaut : le principe de continuité ne joue que tant qu'il peut le faire et la rupture brusque dans la continuité des prix n'est pas due à une folie du marché mais est structurelle. Si une petite augmentation de production a entraîné cet effondrement et puisque, hormis cette petite variation, rien ne distingue aujourd'hui d'hier, alors une variation contraire devrait nous ramener aux prix antérieurs! Il n'en est rien, le principe de continuité joue désormais contre nous.

Supposons qu'au lieu de production de pétrole, il s'agisse, à présent, de production agricole. Une chute des cours implique une baisse importante des revenus des agriculteurs ce qui politiquement pose problème. Que d'états, dans ce cas, n'ont ils pas tenté de soutenir les prix en soutenant la demande et en stockant les produits? Comme on l'a vu pour revenir à la situation antérieure il faudrait stocker des quantités énormes par rapport aux quantités qui ont provoqué le krach, ainsi une telle politique de soutien ne peut être, dans ce cas, qu'un gouffre financier. Que d'agriculteurs en colère, n'ont ils pas brûlé leurs excédents ou déversé à la décharge publique ces mêmes

excédents? Un tel acte ne saurait avoir les conséquences attendues que par une destruction massive, mais alors si les cours reviennent à leur position initiale, les quantités sur le marché sont bien plus faibles et en valeur les agriculteurs sont encore perdants... quel gaspillage! En revanche, sur les marchés boursiers - très sensibles à la propagation de l'information - une rumeur de pénurie (retour à gauche de "a") peut provoquer une réaction salutaire des marchés, les cours remontant et restant élevé même si l'offre revient (après accalmie) au voisinage de "b".

Les applications de la théorie de l'équilibre général sont bien plus importantes que ce simple exemple. En particulier, elle nous permet d'étudier dans quel mesure le marché peut conduire à un optimum social. Plus précisément, elle permet d'éclairer la question : faut-il laisser faire, laisser passer?

On dira qu'une allocation donnée de richesses est optimale, au sens de Pareto, s'il n'existe pas de réallocation de la même richesse globale de telle sorte que chaque individu préfère la nouvelle allocation à l'ancienne. L'analyse convexe, par un théorème de séparation, nous permet alors de montrer que toute situation d'équilibre est Pareto optimale et que tout optimum de Pareto peut être atteint en laissant faire le marché, à condition de donner aux individus la bonne allocation initiale. Ces résultats sont connus sous le nom de théorèmes du bien-être.

Ces théorèmes semblent de prime abord militer en faveur d'un libéralisme total, excluant toute action sociale de l'économie. Cependant, en y regardant de plus près, on peut s'apercevoir que la notion d'optimum de Pareto n'est pas la panacée. En effet, une situation où un agent se verrait attribuer toute la richesse de l'économie est optimale au sens de Pareto (puisque toute réallocation ne peut que mécontenter cet agent). Ainsi, s'il est naturel d'essayer d'atteindre un optimum, tous les optima ne sont pas équivalents. C'est donc là qu'intervient le deuxième théorème du bien être, il est possible de laisser faire le marché tout en choisissant l'optimum à atteindre : il suffit de définir au départ la bonne allocation de ressources et les transferts de richesse adéquats.

Laisser faire ne doit donc pas être entendu au sens d'une démission de l'état mais au contraire au travers d'un rôle accru mais discret; l'état sans manipuler les prix, sans rigidifier l'offre ou la demande, peut intervenir à travers une politique de prélèvements (fiscalité) et de redistribution.

Dans un chapitre du présent ouvrage, Ivar Ekeland montre que l'approche qualitative pose de nombreuses autres questions mathématiquement intéressantes et économiquement pertinentes et que les réponses apportées par les

modèles permettent une meilleure compréhension de l'univers économique. Nous allons quant à nous nous intéresser dans ce qui suit à un problème typiquement quantitatif et opérationnel.

3 Théorie de l'arbitrage

Etant donnée une action cotée sur les marchés financiers et de prix (aujourd'hui) égal à " S ", à quel prix doit on négocier le droit d'acheter cette même action à un prix " K " dans trois mois (il s'agit donc de déterminer le prix d'une option sur " S ", de prix d'exercice " K " et d'échéance 3 mois).

Il est clair que l'acheteur d'un tel droit ne l'exercera que si, dans trois mois, le prix de l'action sur le marché est supérieur à " K ", il pourra alors acheter à " K " revendre au prix courant et réaliser un bénéfice égal à la différence. Cette option donne donc un paiement, dans trois mois, égal à la différence entre le prix courant de l'action et " K ", si cette dernière est positive, et nul, sinon.

Le principe de la théorie de l'arbitrage est très simple, il stipule l'absence d'opportunités d'arbitrage : il n'est pas possible, à partir d'un investissement nul aujourd'hui, de se garantir un paiement positif à une date ultérieure quoiqu'il arrive (on n'a rien pour rien).

Le principe d'absence d'opportunités d'arbitrage ne signifie pas qu'a posteriori des gains miraculeux sont impossibles. En effet, je peux très bien emprunter le prix d'un billet de loterie et acheter un tel billet (mon apport personnel est donc nul), puis gagner 1 000 000 FF, rembourser mon emprunt et dégager un bénéfice énorme. Le principe énonce seulement qu'un tel bénéfice ne saurait être garanti a priori.

Ainsi, l'absence d'opportunités d'arbitrage, signifie tout simplement que tout gain supérieur au rendement d'un actif sans risque de référence (taux d'intérêts, obligations, bons du trésor...) est nécessairement lié à un risque. Les SICAV, par exemple, ont un rendement moyen supérieur à celui du marché monétaire, cependant ce rendement n'est pas garanti et peut très bien, par moments, passer en dessous de celui du marché monétaire.

Supposons à présent, pour simplifier le problème, que le marché ne fonctionne qu'à deux dates, aujourd'hui et dans trois mois, que le taux d'intérêt sur le marché est de " r " et que l'action dans trois mois ne pourra prendre que deux valeurs " S_h " et " S_b ". Supposons de plus que " K " est compris entre " S_h " et " S_b ", où " S_h " désigne la valeur haute et " S_b " la valeur basse. Le

paiement associé à l'option est alors de "Sh-K" ou "0" suivant que la valeur haute ou la valeur basse se réalise. Il est assez facile alors de montrer qu'un tel paiement peut également être obtenu en se constituant un portefeuille ne comportant que des actions et des placements (ou prêts) sur le taux d'intérêt. Soit "C" le coût de constitution d'un tel portefeuille, alors le prix de l'option doit être égal à "C". En effet, supposons que cela ne soit pas le cas (par exemple, "C" inférieur strictement au prix de l'option), constituons ce portefeuille et vendons l'option, cette opération nous assure un gain strictement positif, plaçons alors ce gain sur le taux d'intérêt, notre bilan est alors nul. Dans trois mois, le paiement du portefeuille et de l'option s'égalisent exactement et mon bilan est nul, mais il me reste mon placement. Je me suis donc garanti un paiement strictement positif avec un investissement nul, cela est contraire au principe de non-arbitrage. Le cas où "C" est strictement supérieur au prix de l'option se traite de façon symétrique.

En fait, "C" peut être caractérisé de façon plus précise. On montre que "C" est une moyenne pondérée des paiements actualisés (c'est à dire, divisés par " $1+r$ ") de l'option et que les poids de cette moyenne sont tels que "S" est, lui même, une moyenne pondérée des paiements actualisés de l'action avec les mêmes poids. Plus précisément, on montre, dans ce modèle simple, qu'il existe une loi de probabilité telle que le prix de tout actif est égal à l'espérance actualisée de ses paiements futurs.

Dans la pratique, la connaissance de la loi (aléatoire) d'évolution des taux d'intérêts et des cours de l'action, permet de déterminer la probabilité en question. Les paiements de l'option, à échéance, étant connus, il suffit alors de calculer leur espérance actualisée relativement à cette loi de probabilité pour déterminer le prix de l'option.

Dans un modèle en temps continu, le cours de l'action est modélisé par un processus de diffusion, c'est à dire que le cours est supposé évoluer avec un taux de rendement moyen auquel s'ajoute un terme aléatoire de moyenne nulle et d'amplitude propre à l'actif considéré (volatilité). Le théorème de Girsanov nous donne alors la loi de probabilité faisant des prix actualisés de cet actif une martingale. Le prix de l'option apparaît alors comme solution d'une équation aux dérivées partielles qui, après changement de variables, se trouve être l'équation bien connue de diffusion de la chaleur. Il est alors possible de résoudre "explicitement" cette équation et de déterminer le prix de l'option en fonction de ses propres caractéristiques (échéance, prix d'exercice) ainsi que du cours de l'action et de sa volatilité : c'est la formule de Black et Scholes. Le résultat est d'autant plus surprenant qu'il est indépendant du

rendement moyen de l'action. Cela signifie que le marché ne rétribue que le risque (la volatilité) et non pas la partie certaine qui n'est là que pour compenser ce risque.

Il est inutile de préciser que cette formule et ses dérivées sont utilisées sur toutes les places financières du monde un nombre incalculable de fois par jour. Programmées sur tous les ordinateurs des salles de marché, elles sont l'exemple même du lien possible entre haute sophistication mathématique et applications immédiates.

D'une manière plus générale, le principal résultat qui se dégage de ces modèles est qu'un processus de prix compatible avec l'absence d'arbitrage est, moyennant une normalisation appropriée, une martingale pour au moins une loi de probabilité (appelée mesure-martingale) équivalente à la loi de probabilité initiale. La théorie de l'évaluation par arbitrage en découle. Les actifs contingents peuvent être évalués en considérant la valeur espérée de leurs paiements futurs par rapport à l'une des mesure-martingales. Si cette valeur est indépendante du choix de la mesure-martingale, l'actif est dit évalué par arbitrage. En d'autres termes, la valeur trouvée est la seule que l'on puisse assigner à l'actif sans engendrer des opportunités d'arbitrage.

4 Des questions demeurent

Deux questions se posent cependant. Tout d'abord, que devient la caractérisation de l'absence d'opportunité d'arbitrage dans un modèle comportant certaines imperfections? Ensuite, quelle signification attribuer à la valeur espérée des paiements futurs d'un actif lorsque les différentes mesure-martingales (ou ce qui en tient lieu) ne conduisent pas à la même valeur?

La seconde question est certainement la plus intéressante, puisqu'elle est en aval de la première. Elle concerne l'aspect opérationnel de l'évaluation. Que faire des mesure-martingales obtenues? En fait, il apparaît que l'ensemble des valeurs espérées des paiements futurs d'un actif donné sous les différentes mesure-martingales constitue l'intervalle des prix admissibles pour l'actif, c'est-à-dire l'intervalle des prix compatibles avec l'absence d'opportunités d'arbitrage. La borne supérieure de cet intervalle de prix constitue le prix minimal de couverture de l'actif. En général, cette couverture optimale ne coïncide pas avec la duplication (Bensaid et *al.*, 1992). En d'autres termes, la duplication peut s'avérer plus coûteuse qu'une sur-couverture. Ce résultat s'illustre aisément si l'on pense au problème de la couverture d'un actif sur

un horizon suffisamment court pour que ses variations ne puissent en aucun cas couvrir les coûts de transaction qui y sont attachés. Il vaut mieux surcouvrir une position courte sur cet actif en achetant une quantité suffisante d'actif sans risque plutôt qu'en achetant de l'actif lui-même. De plus, toute fourchette de prix à l'intérieur de cet intervalle est une fourchette de prix d'équilibre dans une économie bien choisie peuplée d'agents ayant des relations de préférences continues, strictement croissantes et convexes. Ainsi, cet intervalle de prix constitue le meilleur encadrement de la fourchette de prix de l'actif si l'on ne possède pas d'information supplémentaire sur les relations de préférence des agents.

5 Quelques éléments de réponse

Dans cette section, nous allons considérer un modèle analogue à celui de Harrison et Kreps (1979) mais dans lequel nous incorporerons divers types d'imperfections. Afin de donner une intuition des résultats obtenus, nous allons commencer par caractériser l'absence d'opportunité d'arbitrage dans le cadre d'exemples simples.

5.1 Exemples élémentaires

Dans les deux exemples qui suivent nous allons tenter d'illustrer, pour le premier d'entre eux, la caractérisation de l'absence d'opportunité d'arbitrage et, pour le second, le lien entre les mesure-martingales et les bornes sur les prix admissibles.

5.1.1 Un modèle déterministe

Considérons un univers déterministe dans lequel deux actifs peuvent être échangés entre la date 0 et la date T . On suppose qu'il n'y a consommation qu'à la date initiale et à la date finale, que l'actif 1 a un prix constant égal à 1 et qu'il n'est soumis à aucune contrainte ni coût de transaction. Si l'actif 2 n'est soumis, lui non plus, à aucune contrainte, son prix devra être constant. En effet, si son prix en t est supérieur (resp. inférieur) à son prix en $t' > t$, alors il suffit de vendre à découvert une quantité arbitrairement grande de l'actif 2 (resp. de l'actif 1) en t , d'acheter de l'actif 1 (resp. de l'actif 2) pour le même montant et de solder la position à découvert en t' . L'investisseur réalise

alors dans tous les cas un profit arbitrairement grand. Les seuls processus de prix pour l'actif 2 excluant de telles opportunités d'arbitrage sont alors les processus constants.

Supposons à présent, que l'actif 2 ne peut être vendu à découvert. Le raisonnement précédent permet encore de démontrer que le prix en t de l'actif 2 ne peut être inférieur au prix en t' pour $t' > t$. En revanche, le raisonnement symétrique ne s'applique plus puisqu'il n'est plus possible de vendre à découvert de l'actif 2. Ainsi, les processus de prix excluant les opportunités d'arbitrage sont-ils, à présent, les processus décroissants.

Supposons, enfin, que l'actif 2 peut être vendu à découvert mais qu'il est soumis à des coûts de transaction ou, plus généralement, à une fourchette acheteur-vendeur. Soit $Z(t)$ le prix auquel l'agent peut acheter de l'actif 2 à la date t et $Z'(t)$ le prix auquel il peut le vendre. Le raisonnement précédent permet de montrer que l'on ne peut avoir ni $Z'(t') > Z(t)$ ni $Z(t') < Z'(t)$. Cette propriété est équivalente à l'existence d'une constante z telle que pour tout t , $Z'(t) \leq z \leq Z(t)$, ou encore à l'existence d'un processus de prix constant compris entre les prix acheteur et vendeur. Aucun des deux processus n'a pour autant besoin d'être constant ou monotone.

5.1.2 Un modèle à deux dates et deux états du monde

Soit un univers à deux dates, 0 et 1, et deux états du monde, "haut" et "bas", équiprobables. Deux actifs peuvent être échangés : une obligation de prix normalisé constant égal à 1, et une action de prix $S_0 = 100$ à la date 0 et de prix $S_h = 110$ dans l'état "haut" et $S_b = 90$ dans l'état "bas". Considérons à présent une option d'achat et une option de vente sur cette action, de même prix d'exercice égal à 100. L'option d'achat (resp. de vente) paye donc 10 dans l'état "haut" (resp. "bas") et 0 dans l'état "bas" (resp. "haut").

S'il n'y a pas d'imperfections sur le marché, la probabilité $(1/2, 1/2)$ sur les états terminaux est la seule pour laquelle le prix de chaque actif à la date 0 est égal à l'espérance de son prix à la date 1. L'option d'achat comme l'option de vente devraient alors avoir pour prix la moyenne de leurs paiements futurs, soit un prix de 5. Le même résultat peut être obtenu en remarquant qu'en achetant (resp. vendant à découvert) $1/2$ action et en vendant à découvert 45 (resp. achetant 55) obligations, on obtient un profil terminal identique à celui d'une option d'achat (resp. de vente) à un coût de 5.

Si, à présent, l'action ne peut plus être vendue à découvert, il est encore possible de couvrir l'option d'achat avec un montant de 5. En revanche, la

stratégie de couverture de l'option de vente n'est plus possible. La stratégie la moins chère garantissant un paiement terminal au moins égal à celui de l'option de vente dans tous les états de la nature consiste alors à acheter 10 obligations et coûte donc 10. Ainsi, la stratégie la moins chère garantissant au moins 0 dans l'état "haut" et 10 dans l'état "bas" garantit en fait 10 dans chacun des deux états. Il est alors possible de trouver des agents rationnels acceptant de payer l'option de vente à des prix arbitrairement proches de 10. Lorsque le prix est 10, les agents préfèrent acheter 10 obligations plutôt que l'option de vente en raison de la stricte monotonie des fonctions d'utilité. Les probabilités pour lesquelles le prix de l'action est une sur-martingale s'identifient alors aux probabilités pour lesquelles l'état "haut" est moins probable que l'état "bas". Le supremum des valeurs espérées des paiements de l'option de vente est de 10 alors qu'il n'est que de 5 pour l'option d'achat. Remarquons enfin qu'un portefeuille constitué d'une option de vente et d'une option d'achat se comporte comme 10 obligations et qu'il coûte donc 10 alors que la somme des prix des éléments qui le composent est de 15. Ainsi apparaît le caractère non-linéaire des fonctions d'évaluation en présence d'imperfections.

5.2 Un modèle général

Considérons une économie multi-périodique dans laquelle les consommateurs peuvent échanger $L + S$ actifs financiers à toute date $t \in \mathcal{T}$, avec $\mathcal{T} \subset [0, T]$ ($\mathcal{T}$ peut être aussi bien discret que continu). Ces actifs ont à chaque date $t < T$ un prix d'achat et un prix de vente, et délivrent en T une quantité contingente d'unités de consommation. De plus, les L premiers actifs ne pourront être détenus en quantité négative tandis que les S suivants ne pourront être détenus en quantité positive. La signification de ce second type de contraintes n'est pas immédiate. Ces contraintes permettent cependant d'unifier différents problèmes. En effet, si un actif n'est soumis à aucune contrainte, il suffit de le faire apparaître deux fois: la première parmi les actifs soumis à la contrainte de positivité et la seconde parmi les autres actifs. Si un actif peut être vendu à découvert moyennant un certain coût en terme de rendement, il suffit de le faire apparaître parmi les actifs qu'il est interdit de vendre à découvert ainsi que de faire apparaître un actif fictif dont le processus de prix incorpore les coûts de vente à découvert parmi les actifs soumis à la contrainte de négativité de la quantité détenue.

Plus précisément, soient Z' et Z deux processus de dimension $L + S$

représentant les prix de vente et d'achat des $L + S$ actifs.

Outre des hypothèses techniques concernant ces processus, on suppose que le prix du premier actif est normalisé à 1, et que cet actif n'est soumis à aucun coût de transaction (*i.e.* $Z_1 = Z'_1 = 1$). Le taux d'intérêt emprunteur est supposé être différent du taux prêteur. Ce dernier point est modélisé par l'existence d'un actif, parmi ceux qui sont soumis à la condition de négativité (par exemple, l'actif $L + 1$), tel que $Z_{L+1}(t) = Z'_{L+1}(t) = \exp(\int_0^t r(s)ds)$, où r est un processus positif borné. Le processus r représente en fait le processus de taux emprunteur instantané. Par l'absence d'opportunités d'arbitrage, ce taux doit être, à chaque instant, supérieur au taux prêteur instantané. En raison de la normalisation effectuée sur l'actif 1, le taux prêteur instantané est nul, et la condition sur r est donc bien une condition de positivité.

On dira que le marché présente une opportunité d'arbitrage faible s'il est possible, à partir de stratégies auto-financées portant sur les différents actifs présents sur le marché et respectant les contraintes du modèle, de faire mieux que des actifs arbitrairement proches d'un actif positif dans tous les états du monde et non nul à un prix arbitrairement proche de zéro.

En présence d'imperfections, comme nous l'avons déjà signalé, il n'est plus vrai que la façon la moins chère d'obtenir à la date T au moins autant que le revenu d'un actif donné consiste à dupliquer cet actif ou à s'en approcher. Nous définissons donc la fonctionnelle de prix $\pi(x)$ comme étant le coût limite minimum d'une suite de stratégies permettant de dominer des actifs arbitrairement proches de x . Cette fonctionnelle définit donc le prix de meilleure couverture ou de couverture parfaite optimale.

Nous pouvons à présent énoncer l'équivalence entre

1. *Le modèle n'admet pas d'opportunité d'arbitrage faibles.*
2. *Il existe une probabilité P^* équivalente à P et un processus Z^* tels que $Z' \leq Z^* \leq Z$, $Z_0^* = \exp(\int_0^t r_0(s, \omega)ds)$ avec $0 \leq r_0(t, \omega) \leq r(t, \omega)$ et pour lesquels $\frac{1}{Z_0^*}(Z_1^*, \dots, Z_L^*)$ est une sur-martingale et $\frac{1}{Z_0^*}Z_{L+1}^*, \dots, Z_{L+S}^*$ est une sous-martingale.*

Par ailleurs, $\pi(x) = \sup Z_0^*(0)E^*(x/Z_0^*(T))$ pour Z_0^* et P^* tels que dans (2).

En d'autres termes, ce théorème énonce que l'absence d'arbitrage dans un marché soumis à des frictions est équivalente à l'existence d'une mesure-martingale, tout comme dans les marchés sans frictions, pour laquelle un

processus compris entre les processus de prix acheteur et vendeur, normalisé par un numéraire défini par un taux d'intérêt instantané compris entre les taux prêteur et emprunteur, est une martingale, une sur-martingale ou une sous-martingale en fonction des contraintes imposées sur les quantités détenues en portefeuille.

En particulier, s'il n'y a ni coûts de transaction, ni écart entre les taux prêteur et emprunteur, mais uniquement des contraintes sur les ventes à découvert, le théorème énonce que l'absence d'opportunité d'arbitrage est équivalente à l'existence d'une mesure-martingale pour laquelle le processus de prix est une sur-martingale. Ce résultat n'est pas surprenant puisque, dans ce cas, l'agent va chercher à réaliser un arbitrage en vendant des quantités arbitrairement grandes de l'actif en question, mais il ne pourra le faire en raison de la contrainte imposée.

Ce résultat ne se contente cependant pas de caractériser l'absence d'arbitrage, puisqu'il donne le prix minimal de couverture parfaite de tout actif comme étant égal au maximum des espérances des paiements de cet actif par rapport aux différentes mesure-martingales caractérisant l'absence d'opportunité d'arbitrage, après actualisation par le numéraire correspondant. En particulier, si l'unique imperfection est due à un écart entre les taux prêteur et emprunteur, le prix de couverture parfaite est le maximum des espérances du paiement terminal actualisé par tous les processus de taux de rendement instantané compris entre les taux prêteur et emprunteur.

6 Un exemple d'application : les coûts de vente à découvert

Le modèle général de la section précédente permet également de prendre en compte les situations où les ventes à découvert sont possibles mais coûteuses. Ceci est le cas, par exemple, des obligations d'Etat où la vente à découvert implique un échange avec un actif collatéral et l'engagement de réaliser l'opération inverse à une date fixée. La différence de rendement entre l'actif de départ et le collatéral représente alors un coût de vente à découvert et dépend de la nature des actifs. Ce coût s'exprime donc en termes de rendement.

Considérons, à présent, un modèle en temps continu sur $[0, T]$, où les prix des actifs suivent des processus de diffusion. Afin de simplifier le problème,

supposons qu'il n'y a que deux actifs : un actif risqué et un actif (localement) sans risque. Afin de modéliser l'écart entre les taux prêteur et emprunteur, nous allons dédoubler l'actif sans risque en un actif pour lequel les positions ne peuvent être que longues et un autre actif pour lequel les positions ne peuvent être que courtes. La même opération est effectuée pour l'actif risqué afin de tenir compte d'éventuels coûts de vente à découvert. Enfin, nous allons supposer l'existence d'une unique source de risque modélisée par la donnée d'un mouvement brownien $W(t)$, et nous nous intéresserons à l'évaluation d'actifs dérivés dont le paiement final est une fonction de la valeur terminale de l'actif risqué.

Formellement, les processus long et court de l'actif risqué sont donnés par Z_L et Z_C tels que $\frac{dZ_L}{Z_L} = \mu_L dt + \sigma_L dW(t)$ et $\frac{dZ_C}{Z_C} = \mu_C dt + \sigma_C dW(t)$ où les paramètres μ et σ sont des fonctions de $Z_L(t)$ et de t . On note respectivement r_P et r_E , fonctions de $Z_L(t)$ et de t , les taux instantanés auxquels l'agent peut placer et emprunter.

En écrivant les conditions d'absence d'opportunité d'arbitrage on obtient qu'il y a absence d'opportunité d'arbitrage s'il existe un processus de taux r_0 tel que $r_P \leq r_0 \leq r_E$ et $\frac{\mu_L - r_0}{\sigma_L} \leq \frac{\mu_C - r_0}{\sigma_C}$ pour tout $t \in [0, T]$.

Moyennant certaines hypothèses techniques, on obtient alors que le prix optimal de couverture d'un actif qui verse un revenu terminal $h(Z_L(T))$ est donné par $V(Z_L(0), 0)$ où V est déterminé par l'équation aux dérivées partielles non-linéaire suivante :

$$\begin{aligned} r_P V = & \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_L^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + r_P x \frac{\partial V}{\partial x} \\ & + \eta \sigma_L x \left[\frac{\partial V}{\partial x} \right]^- + \delta_r \left[V - x \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^+ + x \frac{\sigma_L}{\sigma_C} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^- \right]^- \end{aligned}$$

et par la condition au bord

$$V(x, T) = h(x)$$

où $\eta = \frac{\mu_C - r_P}{\sigma_C} - \frac{\mu_L - r_P}{\sigma_L}$ et $\delta_r = r_E - r_P$.

De plus, la stratégie optimale de couverture consiste alors à avoir, à chaque instant, une position longue de $\Delta_L = \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^+$ en actif risqué et une position courte de $\Delta_C = -\frac{\sigma_L Z_L}{\sigma_C Z_C} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^-$ dans le même actif. Le surplus (éventuel) $(\Delta_0)^+ = [V - Z_1 \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^+ + Z_1 \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^-]^+$ est alors investi en actif sans risque au taux r_P et le déficit (éventuel) est financé par un emprunt de $(\Delta_0)^- = [V - Z_L \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^+ + Z_L \frac{\sigma_L}{\sigma_C} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^-]^-$ au taux r_E .

Remarquons qu'un raisonnement heuristique aurait pu nous conduire à l'équation aux dérivées partielles précédente en V . En effet, V désigne la valeur de la stratégie optimale et le signe de $\frac{\partial V}{\partial x}$ nous indique si la stratégie est longue ou courte en l'actif risqué: si $\frac{\partial V}{\partial x} > 0$ on a une position longue puisque la valeur augmente avec le prix de cet actif. De manière symétrique, si $\frac{\partial V}{\partial x} < 0$ on a une position courte. Dans le premier cas, si le taux d'intérêt est r_0 , le prix du risque pour une position longue en l'actif risqué est $-\frac{\mu_L - r_0}{\sigma_L}$, et le rendement espéré de l'actif risqué sous la probabilité risque-neutre est égal au taux sans risque. Dans le second cas, le prix du risque pour une position courte est $-\frac{\mu_C - r_0}{\sigma_C}$ et le rendement espéré relativement à la probabilité risque-neutre est égal au taux sans risque augmenté du coût (en terme de rendement) $\sigma_L(\frac{\mu_C}{\sigma_C} - \frac{\mu_L}{\sigma_L})$ d'une position à découvert en actif risqué. Le taux r_0 est alors égal au taux emprunteur si le portefeuille de couverture engendre un déficit et au taux prêteur s'il engendre un surplus. L'équation de Black et Scholes (1973) écrite avec les valeurs correspondant aux différentes situations précédentes conduit à l'équation ci-dessus.

7 Synthèse et recommandations

Par delà ces quelques exemples, le point de départ de la plupart des modèles en économie est l'individu et il s'agit de décrire le comportement de ce dernier face à un certain nombre de paramètres qui lui sont extérieurs et qui peuvent être endogènes ou exogènes au modèle. Une telle modélisation passe généralement par la description d'un espace d'actions possibles pour cet individu et par une fonction d'évaluation des conséquences de ces actions. Cette dernière sera alors fonction des actions retenues ainsi que des paramètres extérieurs et le but de l'individu sera de maximiser ou de minimiser cette fonction.

Différents concepts d'équilibre s'en suivent alors :

- équilibre concurrentiel dans le cas où le seul paramètre extérieur est l'ensemble des prix de marché et où l'on recherche le système de prix conduisant à une égalité entre l'offre et la demande ;
- équilibre de Nash où les actions des autres individus font partie des paramètres à prendre en compte pour un individu donné et où l'on recherche un système d'actions individuelles telles qu'aucun individu n'ait intérêt à dévier unilatéralement de l'action retenue ;
- équilibres de Radner, à anticipations rationnelles,...

L'objet des modèles est alors de caractériser ces équilibres et la difficulté fondamentale inhérente à ces modèles est la non-observation des fonctions individuellement maximisées par les différents agents de l'économie considérée. Tout au plus peut-on d'une part observer les actions retenues par les individus et d'autre part définir un certain nombre de règles comportementales permettant d'axiomatiser le comportement individuel ou encore de contraindre l'espace des fonctions d'évaluation possibles en leur imposant de vérifier un certain nombre de propriétés : monotonie, convexité...

Le point commun de ces règles comportementales est qu'elles conduisent généralement à des conditions globales sur les fonctions d'évaluation et non pas à des contraintes locales. Les problèmes mathématiques qui en résultent sont alors des problèmes d'optimisation, de caractérisation de solution, de caractérisation d'espaces d'états, de description de dynamiques qui soient compatibles avec ces contraintes globales. Il s'agit alors de problèmes non-classiques dans le champ des mathématiques, champ dans lequel les problèmes sont la plupart du temps abordés dans leur dimension locale (quitte à passer par la suite au global) : ici l'analyse ne peut se faire la plupart du temps que dans son cadre naturel initial global.

La principale conséquence de cette caractéristique fondamentale des modèles économiques est dans le recours nécessaire à des outils issus de la géométrie alors que l'on s'attendrait dans ce genre de problèmes à avoir plus souvent recours à l'analyse. Géométrie différentielle, géométrie algébrique, topologie différentielle, calcul différentiel extérieur sont des outils fréquemment utilisés dans l'analyse économique. Même dans le cadre présenté plus haut de la théorie de l'arbitrage, les problèmes mathématiques rencontrés qui relèvent à première vue de la théorie des probabilités et du contrôle stochastique s'avèrent avoir des liens étroits avec des problèmes géométriques de déformation de volume selon les lignes de courbure (problèmes rencontrés également en méso-physique dans la modélisation de la fonte d'un glaçon). Ces outils ne sont cependant pas suffisamment adaptés à cette analyse car s'ils permettent de traiter des problèmes « globaux » (par opposition à « locaux »), les conclusions auxquelles ils conduisent sont souvent difficilement testables et rarement quantifiables. Or tel est le défi posé à l'économiste théoricien : proposer des conséquences quantifiables (ou qui puissent du moins être calées sur des observations) à partir de modèles où la structure première (le comportement de l'individu ou plus précisément les règles implicites qui dictent son comportement) n'est ni quantifiable ni même observable.

Il est à signaler que la quantification pose, par ailleurs, des problèmes spé-

cifiques qui viennent s'ajouter à ceux de la modélisation. D'un point de vue empirique, elle conduit à des questions de nature statistique et économétrique intéressantes. En effet, l'économiste est alors confronté au problème de l'identification des paramètres pertinents du point de vue de la question abordée et à celui de l'estimation de ces paramètres de manières directe si ces derniers sont observables ou (ce qui est le cas le plus fréquent) de manière indirecte lorsque l'on ne peut observer que des variables « dérivées ». D'un point de vue numérique, le problème de la quantification conduit également à des questions intéressantes. En raison de la démarche globale adoptée, l'espace des variables est souvent un espace de « grande » dimension (même dans des versions paramétriques de ces modèles) et les équations obtenues (équations aux dérivées partielles, conditions d'optimalité, équations fonctionnelles, inégalités variationnelles...) nécessitent la mise en place de méthodes spécifiques à ces grandes dimensions.

Le défi ainsi posé à l'économiste et qui résulte à la fois des spécificités de la modélisation et des difficultés posées par la quantification n'est pas perdu pour autant car ces 30 dernières années ont donné lieu à de nombreuses percées dans l'analyse des interactions économiques, stratégiques et sociales avec des applications allant de la géographie politique aux phénomènes de modes, de l'analyse des krachs boursiers à celle des phénomènes de ségrégation raciale, de l'analyse de la croissance des villes à celle des négociations stratégiques. Il a fallu pour cela faire appel aux outils brièvement présentés ci-dessus mais également les adapter, les rendre effectifs. Il a fallu également emprunter des idées et des modèles à d'autres sciences et l'analyse des phénomènes de percolation en physique méso-scopique n'est pas sans avoir des liens étroits avec l'analyse des interactions sociales.

Il est, à ce propos, extrêmement instructif de remarquer que les résultats obtenus touchent certes à différents champs des mathématiques mais de façon surprenante font apparaître des liens non triviaux entre différentes disciplines appliquées : liens entre problèmes de choix économiques et problèmes de transports de masse, entre problèmes de couverture de risques financiers et problèmes de fonte de glaçons... De même, le choix de modélisations stratégiques avec contraintes de type « globales » et donc a priori peu parlantes du point de vue de l'analyste ont fait apparaître de manière naturelle des spécifications analytiques inattendues : l'utilisation du mouvement brownien dans la modélisation des prix des actifs financiers serait la conséquence naturelle des interactions stratégiques entre teneurs de marché, l'utilisation de courbes en « S » dans la modélisation de la propagation

d'un phénomène (ou d'un produit) nouveau serait la conséquence naturelle de l'interaction stratégique d'un grand nombre d'individus soumis à des phénomènes de «mode».

Toutes ces questions sont connexes de théories au nom un peu trop galvaudé et que je ne cite donc qu'avec beaucoup de circonspection : théorie du chaos, théorie de la complexité, théorie des catastrophes, théorie de la percolation. Il ne s'agit pas pour autant de chercher des vertus universelles à une théorie donnée mais il me semble que de manière sous-jacente à toutes ces théories il y a une question universelle : comment analyser et obtenir des conclusions opérationnelles dans des modèles soumis à des contraintes de type géométrique et global ? Loin d'être de nature philosophique, cette question est régulièrement posée dans les modèles économiques et trouve des réponses plus ou moins appropriées par l'utilisation des outils mathématiques existants. Le développement de techniques d'analyse appropriées à cette question me semble être un enjeu majeur pour l'économiste théoricien et il me semble qu'il y a là un champ de réflexion important pour le mathématicien. Sur le plan intellectuel, cette réflexion se trouve être souvent gratifiante car elle conduit à des rapprochements inattendus entre théories d'origines fort différentes.

La formation mathématique me semble donc être indispensable à l'économiste qui souhaite comprendre les raisons profondes des phénomènes observés. Bien sûr, une telle formation devra être adaptée à l'objectif poursuivi, en l'occurrence former un économiste. Elle ne devra donc pas être trop aride et devra s'appuyer sur des exemples et illustrations issues de la théorie économique.

Par ailleurs, la théorie économique dispose désormais de suffisamment de modèles pour pouvoir illustrer des théories mathématiques aussi différentes que l'analyse convexe, les équations différentielles ou aux dérivées partielles, les probabilités, le calcul des variations, le contrôle optimal déterministe ou stochastique, la géométrie différentielle, la géométrie algébrique, la topologie différentielle, l'analyse fonctionnelle,...

La théorie économique peut donc également être mobilisée dans la formation même du mathématicien et dans bien des cas se substituer à d'autres disciplines plus classiques (telles que la physique) pour illustrer des théories, inspirer des développements, contribuer à des rapprochements fructueux.

Pour les mathématiciens qui ont l'occasion de se pencher sur des modèles économiques c'est toujours une surprise de découvrir pour la première fois que des explications rationnelles ou des conclusions opérationnelles peuvent

être apportées à des problèmes dont la nature semble a priori peu "mathématisable" en raison de leur caractère trop humain. Cette surprise pourrait certainement être utilisée de manière plus efficace pour attirer davantage de jeunes vers les études scientifiques.

Les liens historiques et forts entre mathématiques et sciences physiques sont incontestables et incontestés. La théorie financière nous enseigne cependant au titre de ses règles les plus élémentaires à diversifier les investissements en d'autres termes à ne pas mettre tous ses oeufs dans le même panier. La science économique apparaît dans le cadre de l'investissement mathématique comme une source de diversification tout à fait crédible.

References

- [1] Apery, R. & al., 1982, *Penser les mathématiques*, ouvrage collectif, séminaire de philosophie et mathématiques de l'Ecole Normale Supérieure, Editions du Seuil, Paris.
- [2] Bensaid, B., Lesne, J.P., Pagès, H., et J. Scheinkman, "Derivative asset pricing with transaction costs," *Mathematical Finance* (1992), 2, 63-86.
- [3] Black, F., et M. Sholes, "The pricing of options and corporate liabilities," *Journal of Political Economy* (1973), 81, 637-54.
- [4] Debreu, G., *Theory of Value*, New York, Wiley, 1959.
- [5] Figlewski, S., "Options arbitrage in imperfect markets," *Journal of Finance* (1989), 44, p. 1289-1311.
- [6] Harrison, J. et D. Kreps, "Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets," *Journal of Economic Theory* (1979), 20, p. 381-408.
- [7] Ross, S., "Arbitrage and martingales with taxation," *Journal of Political Economy* (1987), 95, p. 371-393.
- [8] Walras, L., 1874, *Eléments d'économie politique pure ou théorie de la richesse sociale*, Corbaz, Lausanne, édition définitive revue et augmentée par l'auteur, LGDJ, Paris, 1952,