Université de Paris Dauphine **Année 2004-2005**

Équations différentielles

4. Convergence du schéma numérique "Euler explicite".

Fixons $y_0 \in \mathbb{R}^d$ et considérons l'approximation numérique du problème de Cauchy

$$y' = f(y), \quad y(0) = y_0 \tag{1}$$

grâce au schéma d'Euler explicite . Pour $\Delta > 0$ fixé, on construit la suite (y_n) par récurrence

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta} = f(y_n),$$

puis on pose $y_\Delta(t) = y_n$ pour tout $t \in [n\Delta, (n+1)\Delta]$. On définit de la sorte $y_\Delta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^d$ une fonction constante par morceaux.

Théorème. *On suppose $f \in C^1$ et $|f(y)| \le A\,(1 + |y|)$ pour tout $y \in \mathbb{R}^d$. La solution y associée est donc globale. Pour tout $T > 0$ on définit*

$$C_T := e^{A\,T}\,(|y_0| + 1), \quad L_T := \sup_{u \in \mathbb{R}^d,\, |u| \le C_T} |\nabla f(u)|.$$

Il existe une constante A_T (on peut prendre $A_T := A\,(1 + C_T) + 2\,C_T\,e^{T\,L_T}$) telle que

$$\forall\,\Delta > 0 \qquad \sup_{t \in [0,T]} |y(t) - y_\Delta(t)| \le A_T\,\Delta.$$

Ainsi, pour $\Delta > 0$ petit, y_Δ est une bonne approximation de la solution exacte y.

Étape 1. Posons $u_n := |y_n|$. On a donc

$$u_{n+1} \le u_n + \Delta\,A\,(1 + u_n) \le e^{\Delta\,A}\,u_n + \Delta\,A \qquad \forall\,n \in \mathbb{N}$$

Lemme (de Gronwall discret). *Si (v_n) satisfait $v_{n+1} \le (1 + \theta)\,v_n + K$ ou seulement $v_{n+1} \le e^\theta\,v_n + K$ pour tout n alors par récurrence*

$$v_n \le e^{n\,\theta}\,v_0 + K \sum_{k=0}^{n-1} e^{k\,\theta} = e^{n\,\theta}\,v_0 + K\,\frac{e^{n\,\theta} - 1}{e^\theta - 1}$$

On déduit du lemme de Gronwall discret que

$$u_n \leq e^{n\,\Delta\,A}\,u_0 + \frac{A\,\Delta}{e^{A\,\Delta}-1}\,(e^{n\,\Delta\,A}-1) \leq e^{n\,\Delta\,A}\,(u_0+1),$$

et donc $|y_\Delta(t)| \leq e^{A\,T}\,(|y_0|+1)$ pour tout $t \in [0,T]$ et tout $\Delta > 0$. De la même manière, en utilisant la version continue du Lemme de Gronwall il vient $|y(t)| \leq e^{A\,T}\,(|y_0|+1)$ pour tout $t \in [0,T]$.

Étape 2. On définit $\varepsilon_n := |y_n - y(n\Delta)|$. On a pour tout n tel que $n\,\Delta \leq T$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{n+1} &= \left| y(n\Delta) + \Delta\,f(y(n\Delta)) + \int_{n\Delta}^{(n+1)\Delta} [f(y(s)) - f(y(n\Delta))]\,ds - y_n - \Delta\,f(y_n) \right| \\
&\leq (1 + L_T\,\Delta)\,\varepsilon_n + \eta, \qquad \int_{n\Delta}^{(n+1)\Delta} [f(y(s)) - f(y(n\Delta))]\,ds \leq \Delta^2\,L_T\,(2\,C_T) =: \eta
\end{aligned}$$

En appliquant le lemme de Gronwall discret il vient

$$\varepsilon_n \leq e^{(n\,\Delta)\,L_T}\,\varepsilon_0 + \Delta^2\,L_T\,(2\,C_T)\,\frac{e^{n\,\Delta\,L_T}-1}{e^{L_T\,\Delta}-1} \leq \Delta\,2\,C_T\,e^{n\,\Delta\,L_T}.$$

On en déduit que pour tout $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_\Delta(t) := |y(t) - y_\Delta(t)| &\leq |y(t) - y(\Delta\,[t/\Delta])| + \varepsilon_{[t/\Delta]} \\
&\leq \int_{\Delta\,[t/\Delta]}^{\Delta\,([t/\Delta]+1)} f(y(s))\,ds + \varepsilon_{[t/\Delta]} \\
&\leq \Delta \left\{ \sup_{u \in \mathbb{R}^d,\,|u| \leq C_T} |f(u)| + 2\,C_T\,e^{T\,L_T} \right\} \quad \to \quad 0
\end{aligned}$$

lorsque $\Delta \to 0$.