UNIVERSITÉ DE VERSAILLES SAINT-QUENTIN
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

CONTRIBUTIONS À L'ÉTUDE MATHÉMATIQUE DE QUELQUES MODÈLES ISSUS DE LA PHYSIQUE STATISTIQUE HORS ÉQUILIBRE

Stéphane MISCHLER

Document de synthèse présenté le

12 DÉCEMBRE 2001

au Département de Mathématiques
de l'Université de Versailles Saint-Quentin
en vue de l'obtention du diplôme

d'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES EN MATHÉMATIQUES

devant le jury composé de MM.

Pierre DEGOND	Rapporteur
Laurent DESVILLETTES	
François GOLSE	
Otared KAVIAN	Président
Benoît PERTHAME	Présentateur
Jean-Pierre PUEL	
Mario PULVIRENTI	Rapporteur
J.J.L. VELAZQUEZ	

HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES
EN MATHÉMATIQUES

CONTRIBUTIONS À L'ÉTUDE MATHÉMATIQUE DE QUELQUES MODÈLES ISSUS DE LA PHYSIQUE STATISTIQUE HORS ÉQUILIBRE

Stéphane MISCHLER

LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES
UNIVERSITÉ DE VERSAILLES SAINT-QUENTIN
et CNRS - UMR 7641
BÂTIMENT FERMAT
45, AVENUE DES ÉTATS-UNIS
78035 VERSAILLES, FRANCE
Email: mischler@math.uvsq.fr

Mais la vache savait nager
nous dit Otared
(cela sera répété à Manolo)

Remerciements

L'essentiel des travaux présentés dans ce document de synthèse a été réalisé depuis que je suis maître de conférences au Département de Mathématiques de l'Université de Versailles à partir de 1996. Je remercie donc le Département de Mathématiques et le Laboratoire de Mathématiques Appliquées de Université de Versailles pour leur accueil. Je remercie également le DMA de l'Ecole Normale Supérieure de Paris qui m'a hébergé durant mon année de délégation au CNRS en 2000-2001. Mes remerciements vont aussi aux TMR européens "Equations cinétiques et applications" et "Equations hyperboliques" et au CNRS pour l'organisation de rencontres scientifiques et pour leur soutien financier, ainsi qu'aux Universités qui m'ont invité ces dernières années (en particulier, celle de Bilbao).

Je tiens à remercier en tout premier lieu Benoît Perthame qui a guidé mes premiers pas dans la recherche. Son influence sur ma conception des mathématiques (nécessairement appliquées) a été décisive. A ses côtés, j'ai pu apprécier son immense curiosité, son enthousiasme et sa grande exigence dans ses choix de sujets de recherche. Je le remercie pour l'attention qu'il a toujours portée à mes travaux, pour son soutien sans faille, pour sa gentillesse et sa générosité. C'est avec un grand plaisir que j'ai de nouveau collaboré avec lui cette dernière année.

Je remercie très sincèrement Mario Pulvirenti pour avoir accepté de rapporter sur cette Habilitation et pour le soin et la rapidité avec lesquels il s'est acquitté de cette tâche. Pour les mêmes raisons je remercie Pierre Degond, et je le remercie aussi pour m'avoir fait découvrir les très belles mathématiques des modèles cinétiques collisionnels.

Je remercie également Laurent Desvillettes, François Golse, Otared Kavian et Jean-Pierre Puel pour les discussions et collaborations que nous avons pu avoir et pour avoir accepté de faire partie du jury. Je remercie tout particulièrement J.J.L. Velazquez qui a effectué un voyage éclair Madrid-Paris-Madrid pour participer à ce jury et au contact duquel j'ai pu découvrir *une autre mathématique*.

Je ne voudrais pas manquer l'occasion qui m'est offerte ici pour exprimer toute ma reconnaissance et mon amitié à Miguel Escobedo et à Philippe Laurençot qui ont été, ces dernières années, mes collaborateurs privilégiés.

Je ne tenterai pas d'établir une liste des collègues avec qui j'ai pu échanger, et qui ont contribué à ma formation (permanente) scientifique. Je souhaite les remercier ici. Mes pensées vont tout spécialement aux personnels administratifs, aux enseignants et aux chercheurs de l'Université de Versailles et de l'Ecole Normale Supérieure, en particulier à Marie-France Thai et Benedicte Auffray, et à mes collaborateurs Manuel del Valle, Thierry Horsin, Antoine Mellet, Alexis Vasseur et Bernt Wennberg.

Table des matières

- Introduction -

Les équations de la physique statistique hors équilibre permettent de modéliser l'évolution au cours du temps d'un système (physique) constitué d'un grand nombre d'objets. Plus précisément, nous nous intéresserons ici à des équations qui proviennent de deux domaines distincts: les équations de la théorie cinétique des gaz (équations de Boltzmann, de Vlasov-Poisson, de Fokker-Planck) qui servent à décrire l'évolution de gaz de particules en <u>mouvement</u> d'une part, et les équations dites de coagulation-fragmentation (équations de Smoluchowski, de Becker-Döring, de Lifshitz-Slyozov) qui servent à décrire l'évolution de la <u>taille</u> d'agglomérats d'autre part. Désormais dans cette introduction, on nommera simplement "particules" les objets constituant notre système.

Dans tous les cas, ces particules sont supposées être correctement décrites par leur état $\xi \in \Xi$. Dans un cadre homogène en espace (les particules sont uniformément réparties dans l'espace), cet état peut donc être une vitesse ou impulsion (v ou $p \in \mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{Z}^d$), une énergie ($k = \mathcal{E}(p) \in \mathbb{R}_+$) pour les modèles cinétiques, et une taille ($y \in \mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{N}$) pour les modèles de coagulation-fragmentation. Dans un modèle plus réaliste, l'état ξ prendra aussi en compte la position $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$ de la particule.

On considère alors que notre système est complètement décrit par la connaissance de la densité (ou fonction de répartition) $f(t,\xi) \geq 0$ des particules ayant l'état $\xi \in \Xi$ à l'instant $t \geq 0$. Partant d'un état initial f_{in}, la dynamique au cours du temps de la densité $f(t,.)$ est donnée par une certaine équation (d'évolution).

D'une manière générale, les différents problèmes que l'on se pose dans l'analyse de ces modèles sont les suivants:

1. Description qualitative formelle: recherche des quantités conservées (lois de conservations) et des quantités décroissantes au cours du temps (entropie ou fonction de Lyapunov).

2. Problème stationnaire: description des solutions stationnaires, identification des états qui minimisent l'entropie à quantités conservées fixées et de ceux qui annulent la dissipation d'entropie.

3. Problème bien posé: existence et unicité des solutions et dépendance continue par rapport aux paramètres (notamment par rapport à la donnée initiale).

4. Étude qualitative rigoureuse: preuve de la conservation (ou de la non-conservation!) des quantités identifiées en *1*, preuve du Théorème-H, étude de la stricte positivité de la densité, de sa régularité, étude du comportement asymptotique en temps grand des solutions, et plus précisément pour les équations de type Boltzmann et Smoluchowski, preuve de la converge vers l'état d'équilibre identifié en *2*.

5. Analyse numérique: recherche d'algorithmes rapides et robustes (si possible ayant les mêmes propriétés qualitatives que les solutions du problème continu) permettant un calcul approché des solutions et preuve de la convergence de ces schémas.

6. Modélisation: passage rigoureux (en faisant tendre un "petit" paramètre vers 0) entre différents modèles décrivant notre système. Par exemple, limite de type Fokker-Planck ou limite hydrodynamique (permettant de passer d'une description microscopique à une description macroscopique du système).

Ce document présente une synthèse des principaux résultats obtenus par l'auteur (certains étant le fruit d'un travail en collaboration). L'ensemble des travaux est rassemblé dans un document annexe (accessible aussi sur le site oueb http://www.math.uvsq.fr/˜mischler/HDR).

Nous avons regroupé les résultats dans quatre parties selon quatre thèmes unificateurs que nous présentons maintenant. Chaque partie se termine par une liste (de longueur inégale) de problèmes ouverts.

Partie A. Cette partie est consacrée à l'équation de Boltzmann et aux résultats obtenus dans les articles [260], [261], [263], [276]. Nous y démontrons la convergence de plusieurs schémas semi-discrets (en espace, en temps, en vitesse) de l'équation de Boltzmann. En particulier, ces travaux conjugués aux résultats postérieurs de Bobylev, Palczewski et Schneider permettent de valider rigoureusement le passage des modèles de Boltzmann à répartition discrète de vitesses au modèle continu. Un des points fondamentaux dans ces travaux est de démontrer des versions "discrètes" des lemmes de compacité des moyennes en vitesse des suites de solutions d'une équation cinétique. Pour l'équation de Boltzmann homogène nous démontrons de nouveaux théorèmes d'existence, de conservation de l'energie et d'unicité optimaux. Nous établissons et utilisons pour ce faire un résultat de régularité pour le terme de gain itéré et des versions "précisées" du lemme de Povzner.

Partie B. Dans cette partie on s'intéresse aux équations cinétiques posées dans un domaine et nous y décrivons les articles [265], [266], [268], [277]. Nous établissons des théorèmes de trace pour les solutions d'équations de Vlasov-Fokker-Planck avec champs de force de régularité Sobolev. La trace est définie à l'aide d'une formule de Green renormalisée. Ces résultats peuvent être compris comme des extensions "jusqu'au bord" de la théorie de renormalisation des solutions des équations de transport de DiPerna et Lions. Une première application est l'obtention de théorèmes d'unicité pour des équations de Vlasov linéaires pour diverses conditions de réflexions. Une deuxième application est l'obtention d'un résultat de compacité très faible (au sens de la convergence renormalisée) pour les traces de solutions d'équations cinétiques telles que les équations de Vlasov-Poisson, Boltzmann et Fokker-Planck. Enfin pour des conditions de réflexion non locales, en particulier pour les conditions de réflexion de Maxwell, nous établissons le premier théorème d'existence avec conditions aux limites satisfaites (non relaxées!). Ce dernier résultat nécessite de coupler la convergence renormalisée, obtenue grâce aux théorèmes de trace, à des résultats de convergence au sens biting L^1 faible et à l'information de Darrozès-Guiraud.

Partie C. Cette partie est consacrée aux équations de Boltzmann en mécanique quantique, et en particulier à ces équations pour les gaz de Bosons. Nous y détaillons les résultats obtenus dans [264], [267], [271], [275]. Une étude générale (dans un cadre quantique et relativiste) du problème de minimisation de l'entropie et de paramétrisation du noyau intégral y est présentée. Le travail le plus important concerne une analyse assez complète d'une version simple (quadratique) mais "réaliste" de l'équation de Boltzmann-Bose (problème stationnaire, problème bien posé, étude qualitative et comportement asymptotique, validation de la limite de Kompaneets). En particulier nous établissons pour ce modèle qu'aucun condensat de Bose-Einstein ne se forme en temps fini, mais qu'il apparaît asymptotiquement en temps grand si la masse de la donnée initiale est suffisamment grande. Nous étudions aussi la rapidité de cette converge. La difficulté technique principale est le peu de borne a priori donnée par l'entropie et la nécessité de travailler dans un cadre mesures.

Partie D. Cette dernière partie concerne l'étude de divers modèles de coagulation et fragmentation et présente les travaux [269], [270], [272], [273], [274]. Nous établissons une série de résultats d'existence pour des modèles homogènes et non homogènes ainsi qu'un résultat général de retour vers l'état d'équilibre via des techniques de compacités faible et forte dans L^1. Ces techniques permettent aussi de valider le passage de modèles discrets à continus d'équations de coagulation-fragmentation, ainsi qu'à obtenir les équations de Lifshitz-Slyozov comme modèle limite des équations de Becker-Döring. Enfin, nous montrons que lorsque le processus de coagulation est assez fort, la conservation de la masse est perdue en temps fini (c'est le phénomène de gélification), et nous analysons le profil des solutions autour de l'instant de gélification.

Terminons cette introduction par quelques considérations sur les méthodes utilisées. Trois méthodes sont particulièrement récurrentes dans l'ensemble de nos travaux.

• *Compacités faible et forte dans L^1 et théorèmes de stabilité.* On peut distinguer trois étapes:

- Collection de bornes a priori impliquant que les solutiosn et que les termes de collisions (ou réactions) appartiennent à un compact faible L^1. En général, ces bornes se déduisent immédiatement des conservations et du Théorème-H, mais peuvent également nécessiter un peu plus de travail.

- Obtention de compacité forte sur les quantités moyennées par rapport à la variable de vitesse ou de taille. Ce sont les différentes versions du lemme de compacité des moyennes en vitesse pour les équations cinétiques et leur analogue (dont la preuve est beaucoup plus simple) sur les moyennes en taille pour les équations de coagulation-fragmentation. Des méthodes d'éclatement des variables sont mises en œuvre pour conclure dans certains cas.

- Passage à la limite pour une suite de solutions. Cela est parfois délicat: techniques de renormalisation et de dérenormalisation de DiPerna-Lions, utilisation de convergences très faibles (au sens biting L^1 faible et renormalisée) pour les suites des traces (pour lesquelles la convergence faible L^1 n'est pas établie).

Les applications du résultat de stabilité sont multiples: existence, continuité (faible et forte) par rapport aux paramètres, convergence asymptotique en temps grand, convergence de schémas numériques, liens entre différents modèles (limite Fokker-Planck, passage du discret au continu). À noter toutefois, que parfois, les bornes a priori ne permettent pas de mettre en œuvre une méthode de stabilité et une méthode "directe" est nécessaire (cela est vrai pour l'équation de Boltzmann des gaz de Bosons).

• *Méthodes de moments.* Elles consistent, en choisissant de bons multiplicateurs, à établir des bornes sur les moments (en vitesse ou en taille) des solutions. Ces informations supplémentaires sur les moments (accessibles essentiellement pour les modèles homogènes en espace) permettent de démontrer la conservation de l'énergie (équation de Boltzmann) et de la masse (équation de Smoluchowski), de l'unicité (équation de Boltzmann) ainsi que d'identifier l'état d'équilibre vers lequel la solution converge asymptotiquement en temps grand. Enfin, elles permettent d'appréhender le phénomène de gélification pour l'équation de Smoluchowski.

• *Méthodes de convexité.* La convexité joue un rôle central dans nombre des problèmes mentionnés ci-dessus. La plupart des bornes a priori sont obtenues à l'aide d'arguments de convexité, simples (à partir de l'entropie) ou plus subtils (dissipation d'entropie, information de Darrozès-Guiraud, lemme de Povzner).

- Chapitre A -

Analyse Théorique et Numérique de l'équation de Boltzmann

A.1. L'équation de Boltzmann

L'équation de Boltzmann (ou Maxwell-Boltzmann) a été introduite par J.C. Maxwell [182] et L. Boltzmann [41] comme modèle décrivant l'évolution d'un gaz peu dense dont les particules intéragissent uniquement par collisions binaires.

Considérons un gaz constitué d'un grand nombre (de l'ordre du nombre d'Avogadro ($6{\cdot}10^{23}$)) de particules identiques, indiscernables, non relativistes, non quantiques et ayant pour seul degré de liberté des mouvements de translation. Si ce gaz est confiné dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ et observé sur un intervalle de temps $[0,T]$ (ou $[0,\infty)$) alors chaque particule est caractérisée par sa vitesse $v \in \mathbb{R}^3$ et sa position $x \in \Omega$ à l'instant $t \geq 0$. Ce système de particules est parfaitement décrit par la fonction de distribution $f(t,x,v) \geq 0$ dans l'espace des phases $\Omega \times \mathbb{R}^3$: $f(t,x,v)\,dxdv$ représente le nombre de particules dans un volume $dxdv$ autour de (x,v) à l'instant t. L'hypothèse minimale et naturelle sur f est que $f(t,.,.)$ est une mesure bornée sur $D \times \mathbb{R}^3$ pour toute partie bornée D de Ω traduisant le fait qu'un domaine borné de l'espace contient une masse finie de matière.

Si les particules n'intéragissent pas entre elles et ne sont soumises à aucune force extérieure, alors leur trajectoire est donnée par la solution de l'équation de Newton $\dot{x} = v, \dot{v} = 0$. En terme de densité, l'équation donnant l'évolution du gaz est l'équation de transport libre

$$(A.1) \qquad \frac{\partial}{\partial t} f + v \cdot \nabla_x f = 0 \qquad (0,\infty) \times \Omega \times \mathbb{R}^3.$$

La solution en est $f(t,x,v) = f(0,x-vt,v)$, de sorte que

$$(A.2) \qquad f^\sharp(t,x,v) := f(t,x+v\,t,v) = f(0,x,v),$$

ce qui traduit le fait que f est constante le long des trajectoires des particules (ou caractéristiques).

Supposons maintenant que les particules intéragissent par collisions *binaires élastiques.* Cela signifie que seules les collisions entre deux particules sont considérées (jamais entre trois ou davantage) et qu'au cours du choc la quantité de mouvement et l'énergie cinétique (de la paire de particules) est conservée. Si l'on désigne par v', v'_* les vitesses avant collision, et par v, v_* les vitesses après collision, on a donc

$$(A.3) \qquad \begin{cases} v' + v'_* = v + v_*, \\ |v'|^2 + |v'_*|^2 = |v|^2 + |v_*|^2. \end{cases}$$

On note $\mathcal{C}$ la sous variété de $\mathbb{R}^{4\times 3}$ des 4-uplets (v, v_*, v', v'_*) de vitesses satisfaisant (A.3). Dans ces conditions, la densité f n'est plus constante le long des caractéristiques et l'équation (A.1) doit être modifiée afin de prendre en compte les collisions entre particules. Maxwell et Boltzmann proposent le modèle suivant pour l'évolution de la densité f:

$$(A.4) \qquad \frac{\partial}{\partial t} f + v \cdot \nabla_x f = Q(f,f) \qquad (0,\infty) \times \Omega \times \mathbb{R}^3,$$

où le terme $Q(f,f)$ (appelé noyau de collision) décrit comment les particules modifient leur vitesse à causes des collisions et s'écrit

$$(A.5) \qquad \begin{aligned} Q(f,f)(t,x,v) &= Q(f(t,x,.),f(t,x,.))(v) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} w\,\delta_{\mathcal{C}}\,(f'\,f'_* - f\,f_*)\,dv_*dv'dv'_*. \end{aligned}$$

Nous utilisons les notations habituelles $f = f(.,v)$, $f_* = f(.,v_*)$, $f' = f(.,v')$, $f'_* = f(.,v'_*)$. La fonction $w = w(v,v_*,v',v'_*) \geq 0$ dépend de l'intéraction microscopique entre les particules et mesure la probabilité (ou la fréquence) qu'une collision mettant en jeu les vitesses (v,v_*,v',v'_*) ait lieu. Du fait de l'hypothèse d'indiscernabilité des particules et de la microréversibilité des collisions (dans (A.3)) on peut toujours supposer que w satisfait les symétries

$$(A.6) \qquad w(v,v_*,v',v'_*) = w(v_*,v,v',v'_*)) = w(v',v'_*,v,v_*).$$

Nous reviendrons plus en détails sur les hypothèses faites sur w à la fin de cette section. Avec à l'esprit cette interprétation de w, si l'on sépare (A.5) en deux parties positives

$$Q(f,f) = Q^+(f,f) - Q^-(f,f),$$

il devient clair que Q^+ compte les chocs entre particules de vitesses v' et v'_* qui font "apparaître" une particule de vitesse v, et Q^- les chocs qui font "disparaître" une telle particule. Précisons que les collisions entre particules sont supposées être le résultat d'une intéraction de courte durée et justifie le fait que l'intégrale de collision (A.5) soit localisée en les variables (t,x). En d'autres termes: les variations dues au terme de transport se situe sur une échelle de temps beaucoup plus grande que celles dues aux intéractions microcopiques conduisant aux collisions (A.3); cela est "raisonnable" pour un gaz peu dense (de sorte que les particules collisionnent peu souvent).

Nous renvoyons aux articles ou aux livres de S. Chapman, T.G. Cowling [76], H. Grad [132], C. Cercignani [65] et S. Truesdell, R. Muncaster [229] pour une présentation plus détaillée de ce modèle. La dérivation formelle de l'équation (A.4) par L. Boltzmann peut être justifiée rigoureusement dans certains cas à la suite des travaux de Landford, nous renvoyons à [70], [218] pour cette question délicate.

Nous nous intéressons au problème de Cauchy pour l'équation de Boltzmann, et nous fixons donc une condition initiale

$$f(0,x,v) = f_{in}(x,v) \geq 0 \qquad \forall x \in \Omega,\ v \in \mathbb{R}^3.$$

Lorsque $\Omega \neq \mathbb{R}^3$, il faudrait ajouter des conditions aux limites à l'équation (A.4). Nous renvoyons à la partie B de ce document pour une étude des équations cinétiques dans un domaine. Dans cette partie, sauf indication explicite du contraire, nous supposons que $\Omega = \mathbb{R}^3$.

Nous allons passer en revue certaines propriétés de l'opérateur de collision et par là même, propriétés (au moins formelles) des solutions de l'équation de Boltzmann. Le noyau de collision satisfait la relation fondamentale suivante due aux symétries (A.4) de w: pour tout f et φ

$$(A.7) \quad \int_{\mathbb{R}^3} Q(f,f)(v)\,\varphi(v)\,dv = -\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} w\,\delta_{\mathcal{C}}\,(f'\,f'_* - f\,f_*)\,(\varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_*)\,dvdv_*dv'dv'_*.$$

En choisissant $\varphi(v) = 1$, v_i $(i = 1,2,3)$, $|v|^2$, il vient

$$\forall f \qquad \int_{\mathbb{R}^3} Q(f,f)(v)\,\varphi(v)\,dv = 0.$$

On dit alors que φ est un invariant collisionnel. On peut montrer que les invariants de collision sont précisément les seules fonctions $\varphi(v) = 1,\ v_i\ (i = 1,2,3),\ |v|^2$, voir [Cercigani90]. Au niveau des solutions de (A.4) cela se traduit par les conservations de la masse, de l'impulsion et de l'énergie:

$$(A.8) \qquad \forall t \geq 0 \qquad \int_{\mathbb{R}^3}\!\int_{\mathbb{R}^3} f(t,x,v) \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ |v|^2 \end{pmatrix} dvdx = \int_{\mathbb{R}^3}\!\int_{\mathbb{R}^3} f_{in}(x,v) \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ |v|^2 \end{pmatrix} dvdx.$$

En choisissant maintenant $\varphi = \ln f(v)$ dans (A.7), il vient

$$\begin{aligned} -D(f) &:= \int_{\mathbb{R}^3} Q(f,f)(v) \ln f(v)\, dv \\ &= \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3}\!\int_{\mathbb{R}^3}\!\int_{\mathbb{R}^3}\!\int_{\mathbb{R}^3} w\, \delta_{\mathcal{C}}\, j(f\, f_*, f'\, f'_*)\, dvdv_*dv'dv'_* \leq 0, \end{aligned}$$

grâce à la positivité de la fonction $(x,y) \mapsto j(x,y) = (y-x)(\ln y - \ln x)$. Définissant l'entropie par

$$H(f) = -\int_{\mathbb{R}^3} f(v) \ln f(v)\, dv,$$

on obtient la croissance de l'entropie moyenne:

$$(A.9) \qquad \int_{\mathbb{R}^3} H(f(t_1,x,.))\, dx - \int_{\mathbb{R}^3} H(f(t_0,x,.))\, dx = \int_{t_0}^{t_1} \int_{\mathbb{R}^3} D(f(t,x,.))\, dxdt \geq 0$$

pour tout $0 \leq t_0 \leq t_1$, qui constitue le célèbre Théorème-H de Boltzmann.

Considérons momentanément un gaz spatialement homogène. La densité f ne dépend plus de la variable d'espace x, elle s'écrit donc $f = f(t,v)$, et est solution de l'équation de Boltzmann homogène

$$(A.10) \qquad \frac{\partial}{\partial t} f = Q(f,f) \qquad (0,\infty) \times \mathbb{R}^3,$$

Pour ce modèle simplifié abordons maintenant la question du retour vers l'équilibre des solutions de l'équation de Boltzmann. D'après ce qui précède l'entropie $H(f)$ est croissante et les trois premiers moments de f sont constants (c'est ce que dit (A.8), (A.9)). On s'attend donc à ce qu'asymptotiquement en temps grand f converge vers un état f_∞ qui réalise le maximum de l'entropie sous la contrainte de ces trois moments fixés. Heuristiquement, si f_∞ est solution de ce problème d'optimisation il existe $a,\ c \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$< \nabla H(f_\infty), \varphi > = \int_{\mathbb{R}^3} h'(f_\infty)\, \varphi\, dv \ = < a\,|v|^2 + b \cdot v + c, \varphi > \qquad \forall \varphi,$$

ce qui implique

$$\ln f_\infty + 1 = a\,|v|^2 + b \cdot v + c.$$

Ainsi f_∞ est une Maxwellienne: il existe des constantes $\rho,\ \Theta > 0,\ u \in \mathbb{R}^3$ telles que

$$(A.11) \qquad f_\infty \ = \ M_{\rho,u,\Theta} = \frac{\rho}{(2\,\pi\,\Theta)^{3/2}}\, e^{-\frac{|v-u|^2}{2\,\Theta}}\ .$$

D'autre part, on voit que les seules fonctions ne faisant pas croître l'entropie vérifient $D(f) = 0$ et donc (sous l'hypothèse $w > 0$)

$$(f'\, f'_* - f\, f_*)\, \delta_{\mathcal{C}} \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^{12}.$$

On peut également établir sous des hypothèses générales sur f que les seules solutions de cette équation fonctionnelle sont encore les Maxwelliennes (A.11), voir [67], [164], [202]. Enfin on vérifie sans peine que $Q(M, M) = 0$ et que les Maxwelliennes sont les seules solutions stationnaires de l'équation de Boltzmann homogène, voir [174].

Ainsi, on vient de mettre en évidence que les quatre assertions suivantes sont équivalentes

- f est une Maxwellienne;
- f maximise l'entropie sous la contrainte des trois premiers moments fixés;
- f est une solution stationnaire de l'équation de Boltzmann: $Q(f, f) = 0$;
- f annule la dissipation d'entropie: $D(f) = 0$.

On montre également que pour toute fonction $f \geq 0$ telle que $f(v)(1 + |v|^2) \in L^1(\mathbb{R}^3)$ il existe une unique Maxwellienne M_f de mêmes moments que f. Partant d'une donnée initiale f_{in} la Maxwellienne associée $M_{f_{in}}$ est donc le candidat naturel pour être l'état vers lequel asymptotiquement en temps grand la solution f de (A.10) converge. Il existe une littérature très importante sur le sujet depuis les travaux pionniers de Carleman [58], [59]. La méthode la plus robuste, donnant une convergence dans L^1 faible ou fort, a été développée dans [12], [14], [101], [164], [1]. Cette méthode repose sur des résultats de stabilité faible et forte et sur la s.c.i. séquentielle de $D(f)$. Des retours exponentiels grâce à l'étude du problème linéarisé ont été obtenus par [15], [245]. Enfin, une étude plus directe avait été initiée par McKean [177] pour le modèle de Kac (caricature de Boltzmann). L'idée est de définir l'entropie relative

$$H(f|M) = \int_{\mathbb{R}^3} f\, \ln\, \frac{f}{M}\, dv$$

et d'établir des inégalités différentielles du type

$$\frac{d}{dt} H(f|M_{f_{in}}) \leq C_f\, H(f|M_{f_{in}})^\theta, \tag{A.12}$$

avec $\theta \geq 1$. L'inéquation différentielle (A.12) donne alors une décroissance de $H(f|M_{f_{in}})$ exponentielle si $\theta = 1$ et polynômiale si $\theta > 1$. On en déduit la convergence de f vers $M_{f_{in}}$ (avec taux) grâce à l'inégalité de Csiszar-Kullback. A la suite des travaux [88], [244] cette méthode a été considérablement développée par [60], [61], [227], [228], [94]. Pour ces questions nous renvoyons aux articles de revue [91], [237].

En ce qui concerne l'équation de Boltzmann inhomogène, la situation est plus complexe notamment à cause de la compétition entre terme de transport et terme de collision et la présence d'éventuelles conditions aux limites. Dans le cas où Ω est un tore, la convergence vers une Maxwellienne a été montrée par DiPerna, Lions et Arkeryd [101], [164], [16] et le cas d'un domaine borné a été étudié par Desvillettes [89]. Un retour exponentiel est prouvé pour des données initiales proches d'un état homogène dans [248]. Enfin, le cas $\Omega = \mathbb{R}^3$ a été étudié par [225] et [173] qui prouvent que (pour certaines données initiales) la solution ne converge pas vers une Maxwellienne.

Signalons un dernier (et vaste) problème que nous n'aborderons pas ici: les limites hydrodynamiques. Il s'agit de passer de l'équation de Boltzmann qui décrit un gaz à l'échelle microscopique à des équations hydrodynamiques (Euler, Navier-Stokes, ...), qui décrivent le gaz à une échelle macroscopique, lorsque le libre parcours moyen (entre deux collisions) tend vers 0. Nous renvoyons le lecteur intéressé aux travaux récents de Bardos, Golse, Levermore, Lions, Masmoudi, Saint-Raimond, ... et à l'article de revue [239].

Terminons cette introduction en détaillant quelques hypothèses et notations concernant l'opérateur de collision $Q(f,f)$. Un problème important est de savoir donner un sens à l'opérateur de collision $Q(f,f)$ pour des fonctions f générales, typiquement $f \in L^1(\mathbb{R}^3)$. Pour cela, il convient de paramétriser la variété des collisions $\mathcal{C}$ définie par (A.3). Il existe plusieurs possibilités: paramétrisation dans le centre de masse, paramétrisation décentrée, paramétrisation de Carleman. Le choix de cette paramétrisation est important car il peut simplifier considérablement les calculs afin d'obtenir différentes estimations sur le terme de collision.

Pour simplifier, nous n'en présentons qu'une seule: la paramétrisation décentrée. Etant données les vitesses après collision v, v_* l'ensemble des vitesses possibles avant collision v', v'_* (i.e. telles que v, v_*, v' et v'_* vérifient(A.3)) est donné par

$$(A.13) \qquad \begin{cases} v' = v - (v - v_*, \omega)\, \omega \\ v'_* = v_* + (v - v_*, \omega)\, \omega, \end{cases}$$

où l'angle solide ω parcourt la sphère S^2. L'opérateur de Boltzmann s'écrit alors

$$(A.14) \qquad Q(f,f)(v) = \int_{v_* \in \mathbb{R}^3} \int_{\omega \in S^2} (f'\, f'_* - f\, f_*)\, B(v - v_*, \omega)\, d\omega dv_*,$$

où la fonction B que l'on nommera *section efficace différentielle de collision* est définie par la relation

$$(A.15) \qquad B(v - v_*, \omega) = \frac{1}{2} |(v - v_*, \omega)|\, w(v, v_*, v', v'_*).$$

On trouvera une preuve élementaire de la déduction de l'expression (A.13)-(A.15) à partir de (A.5) dans [123], voir aussi [275]. Le fait que B ne dépende que des deux variables $v - v_*$ et w résulte des symétries (A.6) de w et de l'hypothèse (physique) supplémentaire que ω est invariant par changement de repère Galiléen.

En fait, lorsque les particules du gaz intéragissent par l'intermédiaire de forces dérivant d'un potentiel en r^{-s} (où r est la distance entre les particules et $s > 1$), la section efficace de collision s'obtient en résolvant un problème à deux corps et est donnée par (voir [65])

$$(A.16) \qquad B(z, \omega) = b(\cos\theta)\, |z|^\gamma, \quad b(\cos\theta)\, \sin\theta = K\, \theta^{-(1+\nu)}$$

avec $\gamma = (s-5)/(s-1)$, $\nu = 2/(s-1)$ et θ est l'angle entre z et ω, i.e. $\cos\theta = \frac{(z,\omega)}{|z|}$. À noter que b est régulière sauf en $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ et la singularité en ce point n'est pas intégrable ($b \notin L^1(0, \pi/2)$) et donc $B \notin L^1_{loc}(\mathbb{R}^3 \times S^2)$ dans ce cas. Dans le cas dit *des collisions entre sphères dures*, l'expression de B est

$$B(z, \omega) = |(z, \omega)| = |z|\, |\cos\theta|.$$

Dans ce qui suit nous ferons toujours l'hypothèse suivante:

$$(A.17) \qquad \exists\, A_0 \qquad A(z) := \int_{S^2} B(z, \omega)\, d\omega \le A_0\, |z|^\gamma$$

avec $\gamma \in (-3, 1]$. A noter que pour certains résultats présentés ici les hypothèses peuvent être légèrement généralisées, cf [98].

Remarquons que dans le cas d'une intéraction via un potentiel en r^{-s} cette hypothèse n'est jamais satisfaite. La condition (A.17) correspond à l'hypothèse de *cutt-off angulaire de H. Grad* [132] qui revient à atténuer la singularité de B, i.e. du point de vue physique à moins prendre en compte les collisions rasantes (celles pour lesquelles v' est proche de v). Nous renvoyons à [238] pour un exposé de la théorie de Boltzmann sans cut-off (pour des B qui ne satisfont pas (A.17)), qui est sensiblement différente de celle avec cut-off que nous considérons ici.

Enfin, avec ces notations, $Q(f,f)$ admet la décomposotion

$$Q(f,f) = Q^+(f,f) - f\,L(f), \qquad L(f) = A * f$$

où $Q^+(f,f)$ est défini par

$$Q^+(f,f)(v) = \int_{v_*\in\mathbb{R}^3}\int_{\omega\in S^2} f'\,f'_*\,B(v-v_*,\omega)\,d\omega dv_*.$$

A.2. Théorie de stabilité/existence pour le problème de Cauchy

Il existe plusieurs cadres dans lesquels ont été développées des théories d'existence pour le problème de Cauchy. Nous en présentons deux ici: celui des solutions dispersives de Kaniel, Illner, Shinbrot et celui des solutions renormalisées de DiPerna, Lions. La présentation que nous choisissons est celle d'une théorie de stabilité (de laquelle se déduit les résultats d'existence de manière élémentaire). C'est le point de vue généralement adopté pour la théorie des solutions renormalisées (dès l'article fondateur [98]) mais il n'a été introduit que récemment pour la théorie des solutions dispersives, voir [131]. Pour cette dernière théorie, il est généralement préféré une approche plus directe: l'existence est obtenue à l'aide d'un schéma itératif monotone sans passer par un résultat intermédiaire de stabilité, voir [146], [142].

Ce choix a deux avantages: il permet d'une part de présenter les deux théories simultanément et d'autre part de pouvoir s'appliquer à la preuve de convergence de schémas numériques présentés dans les sections suivantes. Dans les deux cas la théorie de stabilité/existence repose sur les points suivants:

(1) Obtention de bornes ("sur-solution" ou "a priori") sur les solutions. Celles-ci sont fortes dans le cadre des solutions dispersives mais relativement faibles dans celui des solutions renormalisées.

(2) Donner un sens à l'équation sous ces bornes. C'est simplement le sens des distributions (par exemple) dans le cadre des solutions dispersives mais cela nécessite la technique de renormalisation dans celui des solutions renormalisées.

(3) Établir un théorème de stabilité dans un cadre naturel: pour toute suite (f_n) de fonctions qui satisfont l'équation au sens de (2) et les bornes (1) (uniformément en $n \in \mathbb{N}$) on peut extraire une sous-suite qui converge vers une fonction f satisfaisant encore l'équation au sens de (2) et les bornes (1). Pour cela il s'agit

- (3a) de remarquer que (1) implique la compacité "faible" des suites f_n et $Q(f_n, f_n)$,
- (3b) d'utiliser l'équation pour en déduire la compacité forte des moyennes en vitesse de f_n,
- (3c) de passer à la limite dans l'équation au sens de (2) (en particulier dans le terme de collision qui est quadratique!) à l'aide de (3a) et (3b).

(4) Enfin, introduire une suite de problèmes régularisés pour lesquels l'existence d'une solution est standart et appliquer les étapes (1)-(2)-(3) à la suite de solutions approchées ainsi construites.

Soulignons que pour les solutions dispersives, la difficulté repose dans l'obtention des bornes (1), les étapes suivantes se déroulant relativement aisément, alors que pour les solutions renormalisées, les bornes s'obtiennent très naturellement mais le passage à la limite est extrêmement technique.

Les Lemmes de moyennes. Les lemmes de moyennes stipulent que les moyennes en vitesse d'une solution d'une équation cinétique possèdent davantage de régularité que la solution elle-même. Soulignons que l'opérateur de transport est hyperbolique et donc qu'aucun gain de régularité sur la solution elle-même ne peut être espéré: une solution d'une équation de transport possède la même régularité que la donnée initiale. Cette propriété de régularité a été mise en évidence au milieu des années 80 par Agoshkov [3] et Golse et al [127], [126] et a été très développée par la suite dans [98], [99], [102], [167], [168], [122], [35], [203]. Par exemple, un résultat typique de régularité est le suivant [126]: si

$$g \in L^2, \; G \in L^2, \; \frac{\partial}{\partial t} g + v \cdot \nabla_x g = G$$

alors pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$

$$\int_{\mathbb{R}^3} g \, \varphi \, dv \in H^{1/2}_{t,x}.$$

En fait, dans les preuves de stabilité, on utilise la conséquence de ce résultat en terme de compacité. Le résultat le plus précis [203] est le suivant. Soient (g_n), (G_n) des suites telles que

$$(A.18) \qquad \begin{cases} (g_n) \text{ bornée } L^p_{t,x,v}, \; (G_n) \text{ compacte } W^{-1,p}_{t,x}(W^{-s,p}), \; p > 1, s \geq 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial t} g_n + v \cdot \nabla_x g_n = G_n \end{cases}$$

alors pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$

$$(A.19) \qquad \left(\int_{\mathbb{R}^3} g_n \, \varphi \, dv \right) \text{ est compacte dans } L^p_{t,x}.$$

Illustrons l'importance de ce résultat en montrant comment il s'utilise dans la preuve de stabilité dans un cas simple (celui des solutions dispersives). Considérons une suite (f_n) de l'équation de Boltzmann telle que

$$f_n \rightharpoonup f \text{ faiblement dans } L^1 \cap L^\infty$$

Comme d'après (A.17) on a $A \in L^1 + L^\infty_{-1}$ on obtient que $Q(f_n, f_n)$ est borné dans $L^\infty_{t,x}(L^\infty_{-1})$ et le lemme de moyenne s'applique donc à (f_n) (ou plus exactement à $(f_n \, \psi)$ pour tout $\psi \in \mathcal{D}_{t,x,v}$). Il s'ensuit (toujours parce que $A \in L^1 + L^\infty_{-1}$ et un peu de calcul intégral) que

$$L(f_n) = A * f_n \;\to\; A * f = L(f) \text{ p.p et est bornée dans } L^1_{t,x,v} + L^\infty_{t,x}(L^\infty_{-1}).$$

On passe alors sans difficulté à la limite dans le terme de perte

$$Q^-(f_n, f_n) = f_n \, L(f_n) \;\rightharpoonup\; f \, L(f) = Q^-(f, f) \;\text{ faiblement dans }\; L^1_{loc,t,x,v}.$$

Le terme de gain se traite de manière semblable. Ici, et dans toute la suite, on utilise la notation

$$L^p_k(\mathbb{R}^3) = \{ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \; (1 + |v|)^k \, f(v) \in L^p(\mathbb{R}^3) \}.$$

D'autres propriétés remarquables des moyennes en vitesses des solutions des équations cinétiques (gain de moments, dispersions, gain d'intégrabilité) ont été découvertes et étudiées principalement par B. Perthame et ses co-auteurs [28], [200], [201], [170], [171], [63]. Ces résultats se sont avérés extrêmement utiles dans l'étude de l'équation BGK [200] et celle de l'équation de Vlasov-Poisson [28], [201], [170]. À notre connaissance, la seule application de ces techniques à l'équation de Boltzmann est [262].

Renormalisation. La technique de renormalisation des solutions des équations de transport a été developpée par DiPerna et Lions [100]. Un exemple de résultat possible est le suivant. Soit $g = g(t,y) \in L^\infty(0,T;L^p(\mathbb{R}^M))$ une solution de l'équation de transport

$$\frac{\partial g}{\partial t} + a \cdot \nabla_y g = G \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'((0,T)\times\mathbb{R}^M)$$

avec

$$a \in L^1(0,T;W^{1,p'}_{loc}(\mathbb{R}^M)),\ \mathrm{div}_y\, a = 0, \quad G \in L^1((0,T)\times\mathbb{R}^M).$$

Alors d'une part

$$(A.20) \qquad g \in C([0,T];L^1_{loc}(\mathbb{R}^M)).$$

D'autre part, pour toute fonction $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitzienne, $\beta(g)$ est solution de l'équation de transport

$$\frac{\partial \beta(g)}{\partial t} + a \cdot \nabla_y \beta(g) = \beta'(g)\, G \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'((0,T)\times\mathbb{R}^M)$$

et satisfait

$$(A.21) \qquad \beta(g)(t,.) = \beta(g(t,.)) \quad p.p.\, \mathbb{R}^M \ \forall\, t \in [0,T].$$

Les applications de ce résultat dans le cadre de la théorie cinétique sont multiples, citons:

- Théorèmes de stabilité et d'existence dans des cas où on ne sait pas donner de sens à l'équation à laquelle on s'intéresse sans la renormaliser (typiquement l'équation de Boltzmann).

- Théorèmes d'unicité (essentiellement pour des problèmes linéaires).

- Continuité forte par rapport aux paramètres (par rapport à la donnée initiale notamment).

Ces techniques ont aussi été utilisées avec succès dans le cadre des équations paraboliques et de Navier-Stokes.

Les solutions dispersives de Illner-Shinbrot. Le premier cadre a été développé à la suite des travaux de Shinbrot, Kaniel, Illner à partir des années 1980, [146], [142], [31]. L'idée centrale est de construire une sur-solution Maxwellienne à l'équation de Boltzmann.

Cas 1: $\gamma \in (-3,0]$**.** On définit

$$M = M(t,x,v) = C(t)\,\xi(t,x,v), \quad \xi(t,x,v) = \exp\Big(-\alpha\,|x - v\,t|^2 - \beta\,|v|^2\Big),$$

et on montre qu'il existe une constante K_A telle que

$$(A.22) \qquad L\,\xi \,\le\, \frac{K_A}{(1+t)^{3-\gamma}} \qquad \forall t,x,v.$$

D'une part, comme $Q(M,M) = 0$, il vient

$$(A.23) \qquad Q^+(M,M) = Q^-(M,M) = C^2\,\xi\,L\,\xi \le \frac{K_A\,C^2}{(1+t)^{3-\gamma}}.$$

D'autre part

$$(A.24) \qquad \frac{\partial}{\partial t} M + v\cdot\nabla_x M = \dot{C}\,\xi.$$

On définit alors $C(t)$ comme étant la solution de l'E.D.O.

$$\dot{C} = \frac{K_A\, C^2}{(1+t)^{3-\gamma}}. \tag{A.25}$$

En général $C(t)$ n'est définie que sur un intervalle de temps borné $[0, T_*)$, mais pour $\gamma \in (-2, 0]$ et $C(0)$ assez petit la solution de (A.25) est globale en temps. On en déduit (grâce à (A.23)–(A.25)) que M est une sur-solution (au sens des distributions) de l'équation de Boltzmann, i.e. M satisfait

$$\frac{\partial}{\partial t} M + v \cdot \nabla_x M \geq Q^+(M, M). \tag{A.26}$$

On prétend que M définit un domaine invariant $[0, M]$ pour les solutions de (A.4), i.e. si $f(0, .)$ satisfait

$$0 \leq f(0, .) \leq M_{in} := M(0, .) \tag{A.27}$$

alors on s'attend à ce qu'une solution f de (A.4) vérifie

$$0 \leq f(t, x, v) \leq M(t, x, v) \qquad \forall t \in [0, T_*),\ \forall x, v. \tag{A.28}$$

Nous reviendrons sur ce point dans un instant. Remarquons que sous la condition (A.28) on a $Q(f, f) \in (L^1 \cap L^\infty)_{t,x}(L^\infty_{-1})$ (grâce à hypothèse (A.17) et donc que l'équation (A.4), (A.14) est bien défini au sens des distributions. Le résultat de stabilité/existence correspondant est le suivant.

Théorème A.1. - *Soit (f_n) une suite de solutions de (A.4) satisfaisant (A.28) pour tout $n \geq 0$, alors il existe f et une sous-suite $(f_{n'})$ telle que $f_{n'} \rightharpoonup f$, f est solution de l'équation de Boltzmann au sens des distributions et satisfait (A.28).*

- Pour toute donnée initiale f_{in} telle que (A.27), il existe une solution f de l'équation de Boltzmann au sens des distributions qui satisfait (A.28) et $f(0, .) = f_{in}$.

Nous avons déjà expliqué avec force détails au début de cette section comment la partie stabilité de ce résultat peut être établie. Donnons quelques explications supplémentaires afin de convaincre le lecteur qu'une sur-solution M au sens de (A.26) définit effectivement un domaine invariant du type $[0, M]$; cela n'est en effet pas complètement immédiat dans la mesure où l'opérateur $f \mapsto Q(f, f)$ n'est pas monotone. On raisonne sur un problème convenablement modifié.

On considère l'application T_n qui à $g \in [0, M]$ associe $T_n\, g := f$, la solution de

$$\frac{\partial}{\partial t} f + v \cdot \nabla_x f + \lambda\, f = Q_n(g, g) + \lambda\, g,$$

où $\lambda > 0$ et Q_n est l'opérateur de Boltzmann modifié défini par (A.14) avec B remplacé par

$$B_n(g; z, \omega) = \frac{B(z, \omega)}{1 + n^{-1} \int g\, dv}\, \mathbf{1}_{|z| \leq n}.$$

En utilisant le fait que M satisfait (A.26), que $B_n \leq B$ et en choisissant $\lambda > 0$ assez grand, on montre que $f \in [0, M]$. Par le Théorème du point fixe de Banach, T_n admet alors un unique point fixe $f_n \in [0, M]$ qui est donc solution de l'équation de Boltzmann modifiée associée à B_n.

Cas 2: $\gamma \in (0, 1]$**.** On définit

$$M(t, x, v) = \exp\big(-\alpha\, |x - v\, t|^2 - \beta |v|^2\big), \qquad M_{in}(x, v) = \frac{1}{2}\, M(0, x, v) \tag{A.29}$$

et on montre qu'il existe K_A tel que

$$(A.30) \qquad \forall \alpha > 0 \qquad \int_0^\infty L(M)^\sharp \, d\tau \leq \frac{K_A}{\sqrt{\alpha}} \qquad \forall \, x, v \in \mathbb{R}^3.$$

On rappelle que la notation $g^\sharp$ est définie en (A.2). On obtient donc, pour α assez grand, que M est une sur-solution au sens mild de l'équation de Boltzmann, c'est à dire

$$(A.31) \qquad M^\sharp \geq M_{in} + \int_0^t Q^+(M, M))^\sharp \, ds \qquad \forall \, t, x, v.$$

On procède ensuite comme dans le cas 1 et on établit sans peine un analogue du théorème A.1 dans ce cas.

Remarquons que bien qu'il y ait équivalence entre les notions de solutions au sens des distributions, mild, renormalisée (sous des conditions de borne suffisantes, voir [98]) il n'en est pas de même pour les sur-solutions, en particulier M définie par (A.31) n'est pas une sur-solution au sens de (A.26).

Cette théorie souffre de plusieurs défauts:

- Il est nécessaire de faire une hypothèse de petitesse sur la donnée initiale ($C(0)$ assez petit ou α assez grand) pour avoir une théorie d'existence globale.

- Plus sérieusement, la preuve repose sur une propriété de dispersion (les estimations (A.22) et (A.30)) qui n'est pas valable pour un domaine quelconque (borné, par exemple).

Les solutions renormalisées de DiPerna-Lions. Une seconde approche a été développée par DiPerna et Lions. Il s'agit cette fois-ci d'utiliser uniquement les bornes physiques naturelles que l'on peut déduire de (A.8) et (A.9). En effet, on déduit de celles-ci qu'il existe C_0 (dépendant uniquement de f_{in}) telle que

$$(A.32) \qquad \sup_{t \geq 0} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, v) \, (1 + |v|^2 + |x - v \, t|^2 + |\ln \, f|) \, dv dx \leq C_0$$

et

$$(A.33) \qquad \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^3} D(f(t, x, .)) \, dx dt \leq C_0.$$

Nous souhaitons donner un sens au terme de collision dans l'équation de Boltzmann. Il est clair que (A.32), (A.33) ne garantissent pas que $Q(f, f) \in L^1_{loc}$ à cause de son caractère quadratique, mais suffisent pour montrer

$$(A.34) \qquad \frac{Q^+(f, f)}{1 + f} \leq L(f) \in L^1_{loc}((0, T) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3).$$

De plus, grâce à l'inégalité (élémentaire)

$$(A.35) \qquad \forall \, K > 1 \qquad f' \, f'_* \; \leq \; K \, f \, f_* + \frac{1}{\ln \, K} \, j(f \, f_*, f' \, f'_*),$$

on déduit de (A.33) et (A.34)

$$\frac{Q^+(f, f)}{1 + f} \in L^1_{loc}((0, T) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3).$$

En fait, il est possible de déduire des bornes (A.32), (A.33) l'estimation

$$\frac{Q(f,f)}{\sqrt{1+f}} \in L^1_{loc}((0,T)\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3), \tag{A.36}$$

voir [165], [234].

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_+$ est une solution renormalisée de (A.4) si $f \in C([0,\infty); L^1(\Omega\times\mathbb{R}^3))$, vérifie (A.32),(A.33) et est solution de l'équation "renormalisée"

$$\frac{\partial}{\partial t}\ln(1+f) + v\cdot\nabla_x \ln(1+f) = \frac{Q(f,f)}{1+f}. \tag{A.37}$$

Grâce aux remarques précédentes, il est clair que tous les termes de l'équation (A.37) sont parfaitement définis, au sens des distributions.

Le résultat de stabilité/existence dans ce cadre est le suivant.

Théorème A.2 ([98]). *- Soit (f_n) une suite de solutions renormalisées qui satisfait uniformément en n les bornes (A.32)-(A.33), alors il existe f et une sous-suite $f_{n'}$ telle que $f_{n'} \rightharpoonup f$ et f est une solution renormalisée.*

- Pour toute donnée initiale f_{in} telle que

$$\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} f_{in}(x,v)\,(1+|v|^2+|x|^2+|\ln\, f_{in}(x,v)|)\,dvdx < \infty$$

il existe une solution renormalisée à l'équation de Boltzmann.

Un mot à propos de la preuve de la stabilité. D'après la formulation renormalisée (A.37) et le Lemme de moyenne (A.18)-(A.19) la suite (f_n) de l'énoncé du Théorème A.2 vérifie

$$\int_{\mathbb{R}^3} \beta(f_n)\,\varphi\,dv \;\text{ est relativement compacte dans }\; L^2_{t,x} \tag{A.38}$$

pour tout β de la forme $\beta(s) = \frac{1}{\delta}\ln(1+\delta\, s)$ et tout $\varphi \in \mathcal{D}$. Par un jeu subtil associant techniques de dérenormalisation ($\delta \to 0$), de renormalisation, et critères de compacité fort et faible dans L^1 il est possible de passer à la limite dans la formulation renormalisée (A.37) en mettant à profit (A.32), (A.33), (A.35), (A.38).

A.3. Inégalité de Povzner, conservation de l'énergie et unicité pour l'équation de Boltzmann homogène [263]

Les premiers travaux sur l'équation de Boltzmann homogène remontent à Carleman [58], [59] et Povzner [208]. En 1972 Arkeryd [12] jette les bases de la théorie "moderne", c'est-à-dire, une théorie basée uniquement sur les bornes naturelles que l'on déduit des conservations de la masse, de la quantité de mouvement

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(t,v)\,dv = \int_{\mathbb{R}^3} f_{in}(v)\,dv, \qquad \int_{\mathbb{R}^3} f(t,v)\,v\,dv = \int_{\mathbb{R}^3} f_{in}(v)\,v\,dv \tag{A.39}$$

et de l'énergie

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(t,v)\,|v|^2\,dv = \int_{\mathbb{R}^3} f_{in}(v)\,|v|^2\,dv \tag{A.40}$$

pour tout $t \geq 0$, et du Théorème-H

$$H(f(t_1,.)) + \int_{t_0}^{t_1} D(f(t,.))\,dt = H(f(t_0,.)) \qquad \forall\, t_1 \geq t_0 \geq 0. \tag{A.41}$$

Celles-ci sont: si f_{in} est de masse, d'énergie et d'entropie bornée, i.e.

$$\int_{\mathbb{R}^3} f_{in}(v)\,(1 + |v|^2 + |\ln\, f_{in}(v)|)\,dv < \infty \tag{A.42}$$

alors une solution f de (BH) satisfait (formellement)

$$\sup_{t\geq 0} \int_{\mathbb{R}^3} f(t,v)\,(1 + |v|^2 + |\ln\, f(t,v)|)\,dv < \infty. \tag{A.43}$$

A noter que si $f \in L^1_2(\mathbb{R}^3)$ alors $Q(f,f) \in L^1 + L^\infty_{-1}$ de sorte que l'équation de Boltzmann homogène (A.10) est bien définie.

Comme dans la section précédente, on peut établir un théorème de stabilité sous la condition (A.43) et en déduire le théorème d'existence suivant.

Théorème A.3. ([12], [130], [235]) - *Pour toute donnée initiale f_{in} telle que (A.42) il existe une solution à l'équation de Boltzmann homogène (A.10) associée à f_{in}, vérifiant (A.43) et pour tout $t \geq 0$*

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(t,v)\,|v|^2\,dv \leq \int_{\mathbb{R}^3} f_{in}(v)\,|v|^2\,dv, \qquad H(f(t,.)) + \int_0^t D(f(s,.))\,ds \leq H(f_{in}).$$

D'un point de vue de l'existence à proprement parler, ce résultat est tout à fait satisfaisant (les conditions initiales considérées sont dans l'espace naturel et les sections efficaces traitées sont assez générales). Par contre, le Théorème ne dit pas si les solutions ainsi construites satisfont les propriétés (A.40) et (A.41). La perte de l'information (A.40) et (A.41) est inhérente à la méthode utilisée qui est basée sur les bornes (A.43) et sur des résultats de compacité faible. De plus, le théorème ne dit rien en ce qui concerne l'unicité.

On se restreint désormais dans ce paragraphe au cas où la section efficace B est donnée par

$$B(z,\omega) = b(\theta)\,|z|^\gamma, \quad b \in L^1, \quad \gamma \in (0,1], \tag{A.44}$$

et nous abordons les questions de comment obtenir la conservation de l'énergie (A.40) et l'unicité de la solution. Ce cadre correspond donc aux sections efficaces provenant d'un potentiel Maxwellien ou dur avec cut-off angulaire et à celui des sphères dures. Pour ces deux questions une étape essentielle est de contrôler les moments en vitesse de f. Elle permet d'établir

(a) la conservation de l'énergie;

(b) la convergence en $t \to \infty$ vers la Maxwellienne;

(c) l'unicité.

À noter également que X. Lu [174] a démontré récemment, sous cette hypothèse (A.44), que l'égalité d'entropie (A.41) est effectivement satisfaite.

Pour Ψ donnée on définit le moment

$$Y_\Psi(t) = \int_{\mathbb{R}^3} f(t,v)\,\Psi(|v|^2)\,dv.$$

On a alors
$$\frac{d}{dt}Y_\Psi(t) = \int_{\mathbb{R}^3} Q(f,f)\,\Psi(|v|^2)\,dv = \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} f\,f_*\,|v-v_*|^\gamma\,K_\Psi\,dvdv_*$$
avec
$$K_\Psi(v,v_*) = \frac{1}{2}\int_{S^2} b(\theta)\,(\Psi+\Psi_*+\Psi'+\Psi'_*)\,d\omega.$$
L'inégalité de Povzner stipule que pour Ψ convexe le terme "dominant" dans K_Ψ est négatif, il est positif lorsque Ψ est concave. La version la plus précise à ce jour de l'inégalité est présentée dans [263]. La conséquence que nous utilisons ici est: pour Ψ convexe

$$\int_{\mathbb{R}^3} Q(f,f)\,\Psi(|v|^2)\,dv \le C_\Psi\,\|f\|^2_{L^1_2} - c_\Psi\,Y_0\,Y_{\Psi'},$$

avec $\Psi'(r) = r^{(s+\gamma)/2}$ si $\Psi(r) = r^{s/2}$, $s>2$ et $\Psi'(r) \ge r^{1+\gamma/2}$ lorsque $\Psi(r)/r \to +\infty$.

On en déduit le contrôle des moments d'une solution de l'équation de Boltzmann homogène.

Théorème A.4. *Toute solution $f \in C([0,\infty);L^1)$ telle que $Y_0(t) = Y_0(0)$, $Y_2(t) \le Y_2(0)$ $\forall t \ge 0$ satisfait*

(i) $Y_s(0) < \infty$, $s > 2$ implique $Y_s \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ et $Y_{s+\gamma} \in L^1(0,T)$ $\forall T > 0$;

(i') $Y_{e^{a|.|^2}}(0) < \infty$ implique $Y_{e^{a\,|.|^2}} L^\infty(\mathbb{R}_+)$;

(i") $f_{in}\,|v|^2\,\ln(1+|v|^2) \in L^1(\mathbb{R}^3)$ si, et seulement si, $Y_{2+\gamma} \in L^1(0,T)$ $\forall T>0$;

(ii) $\forall s > 2$ on a $Y_s(t) \le C_s\,(t\vee 1)^{(2-s)/\gamma}$;

(iii) $\exists \Psi$ tel que $\Psi(r)/r \to \infty$ lorsque $r \to \infty$ et $Y_\Psi \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$;

(iv) $f \in C([0,\infty);L^1_2)$ et $Y_2(t) = Y_2(0)$ $\forall t \ge 0$.

Sous forme de bornes *a priori* ce résultat a été progressivement obtenu par Povzner [208], Arkeryd [12], Elmorth [112] (i), Desvillettes [92] (i), Wennberg [247], [249], [250] (ii), Bobylev [37] (i'), Lu [174] (i"). Nous démontrons dans [263] cette version *a posteriori* et établissons (iii) et (iv). La conservation de l'énergie a aussi été démontrée indépendamment par Lu [174]. Une première façon pour obtenir la conservation de l'énergie (A.40) est d'utiliser (ii) ou (iii) comme borne a priori supplémentaire dans le Théorème de stabilité A.3. Une autre façon est d'utiliser à posteriori une inégalité de Povzner inverse (pour Ψ concave), voir [174] et [263]

Le problème de l'unicité a également été abondamment étudié et les résultats d'unicité ont été améliorés progressivment: Carleman prouve l'unicité lorsque la donnée initiale possède un moment d'ordre 6 borné [59], Arkeryd n'en a plus besoin que 4 [12], Sznitmann plus que 3 [223], Gustafsson plus que $2+\gamma$ [136] et Wennberg plus que $2+\varepsilon$ [247]. Nous démontrons dans [263] qu'un moment d'ordre 2 suffit et que cela est optimale. En effet, Wennberg construit dans [251] des contre-exemples à l'unicité lorsqu'on autorise l'énergie à ne pas être bornée par sa valeur initiale.

Théorème A.5 ([263]). *Il existe une unique solution f telle que*

$$f \in C([0,\infty);L^1_2) \qquad Y_{2+\gamma}(t) \le \frac{C_{2+\gamma}}{t\vee 1}. \tag{A.45}$$

En particulier, il existe une unique solution qui conserve la masse et d'énergie bornée par l'énergie initiale (d'après le Théorème A.4).

Nous présentons maintenant une démonstration du Théorème A.5. Soient f et g deux solutions de l'équation de Boltzmann satisfaisant (A.45), et notons

$$h = f+g, \qquad X_i = \|f-g\|_{L^1_i},\ i=0,2.$$

Par un calcul élémentaire on établit que

$$\frac{\partial}{\partial t}|f-g| = (Q(f,f)-Q(g,g))\,\mathrm{sign}(f-g) \le \hat{Q}(|f-g|, f+g) + (f+g)\,L(|f-g|),$$

où l'on a définit $\hat{Q}$ l'opérateur de collision symétrisé par

$$\hat{Q}(\varphi,\psi) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{S^2} B\,[\varphi'\,\psi'_* + \varphi'_*\,\psi' - \varphi\,\psi_* - \varphi_*\,\psi]\,d\omega dv_*.$$

En remarquant que pour tout φ, ψ on a encore

$$\int_{\mathbb{R}^3} \hat{Q}(\varphi,\psi)\,\begin{pmatrix}1\\|v|^2\end{pmatrix}\,dv = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

on en déduit l'inégalité différentielle suivante

$$(A.46) \qquad \frac{d}{dt}X_2 \le \|h\|_{L^1_{2+\gamma}}\,X_2,$$

où on a normalisé $\|b\|_{L^1} = 1$, établie par Gustafsson [136], voir également [95]. En particulier, si $\|h\|_{L^1_{2+\gamma}} \in L^1(0,T)\ \forall T$ alors, par le lemme de Gronwall; $X_2 \equiv 0$ et le résultat est démontré. Mais d'après (i") cette condition n'est pas réalisée pour une donnée initiale $f_{in} \in L^1_2$ générale. Il est possible d'établir une version légèrement plus précise de (A.46), à savoir

$$(A.47) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}X_0 \le \|h\|_{L^1_\gamma}\,X_0 + \|h\|_{L^1}\,X_2 \\ \dfrac{d}{dt}X_2 \le \|h\|_{L^1_{2+\gamma}}\,X_0 + \|h\|_{L^1_2}\,X_2. \end{cases}$$

On montre alors par récurrence, à partir du système (A.47) et grâce à (A.45), que

$$\forall\, m, \quad \exists\, C_m \ \text{ t.q. } \ X_0(t), X_2(t) \le C_m\,t^m \quad \forall\, t \in [0,1].$$

On écrit alors,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{X_2}{t^m}\right) = \frac{1}{t^m}\,\frac{dX_2}{dt} - \frac{m}{t^{m+1}}\,X_2,$$

et on en déduit, à l'aide de (A.45) et (A.46), que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{X_2}{t^m}\right) \le (C_{2+\gamma} - m)\,\frac{X_2}{t^{m+1}} \le 0$$

en choisissant $m \ge C_{2+\gamma}$. Cela prouve bien que $X_2 \equiv 0$ sur $[0,1]$ et l'unicité est démontrée puisque $f(1,.) \in L^1_s$ pour tout $s > 2$, de sorte que $\|h\|_{L^1_{2+\gamma}} \in L^1(1,T)\ \forall T \ge 1$, et on peut utiliser l'argument donné au début de la preuve.

A.4 Analyse Numérique de l'équation de Boltzmann.

L'objectif qu'on se fixe ici est: pour tout $\Delta > 0$, calculer explicitement une solution approchée f_Δ de l'équation de Boltzmann, i.e. une fonction qui vérifie:

(a) le coût numérique du calcul de f_Δ doit être le plus bas possible,

(b) $f_\Delta \to f$ lorsque $\Delta \to 0$ (en un sens à préciser), avec f solution de (A.4),

(c) éventuellement, conserver au niveau discret les propriétés physiques des solutions de l'équation de Boltzmann: positivité, conservation (A.8), Théorème-H (A.9), ...

Aujourd'hui, ce programme n'est pas entièrement réalisé, i.e. on ne sait pas construire de discrétisation complète de (A.4) qui satisfasse (a), (b), (c).

Remarquons que si l'on sait établir la convergence (b) ci-desssus, on a évidemment démontré l'existence d'une solution à l'équation de Boltzmann. Les résultats de convergence de schéma numérique sont donc intimement liés aux résultats d'existence. Les travaux présentés ci-dessous portent sur la preuve de la convergence de schémas déterministes (le point (b)) pour plusieurs semi-discrétisations (en temps, en vitesse, en espace) de l'équation de Boltzmann. Les difficultés rencontrées sont essentiellement dûes aux cadres très faibles dans lesquels l'existence de solutions peut être établie. Le choix du modèle (équation de Boltzmann, équation de Boltzmann homogène) et du cadre (solutions dispersives, solutions renormalisées) est déterminant. En effet, plus la théorie d'existence est "forte", plus facilement on sera capable de démontrer un théorème de convergence. Dans tous les résultats sur l'équation de Boltzmann complète une difficulté constante est d'établir un résultat de compacité forte des moyennes en vitesses de (f_Δ), fausse au niveau discret mais vraie dans l'assymptotique $\Delta \to 0$.

Discrétisation en vitesses [261]. Une difficulté spécifique de l'équation de Boltzmann est bien sûr la discrétisation du terme de collisions. Les premières discrétisations ont été développées selon une approche stochastique introduite par Bird [36] et Nanbu [187] autour des années 1980. Ces algorithmes ont ensuite été étudiés entre autres par Babovsky, Illner, Neunzert, Wagner, Pulvirenti [20], [141], [21], [242], [209]. Le coût numérique de ces schémas est faible mais l'objectif (c) n'est jamais atteint, de plus, les convergences obtenues sont assez faibles.

Avec les progrès de l'informatique, des méthodes déterministes peuvent être envisagées. La discrétisation en vitesse consiste alors à remplacer l'équation de Boltzmann par un système d'équations de Boltzmann à répartition discrète de vitesses. On suppose que les particules ne prennent que les vitesses $C_1, ..., C_I \in \mathbb{R}^3$, et que la densité de particules ayant la vitesse C_i est $u_i(t,x) \geq 0$. Le gaz est décrit par la famille $\mathcal{U} = (u_i(t,x))_{1\leq i\leq I}$, et celle-ci est solution du système d'équations

$$(A.48) \qquad 1 \leq i \leq I \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial t} + C_i \cdot \nabla_x u_i = Q_i(\mathcal{U},\mathcal{U}) & (0,+\infty) \times \mathbb{R}^3, \\ u_i(0,x) = u_{0,i}(x) & \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

où le terme de collisions $Q_i(\mathcal{U},\mathcal{U})$ s'écrit

$$(A.49) \qquad Q_i(\mathcal{U},\mathcal{U}) = \sum_{1\leq j,k,\ell\leq I} \Gamma_{ij}^{k\ell} \left(u_k\, u_\ell - u_i\, u_j\right).$$

Dans (A.49) les coefficients $\Gamma_{ij}^{k\ell} \geq 0$ correspondent à la proportion de paires de particules de vitesses (C_k, C_ℓ) qui après collision prennent les vitesses (C_i, C_j), ils jouent donc le rôle d'une section efficace discrète, i.e. celui de B dans le cas continu. Différentes discrétisations sont proposées par Goldstein, Sturtevant et Broadwell [125], puis par Martin, Rogier et Schneider [181], [210] et enfin par Panferov et Heinst [192]. Nous renvoyons également à [85] et [49]. Leur coût est supérieur au coût des méthodes probabilistes, mais les modèles discrets (1.15)-(1.16) ont une structure très semblable à celle du modèle continu, de sorte que l'objectif (c) peut être atteint, au moins à ce niveau semi-discret en vitesse. Nous n'allons pas entrer dans les détails des discrétisations possibles $Q_i(f)$ de $Q(f)$, nous renvoyons par exemple à l'article récent [192] où un récapitulatif des différentes discrétisations est présenté.

En introduisant les quantités "continues"

$$f_n(t,x,v) = \sum_{i=1}^{I} u_i(t,x)\, \mathbf{1}_{\Lambda_i}(v), \qquad C_n(v) = \sum_{i=1}^{I} C_i\, \mathbf{1}_{\Lambda_i}(v),$$

où les Λ_i sont des "cellules" de $\mathbb{R}^3$ contenant C_i et de taille Δ_n, on peut réécrire le système (A.14)-(A.15) sous la forme

$$\frac{\partial f_n}{\partial t} + C_n(v)\cdot\nabla_x f_n = \iiint_{\mathbb{R}^9} B_n\,(f'_n\, f'_{n\star} - f\, f_{n\star})\, dv_\star dv' dv'_\star,$$

la section efficace B_n étant définie par

$$B_n(v,v_\star,v',v'_\star) = \sum_{i,j,k,\ell} \frac{\Gamma_{ij}^{k\ell}}{\Delta_n^3}\, \mathbf{1}_{v\in\Lambda_i}\, \mathbf{1}_{v_\star\in\Lambda_j}\, \mathbf{1}_{v'\in\Lambda_k}\, \mathbf{1}_{v'_\star\in\Lambda_\ell}.$$

Théorème A.6. ([261]). *Lorsque*

$$C_n(v)\to v, \qquad B_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} B\,\delta_{\mathcal{C}} \tag{A.50}$$

(en un sens faible à préciser) la suite (f_n) tend (à extraction d'une sous-suite) vers une solution f de l'équation de Boltzmann.

Récemment, Palcewski et Schneider [191] ont montré, en utilisant des résultats très pointus de théorie des nombres, que la discrétisation proposée par Goldstein, Sturtevant et Broadwell vérifiait le critère de convergence (A.50). Ces résultats prouvent donc la convergence d'un schéma semi-discret en vitesse, et valide en même temps les modèles discrets de l'équation de Boltzmann qui ont été étudiés par Broadwell, Cabannes, Gatignol, Tartar, Hamdache, Bony. Nous renvoyons à [121], [54] pour une présentations des différents modèles discrets.

Un mot sur la preuve de ce résultat qui repose sur deux idées fondamentales. D'une part il est nécessaire d'obtenir un lemme de compacité des moyennes en vitesses de (f_n) dans la limite $\Delta_n\to 0$. À noter qu'il est clair qu'un tel résultat est faux au niveau de l'équation discrète (A.48). Pour cela, il suffit d'écrire

$$\frac{\partial}{\partial t}\beta(f_n) + v\cdot\nabla_x\beta(f_n) = \beta'(f_n)\, Q_n(f_n,f_n) + \mathrm{div}_x\, R_n \tag{A.51}$$

avec

$$R_n := (v - C_n(v))\,\beta(f_n) \;\to\; 0 \quad L^2 \text{ fort},$$

(grâce à (A.50)) et d'appliquer le résultat (A.18)-(A.19) pour conclure. D'autre part, il faut pouvoir passer à la limite dans l'équation (A.51). Cela est possible sous la condition (A.50), et plus exactement sous la condition

$$\int_{\mathbb{R}^3}\!\!\int_{\mathbb{R}^3} B_n\,\varphi(v')\, dv' dv'_* \;\to\; \int_{S^2} B(v-v_*,\omega)\,\varphi(v')\, d\omega \quad \text{pour p.t. } \; v,v_*\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3,$$

qui peut être vue comme un résultat de consistance (assez fort). Ce résultat est démontré dans [38], [191], [185], [192].

Soulignons qu'une théorie spectrale a été développée par Pareschi et ses co-auteurs [193], [194], [195] pour différents modèles.

L'algorithme du splitting [260]. Une méthode systématiquement utilisée dans les codes numériques est de résoudre séparément et successivement, sur des pas de temps de plus en plus petits, la phase de transport et la phase de collisions:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \mathcal{A}\, f = -v \cdot \nabla_x f, \quad \text{puis} \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \mathcal{B}\, f = Q(f,f).$$

Valider cette méthode (sans aller plus avant dans les discrétisations de l'équation de transport et de l'équation de Boltzmann homogène) c'est démontrer la formule de Trotter

$$f(t) = e^{t(\mathcal{A}+\mathcal{B})}\, f_{in} = \lim_{n\to+\infty} \left(e^{\frac{t}{n}\mathcal{A}}\, e^{\frac{t}{n}\mathcal{B}}\right)^n f_{in}, \tag{A.52}$$

pour une solution f de l'équation de Boltzmann. Une preuve de (A.52) dans le cadre des solutions renormalisées a été obtenue dans [260]. Nous renvoyons aussi à [169] pour une présentation générale de la méthode de splitting, ainsi qu'à [93].

Ici encore, une des principales difficultés est de prouver un résultat de compacité des moyennes en vitesses adapté à la situation. Disons simplement que le théorème que nous utilisons (et prouvons) dans [260] est le suivant, voir aussi [45].

Théorème A.7 [260]. *Considérons (f_n) une suite de $L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^6))$ qui satisfait*

$$\frac{\partial}{\partial t} f_n + v\cdot\nabla_x f_n = \sum_k \delta_{k\,\Delta_{t,n}} \left(\int_{k\,\Delta_{t,n}}^{(k+1)\,\Delta_{t,n}} H_n\, d\tau\right) \tag{A.53}$$

avec

- $f_n \rightharpoonup f$ *dans* $L^2((0,T)\times\mathbb{R}^6)$ *faible,*
- (H_n) *est bornée dans* $L^2_{loc}([0,T]\times\mathbb{R}^6)$,
- $\Delta_{t,n} \to 0$.

Alors la suite la suite (g_n) définie par

$$g_n(t,x,v) := f_n(t_{\Delta_{t,n}}, x, v), \qquad t_{\Delta_{t,n}} = E(t/\Delta_{t,n})\,\Delta_{t,n} \tag{A.54}$$

satisfait pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$:

$$\int_{\mathbb{R}^3} g_n\,\varphi\,dv \to \int_{\mathbb{R}^3} f\,\varphi\,dv \quad L^2_{t,x} \text{ fort.} \tag{A.55}$$

Convergence du schéma d'Euler [263]. En collaboration avec B. Wennberg, nous étudions dans [263] des semi-discrétisations en temps (schémas d'Euler implicite et explicite) de l'équation de Boltzmann homogène. Nous démontrons la convergence pour ces schémas (et nous obtenons, en fait, un taux de convergence). Nous nous restreignons dans cette présentation au schéma d'Euler explicite.

On introduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un réel $\Delta_n > 0$ et Q_n l'opérateur de Boltzmann associé à la section efficace $B_n(z,\omega) := B(z,\omega) 1_{|z|\le n}$. Soit alors (f_n) la solution du schéma d'Euler

$$f_n(t,v) = f^k(v) \qquad \text{si } t \in [k\,\Delta_n, (k+1)\,\Delta_n[$$

avec (f^k) définie par récurrence par

$$f^0 = f_{in}, \qquad \frac{f^{k+1} - f^k}{\Delta_n} = Q_n(f^k, f^k).$$

La version tronquée Q_n de Q est faite pour assurer la positivité de f_n lorsqu'on impose

$$\Delta_n \, A_0 \, n^\beta \, \|f_{in}\|_{L^1} \leq 1. \tag{A.56}$$

On vérifie sans difficulté que f_n conserve la masse, l'impulsion et l'énergie (A.39), (A.40). En revanche, pour un tel schéma explicite on perd le contrôle de l'entropie de f_n. A noter néanmoins que dans le cas d'une section efficace B de type *molécules Maxwelliennes* ($\gamma = 0$) Villani montre dans [236] que

$$H(Q^+(f,f)) \leq H(f) \qquad \forall \, f, \tag{A.57}$$

ce qui suffit pour démontrer la décroissance de l'entropie. Voir aussi [177] et [226], [60]pour des preuves de (A.57) dans des cas particuliers.

Théorème A.8 [263]. *Si $f_{in} \in L^1_2$ et la condition (A.56) a lieu pour tout $n \geq 0$ alors*

$$f_n \ \rightarrow \ f \quad L^\infty(L^1_2),$$

où f est solution de l'équation de Boltzmann.

En particulier, le Théorème donne un résultat d'existence sous la seule hypothèse $f_{in} \in L^1_2$. Comme par construction cette solution satisfait $Y_2(f(t,.)) \leq Y_2(f_{in})$, on sait, d'après le Théorème A.5, que c'est l'unique solution de l'équation de Boltzmann.

La difficulté majeure dans la preuve du Théorème A.8 est de montrer que (f_n) est faiblement compacte dans $L^1_{t,v}$ puisqu'on n'a pas de contrôle sur l'entropie de f_n qui est l'information habituellement utilisée garantissant la compacité faible. La preuve repose sur une propriété de régularité du terme de gain itéré, un peu dans l'esprit du Théorème de régularité du terme de gain [164], [246], [44], [172], mais dont la preuve est beaucoup plus élémentaire. On démontre en effet que pour tout f, g, $h \in L^1_2$ on a

$$\int_A Q^+(f, Q^+(g,h)) \, dv \leq \omega(A) \, \|f\|_{L^1_2} \, \|g\|_{L^1_2} \, \|h\|_{L^1_2}, \tag{A.58}$$

avec $\omega(A) \to 0$ lorsque $|A| \to 0$. Alors en écrivant

$$f_n(t,v) \leq f_{in}(v) + \int_0^t Q^+(f_n, f_n) \, d\tau,$$

puis en itérant cette inégalité, il vient

$$\begin{aligned} f_n(t,v) &\leq f_{in}(v) + t \, Q^+(f_{in}, f_{in}) \\ &\quad + \int_0^t \!\! \int_0^\tau [Q^+(f_{in}, Q^+(f_n,f_n)(\sigma)) + Q^+(Q^+(f_n,f_n)(\sigma), f_n(\tau))] \, d\sigma d\tau. \end{aligned}$$

On en déduit grâce à (A.58) et au Lemme de Dunford-Pettis que (f_n) appartient à un compact faible. Il suffit alors de recopier la preuve du résultat de stabilité faible (Théorème A.3) pour conclure. Nous renvoyons à [117] pour une autre approche de la discrétisation en temps.

Discrétisation en temps et espace [276]. En collaboration avec T. Horsin et A. Vasseur, nous proposons dans [276] une discrétisation explicite en temps et espace de l'équation de Boltzmann et nous en démontrons la convergence dans le cadre des solutions dispersives. Il s'agit donc d'un pas de plus dans la direction d'une discrétisation totale de l'équation de Boltzmann. Nous choisissons le cadre (plus restrictif) des solutions dispersives plutôt que celui des solutions renormalisées (qui avait été considéré dans les preuves de la convergence de l'algorithme du splitting et de la convergence de la semi-discrétisation en vitesse) car ce dernier semble mal adapté au problème et ceci pour au moins deux raisons. D'une part, pour un schéma explicite nous perdons la borne sur l'entropie et la dissipation d'entropie, qui est une des informations fondamentales utilisées dans le résultat de stabilité faible des solutions renormalisées. D'autre part, même pour un schéma modifié qui serait implicite (et pour lequel une borne sur l'entropie et la dissipation d'entropie peut être obtenue) la discrétisation en temps et espace (sous forme de différences finies) semble inadaptée à la technique de renormalisation.

Le schéma que nous proposons est défini à partir de l'algorithme de splitting de la manière suivante, nous résolvons successivement et nous itérons:

1. une solution explicite de l'équation de transport (1.3),
2. une discrétisation d'Euler explicite de la phase de collision,
3. une projection sur des mailles en espace.

Afin d'être plus précis, introduisons une partition de $\mathbb{R}^3$ en cellules:

$$\mathbb{R}^3 = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{Z}^3} \Lambda_\alpha, \qquad \Lambda_\alpha = \prod_{i=1}^{3} [\alpha_i \, \Delta_{x,n}, (\alpha_i + 1)\, \Delta_{x,n}[;$$

et définissons l'opérateur de projection sur les cellules (Λ_α):

$$P_n \, \phi = \sum_\alpha P^\alpha \, \phi, \qquad (P^\alpha \, \phi)(x) := \frac{1}{\Delta_{x,n}} \int_{\Lambda_\alpha} \phi(y) \, dy \, \mathbf{1}_{\Lambda_\alpha}(x).$$

Partant de la condition initiale

$$f_n^0 = (P_n f_{in}) \, \mathbf{1}_{B_{R_{v,n}}}(v) \, \mathbf{1}_{B_{R_{x,n}/4}}(x)$$

on définit alors par récurrence

$$\begin{cases} (f_n^{k+1/3})^\sharp(x,v) := f_n^{k+1/3}(x + \Delta_{t,n} \, v, v) = f_n^k(x,v), \\ f_n^{k+2/3} = P_n \, f_n^{k+1/3}, \\ \dfrac{f^{k+1} - f^{k+2/3}}{\Delta_{t,n}} = Q_{R_{v,n}}(f^{k+2/3}, f^{k+2/3}), \end{cases}$$

ou, en d'autres termes,

$$(A.59) \qquad f_n^{k+1} = P_n(f_n^{k-\sharp}) + \Delta_{t,n} \, Q_{R_{v,n}}(P_n(f_n^{k-\sharp}), P_n(f_n^{k-\sharp})).$$

Ici, $Q_{R_{v,n}}$ désigne l'opérateur de Boltzmann associé à la section-efficace tronquée $(n \wedge B(z,\omega))$ $\mathbf{1}_{|z| \le R_{v,n}}$ qui permet de garantir la positivité de la suite (f_n^k). On définit ainsi pour un choix donné de $\Delta_{t,n}$, $\Delta_{x,n}$, $R_{n,v}$, $R_{n,x}$, T_n une solution approchée

$$(A.60) \qquad f_n(t,x,v) = \sum_k f_n^k(x - v\,(t - k\,\Delta_{t,n}), v) \, \mathbf{1}_{t \in [k\,\Delta_{t,n}, (k+1)\,\Delta_{t,n}[} \, \mathbf{1}_{t \in [0,T_n]}.$$

Théorème A.9 [276]. *Soit une donnée initiale* $0 \le f_{in} \le M_{in}$ *où* M_{in} *est défini par (A.27) ou (A.29) et notons* M *la Maxwellienne associée définie sur* $[0, T_*)$, $T_* \in (0, +\infty]$. *Il existe des suites* $(\Delta_{t,n})$, $(\Delta_{x,n})$, $(R_{x,n})$, $(R_{v,n})$, (T_n) *satisfaisant*

$$\Delta_{t,n},\, \Delta_{x,n} \,\to\, 0, \quad R_{x,n},\, R_{v,n} \,\to\, +\infty, \quad T_n \nearrow T^*,$$

telles que la suite (f_n) *définie par (A.59)-(A.60) vérifie*

$$0 \le f_n(t,x,v) \le M(t,x,v) \qquad [0,T_*) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \tag{A.61}$$

et il existe une sous-suite $(f_{n'})$ *et une solution dispervive* f *de l'équation de Boltzmann telles que*

$$f_n \rightharpoonup f \quad \text{faiblement dans} \quad (L^1 \cap L^\infty)((0,T_*) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3).$$

Faisons quelques remarques sur la méthode de preuve dans le cas $\gamma \in (-2, 0]$. La première étape consiste à construire une suite de Maxwelliennes en posant

$$M^k := C^k\, \xi^k, \qquad C^{k+1} = \left(1 + \frac{\Delta_{t,n}}{T_n^{\gamma+3}}\right) C^k + \Delta_{t,n}\, \frac{K_A\,(C^k)^2}{(1 + k\,\Delta_{t,n})^{3-\gamma}}$$

et de vérifier que l'on construit ainsi une sur-solution au schéma (A.59), i.e. que M^k satisfait

$$M_n^{k+1} \ge P_n\, M_n^{k-\sharp} + \Delta_{t,n}\, Q^+_{R_{v,n}}(P_n\, M_n^{k-\sharp}, P_n\, M_n^{k-\sharp}).$$

On en déduit que $0 \le f_n^k \le M_n^k$ pour tout k, et la borne (A.61) en découle.

Une seconde étape consiste à écrire l'équation satisfaite par f_n, à savoir

$$\frac{\partial f_n}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f_n = \sum_k \delta_{k\,\Delta_{t,n}}(t) \int_{k\,\Delta_{t,n}}^{(k+1)\,\Delta_{t,n}} \left(\frac{P_n\, g_n - g_n}{\Delta_{t,n}} + Q_{R_{n,v}}(P_n\, g_n, P_n\, g_n) \right) d\tau$$

où g_n est définie par (A.54), et d'établir la compacité forte des moyennes en vitesses de (g_n) pour ensuite adapter le résultat de stabilité présenté dans la section 2. Cela est rendu possible grâce à la généralisation suivante du Lemme de moyenne qui repose à la fois sur le Lemme de moyenne continu (A.18)-(A.19), sur la première version du Lemme de moyenne à temps discret (Lemme A.7) et sur des techniques d'éclatement développées dans [232], [233].

Théorème A.10 [276]. *Considérons une* (f_n) *suite de* $L^\infty((0,T) \times \mathbb{R}^6)$ *qui satisfait (A.53) avec*

- $f_n \rightharpoonup f$ *faiblement dans* $L^\infty((0,T) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$,
- $H_n = h_0 + \sum_{j=1}^3 \partial_{x_j} h_j^n$, *avec* $\{h_j^n\}$ *relativement compact dans* L^2 *et* (h_n^0) *bornée dans* L^2,
- $\Delta_{t,n} \to 0$ *et il existe une suite* $\varepsilon_n \to 0$ *telle que* $\varepsilon_n / \Delta_{t,n} \to +\infty$ *et* $\|\varepsilon_n^2\, H_n\|_{L^2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Alors, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, *la convergence forte (A.55) a lieu.*

Une extension naturelle du Théorème A.9 serait de démontrer la convergence d'un schéma complètement discret (en variables de temps, espace et vitesse) de l'équation de Boltzmann.

- Chapitre B -

Équations cinétiques posées dans un domaine

B.1. Conditions de réflexions sur la paroi du domaine

Dans cette partie on s'intéresse à un gaz confiné dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ que nous supposerons toujours borné (pour simplifier la présentation) et encore représenté par sa densité $f(t,x,v)$, $t \geq 0$, $x \in \bar{\Omega}$, $v \in \mathbb{R}^3$. Afin de décrire l'évolution du gaz il est nécessaire de dire ce qui se passe sur le bord du domaine, c'est-à-dire, d'ajouter à une équation cinétique décrivant l'évolution du gaz à l'intérieur du domaine (par exemple l'équation de Boltzmann (A.4)) des conditions aux limites. Ces conditions aux limites sont du type "réflexion", elles prennent la forme d'une relation liant les traces de l'inconnue f sur les ensembles

$$\Sigma_\pm = \{(x,v) \in \Sigma; \pm n(x)\cdot v > 0\} \quad \text{avec} \quad \Sigma = \partial\Omega \times \mathbb{R}^3,$$

où $n(x)$ désigne la normale extérieure au domaine Ω au point x de la paroi $\partial\Omega$. La trace "sortante" $\gamma_+ f := \gamma f \, \mathbf{1}_{\Sigma_+} = f_{|\Sigma_+}$ correspond à la densité de particules qui viennent heurter la paroi et la trace entrante $\gamma_- f := \gamma f \, \mathbf{1}_{\Sigma_-} = f_{|\Sigma_-}$ correspond à la densité de particules qui quittent la paroi. D'une manière générale, on impose que les traces sortantes et rentrantes soient liées par la relation

$$(B.1) \qquad \gamma_- f = \lambda \, K(\gamma_+ f) + \phi_- \qquad \text{sur} \quad (0,\infty)\times\Sigma_-,$$

où ϕ_- est une fonction donnée (qui correspond à une injection de particules dans le domaine), K est un opérateur de réflexion de la forme

$$K\phi\,(t,x,v) = \int_{v'\cdot n(x)>0} k(t,x,v,v')\,\phi(t,x,v')\,v'\cdot n(x)\,dv',$$

(qui décrit comment les particules qui touchent la paroi sont réémises (instantanément) vers l'intérieur du domaine) et $\lambda \in [0,1]$ (qui correspond à la proportion de particules touchant la paroi qui sont réémises). De plus, on suppose que K vérifie les propriétés (physiques) suivantes:

(H0) positivité: $k \geq 0$ p.p.;

(H1) normalisation: $\displaystyle\int_{v\cdot n(x)<0} k(t,x,v,v')\,|v\cdot n(x)|\,dv = 1$ p.p.;

(H2) principe de réciprocité: il existe (au moins) une fonction $M = M(t,x,v)$ définie sur $(0,+\infty)\times\Sigma$ telle que $K\,M = M$ sur $(0,+\infty)\times\Sigma_-$.

Afin de simplifier la présentation nous supposerons dans tout ce qui suit que $\phi_- = 0$, $\lambda = 1$ et que (H2) est (au moins) satisfait par une fonction Maxwellienne

$$(B.2) \qquad M(v) = c_{k,\Theta}\,\exp\left(-\frac{|v|^2}{2\,\Theta}\right),$$

avec $\Theta > 0$ constante et $c_{k,\Theta}$ choisie telle que (H1) ait lieu.

Remarquons que les hypothèses (H0) et (H1) correspondent au fait que toutes les particules atteignant la paroi sont réémises dans le domaine (car $\lambda = 1$) et pas davantage (car $\phi_- = 0$). L'hypothèse (H2) est quant à elle plus restrictive et revient à supposer que M_w est un équilibre "thermodynamique" pour l'opérateur de réflexion: ce qui signifie que si on envoie sur la paroi un "faisceaux" de particules avec une distribution en vitesse $M(v)$ alors après avoir heurter la paroi la distribution en vitesse des particules reste $M(v)$.

Donnons trois exemples d'opérateurs de réflexions couramment rencontrés.

- Réflexion locale; l'opérateur K est, par exemple, l'opérateur de réflexion spéculaire

$$(L\,\phi)\,(t,x,v) = \phi(t,x,R_x\,v), \quad R_x\,v = v - 2\,(v\cdot n(x))\,n(x),$$

qui modélise le fait qu'une particule atteignant la paroi en $x \in \partial\Omega$ avec la vitesse $v \in \mathbb{R}^3$ est réémise avec la vitesse $R_x\,v \in \mathbb{R}^3$.

- Réflexion diffuse ou de Maxwell; l'opérateur K s'écrit $K = D$,

$$(B.3) \qquad (D\,\phi)(t,x,v) = M_w(v)\;\tilde{\phi}(t,x), \qquad \widetilde{\phi}(t,x) = \int_{v\cdot n(x)>0} \phi(t,x,v)\,v\cdot n(x)\,dv,$$

avec M_w la Mawxellienne (B.2) normalisée ($c_{k,\Theta} = (2\,\pi\,\Theta_w^2)^{-1}$) associée à la température de la paroi $\Theta_w > 0$ de sorte que

$$(B.4) \qquad \begin{cases} d\mu_x(v) = M_w(v)\,n(x)\cdot v\;dv \text{ est une mesure de probabilité:} \\ \displaystyle\int_{v\cdot n(x)>0} d\mu_x(v) = 1 \quad \forall x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Cet opérateur modélise le processus de réflexion suivant: l'ensemble des particules qui heurtent la paroi au point $x \in \partial\Omega$ sont réémises dans la domaine selon le profil $M_w(v)$ ou, en termes probabilistes, une particule de vitesse v est réémise avec la vitesse v' qui est choisie aléatoirement suivant la loi de distribution M_w. La constante Θ_w correspond alors à la température (supposée fixée) de la paroi.

- Réflexion diffuse-élastique ou diffuse par niveau d'énergie; l'opérateur K est donné par $K = R$,

$$R(\phi)(t,x,v) = \int_{n(x)\cdot\omega'>0} k_0(x,|v|,\omega',\omega)\,\phi(t,x,|v|\omega')\,n(x)\cdot\omega'\,d\omega',$$

avec $k_0 > 0$ et k définie par $k(x,v,v') = |v|^{-3}\,k_0(x,|v|,v/|v|,v'/|v'|)\,\delta_{|v'|=|v|}$ satisfait (H1). Par exemple pour $k_0(x,|v|,\omega',\omega) = k_0$ (constante) cet opérateur modélise la réflexion suivante: l'ensemble des particules atteignant $x \in \partial\Omega$ avec une énergie $|v|^2$ sont réémises uniformément sur toutes les vitesses v' de même énergie. Cette réflexion est donc, d'une certaine manière, intermédiaire entre les deux précédentes.

La question de savoir quel opérateur de réflexion K doit-on prendre pour décrire de manière convenable la réflexion du gaz sur la paroi est un sujet difficile, parce que l'intéraction entre le gaz et la paroi met en jeu des processus physiques variés et complexes. Disons simplement que dès 1879 Maxwell [183] met en évidence que la seule réflexion locale n'est pas en accord avec l'experience et il propose la loi de réflexion suivante (basée sur des considérations phénoménologiques) qui se décompose en une partie de réflexion locale et une partie de réflexion diffuse

$$K\,\phi = (1-\alpha)\,L\,\phi + \alpha\,D\,\phi.$$

Le réel $\alpha \in [0,1]$, appellé coefficient d'accommodation, est fixé de manière assez arbitraire (on prendra, par exemple, $\alpha = 1/2$). Pour ces questions de modélisation nous renvoyons à [65], [66], [149] ainsi que [70], [71], [40] où sont aussi proposés d'autres exemples d'opérateurs de réflexion.

Comme nous l'avons déjà annoncé, à l'intérieur du domaine, la densité f satisfait une équation cinétique. Dans ce qui suit, nous supposons que cette équation est soit l'équation de Boltzmann, soit l'équation de Vlasov-Poisson, soit l'équation de Fokker-Planck, soit enfin une combinaison convexe de ces trois modèles. Plus précisément et pour fixer les idées nous supposerons que f satisfait l'équation

$$(B.5) \qquad \begin{cases} \Lambda_E f := \dfrac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + E \cdot \nabla_v f - \nu \Delta_v f = Q(f,f) \quad \text{dans} \quad (0,\infty) \times \mathcal{O} \\ E = -\nabla_x V_f, \quad -\Delta V_f = \rho \quad \text{dans} \quad (0,\infty) \times \Omega \end{cases}$$

avec $\nu \geq 0$, $\rho(t,x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} f(t,x,v)\,dv$ et $Q(f,f)$ est l'opérateur de Boltzmann (A.5). On ajoute la condition de réflexion totale

$$(B.6) \qquad \gamma_- f = K(\gamma_+ f) \qquad \text{sur} \quad (0,\infty) \times \Sigma_-,$$

et la condition de Dirichlet ou Neumann sur le potentiel

$$(B.7) \qquad V_f = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial V_f}{\partial n} = 0 \qquad \text{sur} \quad (0,\infty) \times \partial\Omega.$$

On prescrit enfin une condition initiale

$$(B.8) \qquad f(0,x,v) = f_{in}(x,v) \quad \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^3$$

et on s'intéresse au problème de Cauchy (B.5)–(B.8).

Plusieurs remarques s'imposent. Les résultats que nous présentons dans les sections qui suivent sont encore valables, par exemple, pour l'équation BGK, pour l'équation de la neutronique et pour l'équation de Boltzmann-Dirac (où dans ce dernier cas il convient de remplacer la Maxwellienne $M_w(v)$ dans (B.2) par une distribution de Fermi-Dirac, voir la partie C). Dans le cas d'une réflexion spéculaire, ou plus généralement une réflexion locale, les résultats d'existence s'étendent à l'équation de Vlasov-Maxwell et probablement à l'équation de Landau. En effet, pour une réflexion locale, la preuve de l'existence de solutions découle pratiquement de la preuve de l'existence de solutions pour l'équation posée dans l'espace tout entier $\Omega = \mathbb{R}^3$; une manière générale pour traiter ce problème est d'introduire une méthode de pénalisation, voir [265]. En revanche, pour un opérateur de réflexion non local les arguments que nous présentons ici ne suffisent pas pour démontrer l'existence de solutions pour l'équation de Vlasov-Maxwell et pour l'équation de Landau.

Il existe de nombreux travaux sur l'existence de solutions pour les équations de Boltzmann, Vlasov-Poisson et Fokker-Planck dans un domaine avec conditions de réflexion sur le bord. Nous renvoyons à [17], [18], [19], [68], [69], [128], [138] pour l'équation de Boltzman, à [7], [32], [206], [243] pour l'équation de Vlasov-Poisson et à [57] pour l'équation de Vlasov-Fokker-Planck. Nous renvoyons également à [207] et [135] pour l'étude de l'équation de Vlasov-Maxwell dans un domaine et à [129] et les réferences citées dans [268] pour l'existence de solutions pour des conditions de réflexions non linéaires.

Nous suivons la démarche présentée dans le chapitre précédent et nous commençons donc par chercher les bornes a priori que nous pouvons collecter sur une solution f de (B.5)–(B.8) et sur sa trace γf. Pour simplifier, nous présentons cela dans le cas de l'équation transport libre:

$$\begin{cases} \Lambda f = \dfrac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = 0 \\ \gamma_- f = K\,\gamma_+ f. \end{cases}$$

- Soit $j : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction convexe. Intégrons par rapport à toutes les variables l'équation satisfaite par $j(f/M)\,M$, il vient

$$\iint_{\mathcal{O}} j(f(t,.)/M)\,M\,dvdx + \int_0^t \int_{\partial\Omega} \mathcal{E}(\gamma_+ f)\,d\sigma_x dt = \iint_{\mathcal{O}} j(f_{in}/M)\,M\,dvdx,$$

avec $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{j,k,M}$ définie par

$$(B.9) \qquad \mathcal{E}(\phi) = \int_{v\cdot n(x)>0} j(\frac{\phi}{M})\,M\,v\cdot n(x)\,dv - \int_{v\cdot n(x)<0} j(\frac{K\,\phi}{M})\,M\,|v\cdot n(x)|\,dv.$$

Or par l'inégalité de Jensen et (H2) on a

$$j(\frac{K\,\phi}{M}) \le \int_{v'\cdot n(x)>0} j(\frac{\phi'}{M'})\,\frac{M'}{M}\,k\,v'\cdot n(x)\,dv'.$$

De (H1) et du théorème de Fubini on en déduit

$$\int_{v\cdot n(x)<0} j(\frac{\phi}{M})\,M\,|v\cdot n(x)|\,dv \le \int_{v'\cdot n(x)>0} j(\frac{\phi'}{M'})\,M'\,v'\cdot n(x)\,dv',$$

de sorte que $\mathcal{E}_{j,k}(\phi/M) \ge 0$. Ceci constitue la célèbre inégalité de *Darrozès-Guiraud* [84]. Les seuls choix possibles pour j compatibles avec la structure de l'équation de Boltzmann ou avec celle de l'équation de Vlasov-Poisson sont $j(s) = s$ et $j(s) = s\ln s - s + 1$. En prennant $j(s) = s$ (et alors $\mathcal{E}_{j,k} = 0$) on obtient la conservation de la masse totale

$$\iint_{\mathcal{O}} f(t,.)\,dvdx = \iint_{\mathcal{O}} f_{in}\,dvdx,$$

mais aucune information sur la trace. En choisissant $j(s) = s\ln s - s + 1$ on obtient la décroissance de l'entropie relative à la Maxwelienne M. En termes de bornes a priori cela se traduit par: pour une donnée initiale f_{in} de masse, énergie et entropie finies on a, pour la solution à l'intérieur du domaine,

$$(B.10) \qquad \sup_{t\ge 0} \iint_{\mathcal{O}} f(t,.)\,(1 + |v|^2 + |\log f(t,.)|)\,dvdx \le C_{f_{in}}$$

et pour la trace de la solution sur le bord du domaine

$$(B.11) \qquad \int_0^\infty \int_{\partial\Omega} \mathcal{E}(\frac{\gamma_+ f}{M})\,d\sigma_x dt \le C_{f_{in}}$$

où $\mathcal{E}$ est définie à l'aide de (B.9) avec $j(s) = s\ln s - s + 1$.

Bien sûr, pour l'équation de Boltzmann, l'équation de Vlasov-Poisson et l'équation de Fokker-Planck on obtient davantage d'information provenant des termes additionnels dans ces équations, et précisément on a

$$E \in L^\infty(0,T; W^{1,1}(\Omega)) \cap L^2((0,T)\times\Omega)$$

et $D(f) \in L^1((0,T)\times\Omega)$ qui, avec (B.10), impliquent (voir (A.36))

$$E\,\sqrt{f}, \quad \frac{Q(f,f)}{\sqrt{1+f}} \in L^1((0,T)\times\Omega\times B_R) \qquad \forall R > 0.$$

Pour l'équation de transport libre (ainsi que pour l'équation de Boltzmann, mais pas pour l'équation de Vlasov-Poisson) on peut aussi multiplier l'équation par $n(x) \cdot v\,\phi(v)$, avec $0 \leq \phi \in C^1(\mathbb{R}^3)$ donnée, et en intégrant par rapport à toutes les variables, on obtient la borne a priori supplémentaire sur la trace

$$\begin{aligned}\int_0^T \iint_\Sigma \gamma f\,\phi\,(n(x)\,\cdot v)^2\,\phi(v)\,dv\sigma_x dt &= \left[\iint_{\mathcal{O}} f(t,.)\,dxdv\right]_0^T \\ &+ \int_0^T \iint_{\mathcal{O}} f\,\phi\,v^t\,\nabla_x n(x)\,v\,dxdv \leq C(T, f_{in}).\end{aligned} \tag{B.12}$$

Soulignons que ces bornes sont les seules bornes a priori que l'on sache obtenir sur f (et sur sa trace) lorsque l'équation satisfaite par f est l'équation de Boltzmann ou lorsque l'opérateur de réflexion ne satisfait que (H0), (H1) et (H2) pour la Maxwellienne (B.2). Davantage de bornes a priori sont accessibles lorsqu'on considère l'équation de Vlasov-Poisson munie d'une condition de réflexion diffuse-élastique, voir [33], ou lorsque la réflexion est locale.

Il convient maintenant de donner un sens à l'équation (B.5)–(B.8) sous les seules bornes a priori (B.10), (B.11) et éventuellement (B.12). En ce qui concerne l'équation satisfaite par f à l'intérieur du domaine, le sens est celui des solutions renormalisées de DiPerna-Lions, nous renvoyons à la section A2 pour l'équation de Boltzmann, à [97] pour l'équation de Vlasov-Poisson, à [96] pour l'équation de Boltzmann-Fokker-Planck et d'une manière générale à [100]. La question suivante est de comprendre quel sens faut-il donner à la condition de réflexion (B.1). À cette dernière question, il y a essentiellement deux types de réponses.

- Une première possibilité est de définir γf (dans un espace de fonctions mesurables) comme étant la "trace" sur bord de la solution f de (B.5) (et il convient de préciser ce qu'on entend par là) et on interprète (B.1) comme une égalité p.p. sur $(0, \infty) \times \Sigma_-$. La prochaine section est consacrée à ce problème.

- Une seconde possibilité est de comprendre dans le même temps (B.5) et (B.6) en un sens faible, c'est-à-dire grâce à une formule de "dualité" contre une famille de fonctions tests convenablement choisies. Plus précisément, considérons une solution régulière de (B.5), multiplions cette équation par $\phi \in \mathcal{D}((0,T) \times \bar{\mathcal{O}})$ et intégrons en toutes les variables. En utilisant la formule de Stokes, on trouve

$$\int_0^T \iint_{\mathcal{O}} (f \Lambda_E^* \phi + Q(f,f)\,\phi)\,dvdxdt = \int_0^T \iint_\Sigma \gamma f\,\phi\,n(x)\,\cdot v\,dv\sigma_x dt,$$

où l'opérateur adjoint Λ_E^* est défini par

$$\Lambda_E^* \phi := \frac{\partial}{\partial t}\phi + v \cdot \nabla_x \phi + E \cdot \nabla_v \phi + \nu \Delta_v \phi + (\mathrm{div}_v\,E)\,\phi.$$

Or, par Fubini, on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} \gamma f\,\phi\,n(x)\,\cdot v\,dv &= \int_{n(x)\cdot v>0} \gamma_+ f\,\phi\,n(x)\,\cdot v\,dv - \int_{n(x)\cdot v<0} K(\gamma_+ f)\,\phi\,|n(x)\,\cdot v|\,dv \\ &= \int_{n(x)\cdot v>0} \gamma_+ f\,(\phi - K^*\,\phi)\,n(x)\,\cdot v\,dv\end{aligned}$$

avec

$$(K^*\,\phi)(t,x,v') := \int_{n(x)\cdot v<0} k(t,x,v,v')\,\phi(t,x,v)\,|n(x)\,\cdot v|\,dv.$$

En définissant donc
$$\mathcal{D}_K := \{\phi \in W^{2,\infty}((0,T) \times \mathcal{O}), K^* \phi = \phi\}$$
on dira que f est solution de (B.5)-(B.8) au sens faible si

$$(B.13) \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}_K \qquad \int_0^T \iint_{\mathcal{O}} (f \Lambda_E^* \phi + Q(f,f)\, \phi)\, dv dx dt = 0.$$

Il faut bien sûr que $\mathcal{D}_K$ soit assez riche pour que l'on retrouve la condition de réflexion (B.7) lorsqu'on suppose que f est régulière. Bien que cette formulation ait le mérite de ne pas poser le problème de définition de la trace sur le bord du domaine d'une solution de (B.5), elle est d'une utilité limitée, d'une part parce que le problème de description de $\mathcal{D}_K$ (pour s'assurer qu'il est assez riche) n'est pas forcément simple, et d'autre part parce que dans de nombreuses applications l'équation (B.5) n'a de sens qu'une fois renormalisée de sorte que l'équation (B.13) devient caduque (sauf si la réflexion est locale!). On trouvera un exemple d'application de cette approche dans [265] dans le cas de la réflexion spéculaire.

B.2. Théorèmes de trace

Dans cette section nous nous intéressons à la question suivante qui a été abordée dans la série de travaux [265], [266], [268]. Étant donnés un champ de vecteur $E = E(t,x,v)$, un terme source $G = G(t,x,v)$, une constante $\nu \in \mathbb{R}$ et une solution $g = g(t,x,v)$ de l'équation de Vlasov-Fokker-Planck

$$(B.14) \qquad \Lambda_E\, g = \frac{\partial g}{\partial t} + v \cdot \nabla_x g + E \cdot \nabla_v g - \nu\, \Delta_v g = G \quad \text{dans} \quad (0,T) \times \mathcal{O},$$

au sens des distributions ou au sens renormalisée, peut-on définir la trace γg sur le bord $(0,T) \times \Sigma$ du domaine et les traces $\gamma_t g =: g(t,.)$ sur les sections $\{t\} \times \mathcal{O}$ pour tout $t \in [0,T]$. Pour simplifier nous nous restreignons désormais au cas où $\nu = 0$, $E = E(t,x)$ de sorte que $\Lambda_E^* = \Lambda_E$, et on ne s'intéresse qu'à la seule trace γg sur $(0,T) \times \Sigma$.

En des termes légèrement différents, il s'agit donc du problème classique de définition de la trace γg d'une fonction appartenant à l'espace de type Sobolev associé à une équation de transport

$$W^p(\mathcal{O}) = \{g \in L^p(\mathcal{O}); \quad \Lambda_E g = v \cdot \nabla_x g + E \cdot \nabla_v g \in L^p(\mathcal{O})\}.$$

Posé en ces termes, le problème a été étudié lorsque $E \in W^{1,\infty}$ par Bardos [27], Cessenat [72], Ukaï [231], Agoshkov [4]. Il est important de souligner dès à présent qu'en général il n'est pas vrai que
$$\gamma g \in L^p(\Sigma; |n(x) \cdot v|^i\, dv d\sigma_x)$$
avec $i = 1$ (même si $E = 0$!), ce qui serait l'espace souhaité (par exemple, pour écrire une "formule de dualité" ou de Green). Ceci constitue l'une des difficultés majeures pour développer une théorie d'existence et d'unicité pour les équations cinétiques (mêmes linéaires) avec conditions aux limites de réflexions.

Rappelons dans le cas simple suivant sans dépendance en temps et où $E = E(x) \in W^{1,\infty}(\Omega)$ les différentes notions de trace, ou valeurs au bord, d'une fonction $g \in W^p(\mathcal{O})$, c'est-à-dire, d'une solution de l'équation

$$(B.15) \qquad g, G \in L^p(\mathcal{O}), \qquad a(y) \cdot \nabla_y g = G \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathcal{O}),$$

avec la notation $y = (x,v)$ et $a(y) = (v, E(x))$.

a) - Prolongement de l'application restriction.

Définition B.1. *On dit que g satisfaisant (B.15) admet une trace $\gamma_1\, g$ sur Σ si pour toute suite (g_n) telle que*

$$(B.16) \qquad g_n \in C^1_c(\bar{\mathcal{O}}), \qquad g_n \to g \quad L^p(\mathcal{O}) \quad \text{et} \quad a(y)\nabla_y g_n \to G \quad L^p(\mathcal{O})$$

on a

$$g_n|_\Sigma \to \gamma_1\, g \;\; L^p_{loc}(\Sigma^*) \quad \text{avec} \quad \Sigma^* = \Sigma \backslash \Sigma_0.$$

Pour que cette définition ait un sens, on suppose implicitement qu'il exite au moins une suite (g_n) qui satisfait (B.16), c'est-à-dire qu'on a le résultat de densité: pour tout g vérifiant (B.15) il existe une suite (g_n) satisfaisant (B.16). Cela repose sur la possibilité de régulariser la fonction g, ce qui est lié à une certaine régularité du bord Σ.

b) - Caractéristiques. On définit le flot Y_t associé à a par

$$\frac{dY}{dt} = a(Y) \qquad Y(0) = y.$$

Alors $Y_t = Y(t, y)$ est défini sur un intervalle maximal $]\tau_e(y), \tau_s(y)[$ avec

$$\tau_e(y) := \min\{\tau;\; Y(t, y) \in \mathcal{O},\, \forall t \in [\tau, 0]\}, \quad \tau_s(y) := \max\{\tau;\; Y(t, y) \in \mathcal{O},\, \forall t \in [0, \tau]\}.$$

Définition B.2. *On dit que g satisfaisant (B.15) admet une trace sur Σ s'il existe une fonction $\gamma_2\, g$ mesurable sur Σ^* qui vérifie, pour presque tout $y \in \mathcal{O}$ tel que $\tau_e(y) > -\infty$*

$$(B.17) \qquad g(y) = \gamma_2\, g(Y(\tau_e(y), y)) + \int_{\tau_e(y)}^0 G(Y(t, y))\, dt$$

et presque tout $y \in \mathcal{O}$ tel que $\tau_s(y) < \infty$

$$(B.18) \qquad g(y) = \gamma_2\, g(Y(\tau_s(y), y)) + \int_0^{\tau_s(y)} G(Y(t, y))\, dt.$$

On suppose ici implicitement que l'ensemble des $y \in \mathcal{O}$ tels que la trajectoire $Y_t(y)$ rencontre le bord en un point de Σ_0 est de mesure nulle dans $\mathcal{O}$. (C'est effectivement le cas, et c'est une conséquence du théorème de Sard). De la sorte, $\gamma_2\, g$ va bien être défini (de manière unique) par (B.17) et (B.18).

c) - Formule de Green.

Définition B.3. *On dit que g satisfaisant (B.15) admet une trace sur Σ s'il existe $\gamma_3\, g \in L^p_{loc}(\Sigma^*)$ satisfaisant*

$$\int_{\mathcal{O}} \big(g\, \Lambda_a \phi + G\, \phi\big)\, dy = \int_\Sigma \gamma_3\, g\, \varphi\, v \cdot n(x)\, dv d\sigma_x \qquad \forall \phi \in D(\bar{\mathcal{O}} \backslash \Sigma_0).$$

Quelques remarques.

- On écrit le plus souvent la définition B.1 dans un langage d'analyse fonctionnelle et sous la forme d'un théorème d'existence d'un opérateur trace défini sur $W^p(\mathcal{O})$ et prolongeant l'opérateur restriction défini dans $C^1_c(\bar{\mathcal{O}})$.

- C'est la définition B.2 qui est habituellement utilisée dans le cadre des solutions renormalisées de l'équation de Boltzmann où l'on a pas $G \in L^1_{loc}$ mais seulement $G(Y(t,y)) \in L^1(]\tau_e(y), \tau_s(y)[)$ pour presque tout $y \in \mathcal{O}$, voir [19] et les références citées. À noter également qu'une théorie de trace adapté aux problèmes spécifiques de l'équation de Boltzmann à été développée par [138], [56],

- La trace définie au sens de la définition B.3 est la notion de trace la plus faible, celle qui nécessite le moins de régularité sur E (par exemple, $E \in L^\infty$ suffit). C'est aussi la seule possible pour l'équation de Vlasov-Maxwell [135], [207].

d) - Formule de Green renormalisée.

Revenons au cadre annoncé au début de cette section. Nous allons définir une quatrième notion de trace, définie à l'aide d'une *formule de Green renormalisée*, qui généralise les définitions 1 et 2 au cas où le champ E possède une régularité de Sobolev et où l'équation (B.14) est satisfaite au sens des distributions ou au sens renormalisé. Ce résultat est bien adapté au cadre de la théorie de DiPerna-Lions, en particulier à l'équation de Vlasov-Poisson (pour laquelle le champ électrique a un régularité Sobolev, mais en général on ne sait pas montrer mieux) et à l'équation de Boltzmann.

Théorème B.4 (Cas $p=\infty$). *Supposons $g \in L^\infty((0,T)\times\mathcal{O})$, $E = E(t,x) \in L^1(0,T;W^{1,1}(\Omega))$, $G \in L^1((0,T)\times\mathcal{O})$, $\nu = 0$ et (B.14) est satisfait au sens des distributions. Alors g admet une trace $\gamma g \in L^\infty((0,T)\times\Sigma)$ définie à l'aide de la formule de Green*

$$(B.19) \qquad \int_0^T \iint_{\mathcal{O}} (\beta(g)\,\Lambda_E\phi + \beta'(g)\,G\,\phi)\,dvdxdt = \int_0^T \iint_\Sigma \beta(\gamma\, g)\,\phi\; n(x)\cdot v\; dvd\sigma_x dt,$$

pour tout $\beta \in W^{2,\infty}_{loc}(\mathbb{R})$ et toute fonction test $\phi \in \mathcal{D}([0,T]\times\bar{\mathcal{O}})$.

Ce théorème implique, en particulier, que pour tout β

$$(B.20) \qquad \gamma\,\beta(g) = \beta(\gamma\, g),$$

dès que cela a un sens. On peut donc le considérer comme une extension "jusqu'au bord" des résultats de régularité (A.20) et de renormalisation (A.21) "à l'intérieur" de DiPerna et Lions [100]. Voici une première extension de ce résultat.

Théorème B.5 (Cas $p \in [1,\infty)$). *Supposons $g \in L^\infty(0,T;L^p(\mathcal{O}))$, $E \in L^1(0,T;W^{1,p'}(\Omega))$, $G \in L^1((0,T)\times\mathcal{O})$, $\nu = 0$ et (B.14) est satisfait au sens des distributions. Alors g admet une trace γg définie sur $(0,T)\times\Sigma$ telle que*

$$(B.21) \qquad \gamma g \in L^1((0,T)\times\partial\Omega\times B_R, (n(x)\cdot v)^2\, dvd\sigma_x dt) \quad \forall\, R>0$$

et satisfait la formule de Green (B.20).

Soulignons à nouveau qu'en général il est faux que

$$\gamma g \in L^1((0,T)\times\partial\Omega\times B_R, |n(x)\cdot v|\, dvd\sigma_x dt) \quad \forall\, R>0,$$

voir [27] pour la construction d'un contre-exemple. Cependant on peut montrer (B.21) dans certains cas, par exemple, si Ω est le complémentaire d'un convexe et $E=0$. On peut quelque-fois améliorer (B.21) en introduisant la mesure $|n(x)\cdot v|\tau_E(x,v)\,dvd\sigma_x dt$ où $\tau_E(x,v)$ represente le temps de vie dans Ω d'une caractéristique issue de $(x,v)\in\Sigma^*$; toutefois (B.21) est optimal lorsque Ω est un convexe. Nous renvoyons à [4], [72], [265] pour toutes ces questions.

Il semble que la question de l'optimisation de l'espace d'arrivée dans les Théorèmes de trace n'a pas d'importance quant aux applications aux problèmes d'existence et d'unicité pour les équations cinétiques avec conditions de réflexion car, souvent, de meilleures bornes sur la trace que celles données par le Théorème de trace sont accessibles grâce à des bornes a priori.

La relation (B.20) permet d'étendre les résultats de trace à un cadre des solutions renormalisées de (B.14). Voici un énoncé possible, bien adapté aux équations de Boltzmann et Vlasov-Poisson.

Théorème B.6. *Supposons* $0 \le g \in L^\infty(0,T;L^1(\mathcal{O}))$, $E \in L^1(0,T;W^{1,1}(\Omega)) \cap L^2((0,T)\times\Omega)$, $G/\sqrt{1+g} \in L^1((0,T)\times\mathcal{O})$, $\nu = 0$ *et (B.14) est satisfait au sens renormalisé suivant*

$$(B.22) \qquad \Lambda_E\,\beta(g) = \beta'(g)\,G \quad \textit{dans } \mathcal{D}'((0,T)\times\mathcal{O}) \textit{ pour tout } \beta \in C^1(\mathbb{R}),\ \frac{\beta(s)}{\sqrt{1+s}} \in L^\infty(\mathbb{R}).$$

Alors g admet une trace γg *définie sur* $(0,T)\times\Sigma$ *telle que*

$$(B.23) \qquad \int_0^T\int_{\partial\Omega}\int_{B_R} \sqrt{\gamma g}\,(n(x)\cdot v)^2\,dvd\sigma_x dt < \infty \quad \forall\, R > 0$$

et satisfait la formule de Green (B.20).

Terminons cette section en donnant une idée de la preuve du Théorème B.4; les Théorèmes B2.2 et B2.3 se déduisent du Théorème B.4 en utilisant la propriété (B.20). À noter que contrairement aux résultats antérieurs ([231], [27], [72], [4]) la preuve ici n'utilise pas les caractéristiques.

- D'une part, on choisit $\phi = n(x)\cdot v\,\chi(v)$ avec $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ convenable et $\beta(s) = |s|$ dans la formule de Green (B.19) et on étalit la borne a priori

$$(B.24) \qquad \int_0^T\int_{\partial\Omega}\int_{B_R} |\gamma g|\,(n(x)\cdot v)^2\,dvd\sigma_x dt \le C_R\,[(1+\|E\|_{L^1})\,\|g\|_{L^\infty} + \|G\|_{L^1}].$$

- D'autre part, on régularise g grâce à un noyau de convolution ρ_n. On définit ainsi une suite (g_n) qui converge vers g et on vérifie que g_n est solution de l'équation (B.14) avec second membre G_n qui converge vers G dans L^1, c'est ici que l'on a besoin de régularité Sobolev sur le champ E. Grâce à (B.24) on montre que la suite (γg_n) des traces des solutions régularisées (qui elles sont définies par application d'un théorème de trace standard dans les espaces de Sobolev) est de Cauchy et donc converge vers une limite que l'on note γg. On vérifie sans peine que γg satisfait les conclusions du Théorème B.4.

B.3. Unicité et Semi-groupe pour l'équation de Vlasov linéaire

Il n'existe pas, à ma connaissance, de résultat général d'existence d'une unique solution pour l'équation linéaire

$$(B.25) \qquad \begin{cases} \Lambda_E f = \dfrac{\partial f}{\partial t} + v\cdot\nabla_x f + E\cdot\nabla_v f = 0 \\ \gamma_- f = K\,\gamma_+ f \end{cases}$$

avec $E = E(x) \in L^\infty(\Omega)\cap W^{1,1}(\Omega)$ et K satisfaisant (H0), (H1) (et éventuellement (H2)). On pourra consulter [27], [231] ainsi que [240], [29], [133], [204] pour des résultats d'existence et d'unicité concernant les équations de transport linéaire avec condition de réflexion sur le bord du domaine. Bien évidemment, si $f \in L^\infty(\mathbb{R}_+;L^1(\mathcal{O}))$ est une solution de (B.25) telle que

$$(B.26) \qquad \gamma f \in L^1((0,T)\times\Sigma, |n(x)\cdot v|\,dvd\sigma_x dt)$$

alors, en utilisant juste (H0), (H1), il vient

$$
\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{O}} |f(t,.)|\,dvdx &= \iint_{\mathcal{O}} |f(0,.)|\,dvdx + \int_0^t \iint_{\Sigma} |\gamma f|\, v\cdot n(x)\,dvd\sigma_x dt \\
&\le \iint_{\mathcal{O}} |f(0,.)|\,dvdx, \qquad (B.27)
\end{aligned}
$$

ce qui démontre l'unicité dans cette classe de fonctions. Cependant, on ne sait pas en général justifier (B.26) et donc ce calcul reste formel. On peut néanmoins montrer l'existence et l'unicité d'une solution à (B.25) dans les trois exemples d'opérateurs de réflexions présentés dans la section 1.

Pour démontrer l'existence on peut utiliser l'argument élémentaire suivant. On définit une suite (f_n) par récurrence en posant

$$
(B.28) \qquad \Lambda_E f_n = 0, \quad f_n(0,.) = \varphi, \quad \gamma_- f_0 = 0, \quad \gamma_- f_n = K\,\gamma_+ f_{n-1} \text{ si } n \ge 1.
$$

Si $0 \le \varphi \in L^1(\mathcal{O})$ on montre sans peine que $f_n \in C([0,\infty); L^1(\mathcal{O}))$, $\gamma f_n \in L^1((0,T)\times\Sigma, |n(x)\cdot v|\,dvd\sigma_x dt)$, que (f_n) et (γf_n) sont des suites croissantes et que $\|f_n(t,.)\|_{L^1(\mathcal{O})} \le \|\varphi\|_{L^1(\mathcal{O})}$ pour tout $t \ge 0$ et $n \in \mathbb{N}$, voir [231]. Par le Théorème de convergence monotone, il s'ensuit que f_n et γf_n convergent respectivement vers une fonction f et sa trace γf. De plus, f est solution de (B.25) associée à la donnée initiale φ. Pour démontrer l'unicité il nous faut distinguer plusieurs cas.

Opérateur de réflexion locale [265]. On suppose de plus que K s'écrit

$$
(B.29) \qquad K\,\phi(t,x,v) = \phi(t,x,L_x\,v) \text{ avec } |L_x\,v| = |v|.
$$

Étant données deux solutions f_1 et f_2 de même condition initiale, on introduit la fonction $g := \beta(f_2 - f_1)\,\chi(|v|/R)$ avec $\beta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$, $\beta(s) > \beta(0) = 0$ pour tout $s \ne 0$ et $0 \le \chi \in \mathcal{D}([0,\infty))$. Cette fois, grâce aux théorèmes de trace, g satisfait (B.25) et (B.26) et le calcul (B.27) (qui est maintenant licite) conduit à $g = 0$, ce qui prouve bien l'unicité de la solution $f \in L^\infty(0,T; L^1(\mathcal{O}))$ de (B.25), (B.29).

Opérateur de réflexion diffuse. On suppose que K vérifie (H0), (H1) et la condition

$$
(B.30) \qquad \exists \kappa_0 > 0, \quad \forall x, v' \in \Sigma_- \quad \int_{n(x)\cdot v>0, |v|\le 1} k(x,v,v')\,(n(x)\cdot v)^2\,dv \ge \kappa_0
$$

qui est bien satisfaite pour l'opérateur de réflexion de Maxwell. Dans ce cas, les théorèmes de trace, et en particulier (B.21), impliquent que la suite (f_n) construite pour montrer l'existence satisfait

$$
\kappa_0 \int_0^T \int_{\partial\Omega} \int_{n(x)\cdot v'>0} \gamma_+ f_n'\, v'\cdot n(x)\,dv' d\sigma_x dt \le \int_0^T \int_{\partial\Omega} \int_{n(x)\cdot v<0, |v|\le 1} K\gamma_+ f_n\,(v\cdot n(x))^2\,dvd\sigma_x dt \le C(T,\varphi).
$$

Il s'ensuit que γf satisfait (B.26) et l'unicité en découle.

Opérateur de réflexion diffuse-élastique [277]. On suppose enfin que K est de la forme

$$
K\,\phi(t,x,|v|\,\omega) = \int_{\omega'\cdot n(x)>0} k_0(x,|v|,\omega,\omega')\,\phi(t,x,|v|\,\omega')\,\omega', \cdot n(x)\,d\omega'
$$

que $k(x,v,v') = |v|^{-3}\,\delta_{|v'|=|v|}\,k_0(x,|v|,v/|v|,v'/|v'|)$ satisfait (H0), (H1) et que pour tout $U = [u_0,u_1] \subset (0,\infty)$ on ait

$$
(B.31) \qquad \exists \kappa_U \quad \forall x \in \partial\Omega, u \in U, \omega \in S^2 \quad \int_{\omega\cdot n(x)<0} k_0(x,u,\omega,\omega')\,(\omega\cdot n(x))^2\,d\omega \ge \kappa_U.
$$

On vérifie alors que pour toute fonction de l'énergie $M(v) = M(|v|)$ la condition (H2) est satifsaite. D'une part, pour $\varphi \in L^1(\mathcal{O}) \cap L^2(\mathcal{O})$, on démontre sans difficulté que la suite (f_n) construite à l'aide de (B.28) converge vers une solution f de (B.25) telle que $\|f\|_{L^p(\mathcal{O})} \le \|\varphi\|_{L^p(\mathcal{O})}$ pour $p = 1, 2$ et $\gamma f = \gamma f(t,x,v) \in L^1((0,T) \times \partial\Omega \times [0,R] \times S^2; u\,|n(x)\cdot\omega|\, d\omega du d\sigma_x dt)$ avec la décomposition $u = |v|$, $\omega = v/|v|$ et que cette borne suffit pour justifier le calcul (B.27) pour la fonction $g = f\,\chi(|v|/R)$. On obtient alors l'unicité dans la classe de solutions satisfaisant ces bornes. En d'autres termes, on a défini un semi-groupe $S(t) : X \to X$ avec $X = L^1(\mathcal{O}) \cap L^2(\mathcal{O})$ tel que pour tout φ la fonction $f(t,.) = S(t)\,\varphi$ est solution de (B.25). On prolonge par continuité-densité ce semi-groupe à $L^1(\mathcal{O})$ et on vérifie, grâce à l'hypothèse (B.31), que la condition au limite est bien satisfaite par la solution définie de la sorte.

B.4. Convergence renormalisée et stabilité faible.

Lorsque l'on s'intéresse au problème de Cauchy (B.5)–(B.8) on voit apparaître une seconde difficulté liée au manque d'estimation a priori sur la trace γf. En effet, si on considère une suite de solutions (f_n) de l'équation de Boltzmann (ou d'un problème régularisé) qui est bornée dans l'espace "physique", on est capable de montrer que (à extraction d'une sous-suite) f_n converge vers une fonction f, et que f est une solution renormalisée de l'équation (c'est la théorie de DiPerna-Lions). La trace γf est alors, par exemple, définie grâce à la formule de Green (B.19). Par contre, on est incapable de démontrer que γf_n converge vers γf faiblement dans L^1, et il s'ensuit que l'on a des difficultés pour passer à la limite dans (B.6) lorsque $\alpha \ne 0$ (la réflexion n'est pas purement locale) et pour démontrer que γf satisfait (B.6). Cependant Hamdache, Cercignani, Arkeryd, Maslova, Goudon [138], [68], [19], [69], [128] ont démontré, pour différentes conditions aux limites, que la trace γf satisfait la condition aux limites relaxée

$$(B.32) \qquad \gamma_- f \ge R(\gamma_+ f) \quad \text{sur } (0,\infty) \times \Sigma_-.$$

Signalons aussi que la théorie des solutions fortes de Shinbrot & al permet d'obtenir l'égalité dans (B.32) pour des solutions locales, voir [128], mais ne permet pas de démontrer l'existence de solutions globales dans le cas d'un domaine borné. En effet, cette théorie s'appuie sur une propriété de dispersion des particules qui devient caduque en domaine borné.

Dans cette section nous présentons un théorème de stabilité abstrait pour une suite de solutions de l'équation de Vlasov et nous en déduisons un théorème d'existence pour les équations de Vlasov-Poisson et de Boltzmann avec condition de réflexion générale, pour laquelle cependant la condition aux limites n'est satisfaite que sous la forme relaxée (B.32). Commençons par définir la convergence au sens renormalisée qui est la notion de convergence pertinente pour les traces de solutions d'une équation cinétique. Pour Y un espace topologique, on note $L = L_+(Y)$ l'ensemble des fonctions positives mesurables sur Y et $L^0 = L^0_+(Y)$ l'ensemble des fonctions positives mesurables finies presque partout.

Définition B.7 *Pour $M \in \mathbb{N}$ on pose $T_M(s) := s \wedge M = \min(s, M)$. On dit qu'une suite (ϕ_n) de L converge au sens renormalisée vers $\phi \in L$, et on écrit $\phi_n \stackrel{r}{\rightharpoonup} \phi$ ou $\phi = r - lim\phi_n$, s'il existe une suite $(\bar T_M)$ de L^∞ telle que*

$$T_M(\phi_n) \rightharpoonup \bar T_M \quad \sigma(L^\infty, L^1)\star \qquad et \quad \bar T_M \nearrow \phi \quad p.p.$$

À noter que c'est un sens très faible de convergence (plus faible, par exemple, que la convergence faible L^1 et la convergence presque partout) pour laquelle on peut néanmoins montrer le résultat suivant (dont la preuve est élémentaire).

Lemme B.8 *Soit* (ϕ_n) *une suite de* $L_+(Y)$ *et* S *un opérateur positif, borné de* L^1.

(i) Si $\phi_n \rightharpoonup \phi$ *faiblement dans* L^1 *alors* $\phi_n \stackrel{r}{\rightharpoonup} \phi$ *au sens renormalisé.*

(ii) Réciproquement, si $\phi_n \stackrel{r}{\rightharpoonup} \phi$ *au sens renormalisé et* (ϕ_n) *appartient à un compact faible de* L^1 *alors* $\phi_n \rightharpoonup \phi$ *faiblement dans* L^1.

(iii) Si $\phi_n \stackrel{r}{\rightharpoonup} \phi$ *au sens renormalisé alors* $S\,\phi \leq r - liminf\ S\phi_n$, *où ce dernier terme désigne la limite inférieure au sens de la convergence renormalisée.*

La preuve de (i) et (ii) se trouve dans [25] (dans un cadre plus général) et la propriété (iii) était connue pour la convergence au sens biting-L^1 faible, voir [2].

Voici maintenant un résultat de convergence générale.

Théorème B.9. *Soient des suites* (g_n), (E_n) *et* (G_n) *telles que*

$$g_n \rightharpoonup g \quad \text{faiblement dans} \quad L^\infty(0,T : L^1(\mathcal{O})),$$

$$\begin{cases} E_n \to E \quad \text{fortement dans } L^1((0,T) \times \Omega), \\ \text{bornée dans } L^1(0,T; W^{1,1}(\Omega)) \cap L^2((0,T) \times \Omega), \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1 + \delta\, g_n)^{-1}\, G_n \rightharpoonup \bar{G}_\delta \quad \text{faiblement dans} \quad L^1((0,T) \times \mathcal{O}), \\ \bar{G}_\delta \nearrow G \quad \text{p.p., avec} \quad G/\sqrt{1+g} \in L^1((0,T) \times \mathcal{O}), \end{cases}$$

et telles que g_n *est solution de l'équation de Vlasov au sens renormalisée (B.22). Alors la fonction* $g \in L^\infty(0,T; L^1(\mathcal{O}))$ *est solution de l'équation de Vlasov au sens renormalisée (B.22) et les traces* γg_n *et* γg *définies grâce au Théorème B.6 satisfont*

$$\gamma g_n \stackrel{r}{\rightharpoonup} \gamma g \quad \text{au sens renormalisé.}$$

En particulier, si γg_n satisfait la condition de réflexion (B.6) alors, d'après le Théorème B.9 et le Lemme B.8, γg satisfait la condition relaxée $\gamma_- f \geq K \gamma_+ f$ p.p. sur Σ_-. On en déduit le Théorème d'existence suivant.

Théorème B.10. *On suppose que l'opérateur de réflexion satisfait (H0)–(H2) avec* M_w *une Maxwellienne. Pour l'équation de Vlasov-Poisson, de Boltzmann et de Fokker-Planck (et pour toute combinaison convexe) il existe une solution qui satisfait les bornes naturelles, l'équation au sens renormalisée et la condition à la frontière sous forme relaxée (B.32).*

Une question fondamentale est donc de savoir si on peut établir que la solution satisfasse (B.6) au lieu de la condition relaxée (B.32). Il n'y a pas, à notre connaissance, une réponse générale valable pour tout opérateur de réflexion K satisfaisant (H0)–(H2). Cependant, dans certain cas on est capable de montrer qu'une telle condition est réalisée, par exemple, si $\lambda \in [0,1)$ (absorption partielle par la paroi [Hambache92]), $K = L$ (réflexion purement locale) (cf. la section précédente) et si K est la réflexion de Maxwell, c'est l'objet de la prochaine section. Au vu des techniques que nous présentons ici, il paraît clair que les résultats d'existence valables pour la condition de réflexion de Maxwell le restent pour la condition de réflexion élastique-diffuse.

B.5. La condition de réflexion de Maxwell.

Nous démontrons dans [268] le résultat d'existence suivant.

Théorème B.11. *On suppose que l'opérateur de réflexion K est l'opérateur de Maxwell. Pour l'équation de Vlasov-Poisson, l'équation de Boltzmann et l'équation de Fokker-Planck (et pour toute combinaison convexe de ces trois équations) il existe une solution renormalisée satisfant les bornes naturelles et dont la trace γf réalise la condition à la limite (B.6).*

Nous allons expliquer dans le cas de l'équation de Boltzmann et de l'équation de Vlasov-Poisson les principaux arguments de la preuve.

1. Équation de Boltzmann. Le multiplicateur $n(x)\cdot v$ est un invariant collisionnel pour l'opérateur de collision (A.5) et on en déduit grâce à la forme de l'opérateur de réflexion de Maxwell (voir section B3) la borne a priori supplémentaire

$$(B.33) \qquad \int_0^T \iint_\Sigma \gamma f\,(1+|v|^2)\,|n(x)\,\cdot v|\,dv\sigma_x dt \le C_{f_{in},T}.$$

De plus, la fonctionnelle $\mathcal{E}$ définie par (B.9) s'écrit ici

$$\mathcal{E}(\gamma_+ f) = \int_{n(x)\cdot v>0} h\left(\frac{\gamma_+ f}{M}\right) d\mu_x(v) - h\left(\widetilde{\gamma_+ f}\right),$$

avec $h(s) = s\,\log s - s + 1$ et les notations introduites en (B.3) et (B.4). Le résultat clef est alors le suivant:

Théorème B.12. *Si dans le Théorème B.9 la suite (γg_n) satisfait de plus les bornes (B.33) et (B.11) uniformément en n, alors il existe une sous-suite $(\gamma g_{n'})$ et une suite croissante d'ensembles (A_k) tel que $mes((0,T)\times\partial\Omega\backslash A_k) < 1/k$ et*

$$(B.34) \qquad \gamma_+ g_{n'} \rightharpoonup \gamma_+ g \textit{ faiblement } L^1(A_k\times\mathbb{R}^3).$$

Il est alors évident que $\widetilde{\gamma_+ g_{n'}} \rightharpoonup \widetilde{\gamma_+ g}$ faiblement dans $L^1(A_k)$ pour tout $k\ge 1$ et que si γg_n satisfait la condition aux limites (B.6) on peut passer à la limite dans celle-ci de sorte que $\gamma_- g = M(v)\,\widetilde{\gamma_+ g}$ dans $L^1(A_k)$ pour tout $k\ge 1$ et donc γg satisfait encore la condition de réflexion (B.6). Le Théorème B.12 suffit donc pour prouver un résultat de stabilité pour l'équation de Boltzmann pourvue de la condition de réflexion de Maxwell, et le Théorème B.11 en découle par la procédure habituelle de régularisation (voir la partie A pour la philosophie générale de la théorie de stabilité/existence de DiPerna-Lions).

Quelques mots sur la preuve du Théorème B.12. Commençons par rappeler la notion de convergence au sens biting L^1-faible et le résultat fondamental qu'est le biting-Lemma de Kadec, Pelzyński, Gaposkhin, Rosenthal, Chacon. Nous renvoyons à [25], [47], [64], [120], [145] pour une démonstration de ce dernier.

Définition B.13 *Soit Y un espace compact. On dit qu'une suite (ψ_n) de $L(Y)$ converge au sens du biting L^1-faible vers ψ, on note $\psi_n \stackrel{b}{\rightharpoonup} \psi$ ou $\psi = b - lim\,\psi_n$, s'il existe une suite Y_k telle que $mes(Y\backslash Y_k) < 1/k$ et*

$$\psi_n \rightharpoonup \psi \quad \textit{faiblement dans } L^1(Y_k) \quad \forall k\ge 1.$$

À noter que cela implique, en particulier, que $\psi \in L^0$.

Théorème B.14 (biting-Lemma). *Soient Y un espace compact et (ψ_n) une suite bornée dans $L^1(Y)$. Alors il existe $\psi \in L^1(Y)$ et une sous-suite $(\psi_{n'})$ telles que*

$$\psi_{n'} \overset{b}{\rightharpoonup} \psi \quad \text{au sens du biting } L^1\text{-faible.}$$

Par (B.33) la suite $(\widetilde{\gamma_+ g_n})$ est bornée dans $L^1([0,T] \times \partial\Omega)$ et on déduit du biting-Lemma (Théorème B.14) qu'il existe une sous suite $(\widetilde{\gamma_+ g_{n'}})$ et une suite (A_k) telle que $\text{mes}((0,T) \times \partial\Omega \backslash A_k) < 1/k$ et $(\widetilde{\gamma_+ g_{n'}})$ converge faiblement dans $L^1(A_k)$. Grâce au Lemme de Dunford-Pettis, on en déduit l'existence d'une fonction Φ convexe, positive, croissante, surlinéaire telle que

$$(B.35) \qquad \sup_{n'} \int_{A_k} \Phi(\widetilde{\gamma_+ g_{n'}})\, d\sigma_x dt < \infty.$$

De plus, Φ peut être choisie tel que $s \mapsto h(s) - \Phi(s)$ est convexe, de sorte que l'inégalité de Darrozès-Guiraud implique $\mathcal{E}_\Phi \leq \mathcal{E}_h$. On obtient donc

$$(B.36) \qquad \int_{A_k}\int_{\mathbb{R}^3} \Phi(\frac{\gamma_+ g_{n'}}{M(0)})\, d\mu_x(v) d\sigma_x dt \leq \int_{A_k} [\Phi(\widetilde{\gamma_+ g_{n'}}) + \mathcal{E}_h(\gamma_+ g_{n'})]\, d\sigma_x dt.$$

En conclusion, on déduit la convergence (B.34) de (B.36), (B.35), des bornes uniformes (B.33) et (B.11) et du Lemme B.8 pour identifier la limite.

2. Équation de Vlasov-Poisson. La méthode utilisée est valable dans de nombreuses autres situations (équations de Vlasov-Poisson, Fokker-Planck-Vlasov-Poisson, ...) pour lesquelles aucun résultat d'existence (même avec conditions aux limites relaxées) n'était connu dans le cas d'une réflexion partiellement diffuse (i.e. $\alpha \neq 0$). La difficulté supplémentaire pour ces équations provient du fait que les bornes physiques conduisent à une estimation $L^{1/2}$ de trace γf (c'est (B.22)). La seule manière de donner un sens à la trace semble donc être le sens renormalisé introduit dans [266] et [268], i.e. la trace est définie grâce à la formule de Green (B.19).

On peut en fait se passer de la borne (B.33) dans le Théorème B.12. En effet, le Théorème B.9 dit que $\gamma_+ g_n \overset{r}{\rightharpoonup} \gamma_+ g$ au sens renormalisée d'où on déduit aisément que, à extraction d'une sous-suite, $\widetilde{\gamma_+ g_n} \overset{r}{\rightharpoonup} \psi$ au sens renormalisée pour un certain $\psi \leq \widetilde{\gamma_+ g}$. Or, il est possible d'établir une borne a priori un peu plus faible que (B.33) en combinant (B.23) et (B.30), à savoir

$$\int_0^T \int_{\partial\Omega} \sqrt{\widetilde{\gamma_+ g}}\, d\sigma_x dt \leq C(f_{in}, T),$$

ce qui implique $\psi \in L^0$.

On utilise ensuite l'extension suivante du biting Lemma: la convergence au sens renormalisée implique, à extraction d'une sous-suite, la convergence au sens du biting Lemma. L'implication inverse avait été démontrée par Ball et Murat [25]. Précisément, on a:

Théorème B.15. *Soient Y un espace compact et (ψ_n) une suite de $L(Y)$. À extraction d'une sous-suite, les deux assertions suivantes sont équivalentes:*

$$\psi_n \overset{b}{\rightharpoonup} \psi \text{ au sens biting } L^1\text{-faible (et donc } \psi \in L^0)$$
$$\psi_n \overset{r}{\rightharpoonup} \psi \text{ au sens renormalisé et } \psi \in L^0$$

Par conséquent, en utilisant ce théorème avec $\psi_n = \widetilde{\gamma_+ g_n}$, on obtient que $(\widetilde{\gamma_+ g_n})$ converge au sens biting L^1-faible, d'où on déduit (B.35) et la fin de la preuve de (B.34) reste inchangée.

Pour terminer cette partie, citons quelques **problèmes ouverts** qui semblent intéressants.

- Est-il possible d'étendre à des ouverts peu régulier (par exemple, dans le cadre des domaines considérés dans [4], [18] pour la théorie de trace de l'opérateur de transport libre) la théorie de trace pour des champs de régularité Sobolev développée dans [265], [266], [268] pour des ouverts réguliers?

- Est-il possible d'obtenir la condition de réflexion de Maxwell (ou la condition de réflexion pour opérateur K général) à partir d'un modèle posé dans tout l'espace ou d'un modèle avec condition de réflexions locales, un peu dans le même esprit que celui dans lequel nous avons obtenu dans [265] la condition de réflexion spéculaire comme modèle limite d'une famille d'équations de Vlasov posées dans tout l'espace par une méthode de pénalisation.

- Poursuivre l'analyse de modèles cinétiques avec conditions aux limites non linéaires commencée dans [129].

- Chapitre C -

Équation de Boltzmann pour un gaz de particules Quantiques et/ou Relativistes

Ce chapitre est constitué de deux parties. Dans la première partie (section C.1) nous décrivons l'équation de Boltzmann pour un gaz constitué d'un seul type de particules quantiques et/ou relativistes. Le noyau de collision possède une dépendance cubique en la densité des particules. Nous présentons ensuite les quelques résultats rigoureux connus à ce jour pour l'équation de Boltzmann pour les gaz de Bosons: descriptions des états d'équilibres, théorie d'existence et de comportement en temps grand sous une hypothèse de troncature de la section efficace introduite par X. Lu [175].

Dans la seconde partie (section C.2) nous dérivons formellement un modèle simplifié décrivant l'évolution d'un gaz de Bosons en intéraction avec un bain de Fermions au repos. Ce modèle est maintenant quadratique en la densité des particules. Son caractère moins non-linéaire nous permet d'en faire une analyse plus poussée que celle connue pour le modèle cubique de la section C.1. Les résultats présentés dans cette section constituent l'essentiel des résultats obtenus dans [264], [267], [271] et [275].

C.1. Gaz constitué d'une seule espèce de particules

Lorsqu'au lieu de considérer un gaz de particules classiques comme dans la première partie, on s'intéresse à l'évolution d'un gaz de particules Quantiques et/ou Relativistes, il convient de remplacer l'équation de Boltzmann classique par l'équation de Boltzmann suivante sur la densité $f(t,p) \geq 0$ de particules qui possèdent l'impulsion $p \in \mathbb{R}^3$ à l'instant $t \geq 0$

$$(C.1) \quad \frac{\partial f}{\partial t} = Q(f) = \iiint_{\mathbb{R}^9} w\, \delta_{\mathcal{C}} \left[f'\, f'_\star\, (1+\tau\, f)\, (1+\tau\, f_\star) - f_\star\, f_\star\, (1+\tau\, f')\, (1+\tau\, f'_\star) \right] dp_\star dp' dp'_\star,$$

où $\tau = 1$ si le gaz est constitué de Bosons (c'est alors l'équation de Boltzmann-Bose), et $\tau = -1$ s'il est constitué de Fermions (c'est dans ce cas l'équation de Boltzmann-Fermi). Les termes supplémentaires du type $(1+\tau\, f)\,(1+\tau\, f_\star)$ rendent compte des effets quantiques, cf. c). Bien sûr, on retrouve l'équation de Boltzmann classique en choisissant $\tau = 0$. Cette équation a été progressivement proposer autour des années 1930 par [189], [230], [162].

Le caractère relativiste ou non relativiste est pris en compte dans le choix de la variété des collisions admissibles $\mathcal{C}$. Dans le cas de particules non relativistes, $\mathcal{C}$ est toujours défini par (A.3) et, dans le cas de particules relativistes, $\mathcal{C}$ est défini par

$$(C.2) \qquad \mathcal{C} := \left\{ (p, p_*, p', p'_*) \quad / \quad \begin{array}{c} p + p_* = p' + p'_* \\ \mathcal{E}(p) + \mathcal{E}(p_*) = \mathcal{E}(p') + \mathcal{E}(p'_*) \end{array} \right\},$$

où $\mathcal{E}$ est l'énergie relativiste définie par $\mathcal{E}(p) = \gamma\, m\, c^2$, $\gamma = \sqrt{1 + \frac{|p|^2}{c^2\, m^2}}$.

Les propriétés fondamentales des solutions sont encore la conservation de la masse, de l'impulsion et de l'énergie

$$(C.3) \qquad \int_{\mathbb{R}^3} f(t,p) \begin{pmatrix} 1 \\ p \\ \mathcal{E}(p) \end{pmatrix} dp = \int_{\mathbb{R}^3} f_{in}(p) \begin{pmatrix} 1 \\ p \\ \mathcal{E}(p) \end{pmatrix} dp,$$

et la croissance de l'entropie (A.5) avec $H(f)$ définie cette fois-ci par

$$(C.4) \qquad H(f) := \int_{R^3} h(f(p))\, dp, \qquad h(f) = \tau^{-1}\,(1+\tau\, f)\, \ln(1+\tau\, f) - f\, \ln\, f.$$

Comme dans le cas de l'équation de Boltzmann classique, on se pose les questions suivantes: description des états d'équilibres, existence et unicité des solutions, preuve de la conservation de l'énergie et du Théorème-H, convergence de la solution vers un état d'équilibre asymptotiquement en temps grand. Il est naturel de penser que cet état d'équilibre est celui qui réalise le maximum de l'entropie (C.4) sous la contrainte (C.3).

À la lumière de ces remarques générales, on peut penser que l'analyse des équations de Boltzmann Quantiques et Relativistes (C.1), (C.2) est très semblable à celle de l'équation de Boltzmann classique (A.1), (A.4). Il n'en est rien. Il s'avère que leur étude en est beaucoup plus difficile pour au moins deux raisons. D'une part le caractère relativiste (i.e. la variété des collisions $\mathcal{C}$) rend plus compliqué la paramétrisation du noyau de collision. D'autre part, le caractère quantique modifie le cadre fonctionnel de manière importante et le terme de collision devient "hautement" non linéaire. Une première façon de voir cela est d'observer que la masse, l'énergie et l'entropie d'une fonction de distribution f sont finies si, et seulement si,

$$(C.5) \qquad \begin{array}{ll} f \in L^1_s \cap L \log L & \text{dans le cas non quantique,} \\ f \in L^1_s \cap L^\infty & \text{dans le cas de Boltzmann-Fermi,} \\ f \in L^1_s & \text{dans le cas de Boltzmann-Bose,} \end{array}$$

avec $s = 2$ dans le cas non relativiste et $s = 1$ dans le cas relativiste.

C.1.1. Maximisation de l'entropie. Pour $N, E \ge 0$, $P \in \mathbb{R}^3$ fixé, définissons

$$(C.6) \qquad X \;=\; \left\{ g\,;\; \int_{\mathbb{R}^3} g(p) \begin{pmatrix} 1 \\ p \\ \mathcal{E}(p) \end{pmatrix} dp = \begin{pmatrix} N \\ P \\ E \end{pmatrix} \right\}$$

et considérons le problème de maximisation de l'entropie

$$(C.7) \qquad \exists\, F \in X; \quad H(F) = \max_{g \in X} H(g).$$

Heuristiquement, si F est solution de ce problème de maximisation, il existe des multiplicateurs de Lagrange $\mu \in \mathbb{R}$, $\beta^0 \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$< \nabla H(F), \varphi > = \int_{\mathbb{R}^3} h'(F)\, \varphi\, dp \;= < \beta^0\, \mathcal{E}(p) - \beta \cdot p - \mu, \varphi > \qquad \forall \varphi,$$

ce qui implique

$$\ln(1+\tau\, F) - \ln\, F = \beta^0\, \mathcal{E}(p) - \beta \cdot p - \mu$$

et donc

$$(C.8) \qquad F(p) = \frac{1}{e^{\nu(p)} - \tau} \qquad \text{avec} \quad \nu(p) := \beta^0\, \mathcal{E}(p) - \beta \cdot p - \mu\ .$$

On retrouve que F est une Maxwellienne lorsque $\tau = 0$. La fonction F ainsi définie est appelée distribution de Bose-Einstein lorsque $\tau > 0$ et distribution de Fermi-Dirac lorsque $\tau < 0$. Il s'avère qu'on n'obtient pas ainsi toutes les solutions de (C.6), (C.7). Il convient d'y ajouter les états de Fermi-Dirac "dégénérés" χ et les états de Bose-Einstein "condensés" $\mathcal{B}$ définis par

$$\chi = \mathbf{1}_{\nu(p)\leq 1}, \qquad \mathcal{B} := \frac{1}{e^\nu - 1} + \alpha\,\delta_u, \tag{C.9}$$

avec $\alpha \geq 0$ et $u \in \mathbb{R}^3$. Nous renvoyons à la section C.2 pour une explication de ce fait dans un cas un peu plus simple. Lorsque $\alpha > 0$ on dit qu'il y a condensation de Bose.

Théorème C.1 ([275]). *Pour tout N, E, P tels que $X \neq \emptyset$ il existe une unique solution au problème de maximisation de l'entropie. Lorsque $\tau = -1$ cette solution est une distribution de Fermi-Dirac, et lorsque $\tau = 1$ cette solution est une distribution de Bose-Einstein.*

La difficulté ici réside essentiellement dans la construction d'un état de Fermi ou de Bose de la forme (C.8) ou (C.9) ayant masse, impulsion et énergie prescrites. Pour cela on utilise une transformation de Lorentz afin de se ramener dans le repère du centre de masse. Dans le cas relativiste mais non quantique, ce problème avait été résolu par R.T. Glassey [123].

C.1.2. L'équation de Boltzmann-Fermi non relativiste et de Boltzmann relativiste.

Les problèmes d'existence, d'unicité et de convergence en temps grand vers l'équilibre des solutions de l'équation de Boltzmann-Fermi ont été abordés par J. Dolbeault [103] puis par P.-L. Lions [166]. Dans [275], nous établissons de nouveaux résultats d'existence de solutions pour l'équation de Boltzmann-Fermi (pour certaines sections efficaces ne vérifiant pas l'hypothèse de cut-off angulaire). Nous étudions aussi le comportement asymptotique en temps grand de ces solutions. Il semblerait que dans un travail récent, X. Lu [176] traite aussi cette question. Des équations quadratiques décrivant l'évolution de gaz de Fermions dans les semi-conducteurs ont aussi été extrêmement étudiés entre autres par l'école française (Degond, Poupaud, Nouri, Ben Abdahla, ...) et par l'école autrichienne (Markowich, Mauser, ..), nous renvoyons au livre [180] pour de plus amples détails.

L'étude de l'équation de Boltzmann relativiste a été initiée par Y. Choquet-Bruhat [77] et reprise plus récemment par Glassey, Strauss, Andréasson [124], [11] auxquels nous renvoyons. Dans [275] nous écrivons précisément la paramétrisation dans le centre de masse de l'opérateur de Boltzmann relativiste, ce que nous ne sommes pas arrivés à trouver dans la littérature. Cela devrait permettre d'aborder des questions telles que l'assymptotique de Landau dans un cadre relativiste. Nous renvoyons également à [157] pour une première étude de l'équation de Landau relativiste et de l'équation de Landau pour les Fermions.

C.1.3. L'équation de Boltzmann-Bose non relativiste.

Commençons par quelques considérations naïves et très approximatives concernant les Bosons (que le lecteur plus savant veuille bien nous en excuser). D'abord qu'est-ce qu'un Boson? On apprend en mécanique quantique que c'est une particule possédant en spin entier. Ce n'est donc pas un Fermion, qui par définition, est une particule de spin demi entier. Les électrons, les protons, les neutrons sont des exemples de Fermions. Les exemples familiers de Bosons sont plus rares, citons toutefois les photons qui sont des Bosons très particuliers (de masses nulles), et comme les spins s'aditionnent, toute paire de Fermions est un Boson (on dit que deux particules forment une paire si elles se comportent comme si elles ne constituaient qu'une seule particule). Attention cependant, deux Fermions ne forment pas en général une paire (car un tel couple est en général très instable), sauf dans certaines conditions expérimentales très particulières (pour une température proche de 0 K) dans lesquelles ce couple devient stable. Un exemple: deux électrons peuvent, soit rester deux particules indépendantes (deux Fermions), soit former une paire (*d'électrons de Cooper*) et constituer ainsi un Boson.

On sait que les Fermions jouissent de la propriété connue sous le nom de *Principe d'exclusion de Pauli*: un Fermion a moins de chance de “basculer” dans l'état ε si cet état est déjà occupé par un autre Fermion. Les Bosons, eux, jouissent de la propriétés inverses: un Boson a d'autant plus de chance de “basculer” dans l'état ε que cet état est déjà occupé par un autre Boson. Ces deux propriétés opposées sont responsables des termes supplémentaires du type $1 + \tau f$, $\tau = \pm 1$, dans l'opérateur de Boltzmann (C.1).

Signalons encore deux propriétés caractéristiques des Bosons:

- D'une part, Kapitsa et Allen observent en 1937 qu'un fluide d'Helium He^3 à très basse température (de l'ordre de $2.6\,10^{-3}\,K$) commence à avoir un comportement étrange: la viscosité du fluide devient nulle, il remonte le long des parois, par exemple. Ce phénomène, dit de *super-fluidité*, s'expliquerait par le fait que les atomes d'Helium constituant le fluide se regroupent par paires afin de former des Bosons. De même, les paires d'électrons de Cooper seraient responsables de la supra-conductivité (un courant passe sans résistance dans un conducteur (et donc sans perte d'énergie par effet Joule)) .

- D'autre part, Bose et Einstein en 1924 [42], [110], [111] prédisent que dans certaines conditions expérimentales (pour un gaz de masse donnée à température suffisamment petite, ou donc, pour un gaz d'énergie donnée de masse suffisamment grande) une fraction macroscopique d'un gaz de Bosons se retrouve dans l'état fondamental (de plus basse énergie). On dit alors qu'il y a apparition d'un condensat de Bose-Einstein. Ce phénomène n'a été observé expérimentalement que très récemment (la première fois en 1995 par Anderson et Davis).

Le lien entre la condensation de Bose-Einstein et la super-fluidité (et la supra-conductivité) n'est pas clairement établi à ce jour et suscite de vives discussions. Les condensats de Bose, se créant au niveau microscopique, expliquent-ils un comportement (macroscopique) tel que la super-fluidité? Nous n'aborderons ici ni la super-fluidité, ni la supra-conductivité. Notre but, dans la suite de ce chapitre, est de tenter de comprendre divers modèles mathématiques décrivant un gaz de Bosons et, lorsque cela est possible, d'analyser l'apparition de condensats de Bose-Einstein.

Revenons maintenant à l'équation de Boltzmann-Bose (C.1). Ici, la situation est beaucoup plus compliquée que pour l'équation de Boltzmann et de Boltzmann-Fermi. En effet la borne naturelle (C.5) ne suffit pas pour définir le noyau de collision: il est faux (par exemple lorsque $w = 1$) que

$$(C.10) \qquad f \in L^1_2 \ \text{ implique } \ \|Q(f)\|_{L^1_{loc}} < \infty.$$

Par voie de conséquence, il n'existe à ce jour aucun résultat d'existence pour l'équation de Boltzmann-Bose (C.1) sans hypothèse simplificatrice (donc même pour le cas modèle $w = 1$).

Les premier résultats mathématiques concernant l'équation de Boltzmann-Bose sont dûs à X. Lu [175]. Il introduit deux hypothèses simplificatrices

$$(1) \quad f \text{ est radiale}, \qquad (2) \quad w \le C \min(|p - p'|, 1)$$

ce qui permet de montrer cette fois-ci que (C.10) est vrai. Sous ces hypothèses Lu démontre l'existence de solutions globales L^1 et étudie leur comportement en temps grand. Si l'hypothèse (1) n'est pas trop restrictive, l'hypothèse (2) l'est: aucune section efficace w ”physique” ne la vérifie. Les résultats obtenus par Lu sont schématiquement les suivants.

Théorème C.2 ([175]). *Sous l'hypothèse (A.17) sur B avec $\gamma \in (-3, 1]$ et la troncature (2), pour toute donnée initiale f_{in} radiale de masse, énergie et entropie finie, il existe une solution*

$f \in C([0,\infty), L^1(\mathbb{R}^3))$ radiale qui conserve la masse, l'énergie et vérifie le Théorème-H. De plus, la solution satisfait: pour toute suite (t_n) croissant vers l'infini, il existe une sous-suite (t_{n_j}) et une distribution de Bose-Einstein $\mathcal{B}$ régulière telle que

$$f(t_{n_j}, .) \overset{b}{\rightharpoonup} \mathcal{B} \quad biting - L^1(\mathbb{R}^3) \text{ faible.}$$

Si de plus, B est de la forme (A.16) avec $\gamma \in [0,1]$, pour toute énergie E il existe une masse critique $M_c = M_c(E)$ telle que si $M(f_{in}) \leq M_c$ et $E(f_{in}) = E$ alors

$$f(t_n, .) \rightharpoonup \mathcal{B}_{in} \quad L^1(\mathbb{R}^3) \text{ faible,}$$

où $\mathcal{B}_{in}$ est la distribution de Bose-Einstein (régulière) de mêmes moments que f_{in}.

À noter que dans le premier résultat de convergence asymptotique en temps grand on ne sait pas identifier la distribution $\mathcal{B}$. En particulier, on ne sait pas montrer que c'est la distribution de Bose-Einstein de mêmes moments que f_{in}. La seule information est $M(\mathcal{B}) \leq M(f_{in})$, $E(\mathcal{B}) \leq E(f_{in})$. Dans [275] nous reprenons et nous simplifions la preuve de Lu de l'existence de solution de l'équation de Boltzmann-Bose avec hypothèse de troncature, ce qui nous permet aussi d'étendre ces résultats d'existence à un cadre mesures (qui est un cadre plus naturel au vu des états d'équilibres (C.9)).

Ces résultats peuvent sembler en contradiction avec la conjecture formulée dans la littérature physique selon laquelle une solution f de l'équation de Boltzmann-Bose développe une singularité à l'origine en temps fini, à la suite de quoi un condensat de Bose-Einstein apparaît à l'origine ($f = g + \alpha\delta_0$ avec g régulière et $\alpha > 0$). Nous renvoyons à [212], [213], [205], [144] pour des arguments étayant un tel scénario. En fait, l'hypothèse (2) atténue les intéractions entre particules de basses energies et empêche donc le phénomène de condensation de Bose-Einstein de se produire (en temps fini).

C.2. Gaz constitué de deux espèces de particules dont l'une est à l'équilibre

Nous présentons dans cette section l'essentiel des résultats obtenus en collaboration avec M. Escobedo, M. Del Valle et J.J.L. Velazquez dans [264], [267], [271], [275] pour les modèles quadratiques décrivant les gaz de Bosons, et nous commençons par leur déduction à partir de modèles semblables à ceux considérés jusqu'à maintenant.

C.2.1. Déduction d'un modèle quadratique pour les Bosons.

Considérons maintenant un gaz formé de deux espèces de particules, l'une étant des Fermions, de densité $f(t,p) \geq 0$, et l'autre des Bosons, de densité $F(t,p) \geq 0$. La dynamique du gaz est donnée par le système d'équations

$$(C.11) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} = Q_{FF}(f,f) + Q_{FB}(f,F), & f(0,.) = f_{in}, \\ \dfrac{\partial F}{\partial t} = Q_{BF}(F,f) + Q_{BB}(F,F), & F(0,.) = F_{in}. \end{cases}$$

Les termes de collisions Q_{FF} et Q_{BB} décrivent les collisions entre particules d'une même espèce; les termes Q_{FB} et Q_{BF} décrivent les intéractions des Bosons avec les Fermions. Le terme $Q_{BF}(F,f)$, qui va nous intéresser plus particulièrement, s'écrit

$$Q_{BF}(F,f) = \iiint_{\mathbb{R}^9} w\,\delta_{\mathcal{K}}\left(F'\,f'_*\,(1+F)\,(1-f_*) - F\,f_*\,(1+F')\,(1-f'_*)\right) dp_\star dp' dp'_*,$$

où l'ensemble $\mathcal{K}$ des impulsions compatibles par collision est défini comme dans (A.3) et (C.2), mais cette fois-ci la conservation de l'énergie s'écrit

$$\mathcal{E}_B(p) + \mathcal{E}_F(p_*) = \mathcal{E}_B(p') + \mathcal{E}_F(p'_*),$$

les énergies $\mathcal{E}_B$ et $\mathcal{E}_F$ correspondant aux énergies des Bosons et des Fermions.

Faisons les hypothèses simplificatrices suivantes

$$(C.12) \qquad f \quad \text{est à l'état d'équilibre (de Maxwell ou de Fermi),}$$

$$(C.13) \qquad Q_{BB}(F,F) = 0,$$

$$(C.14) \qquad F \quad \text{est radiale.}$$

Le système (C.11) se réduit donc à une seule équation sur la densité de Bosons $F = F(t,\varepsilon)$ avec $\varepsilon = \mathcal{E}(p)$ qui s'écrit

$$(C.15) \qquad \frac{\partial F}{\partial t} = \int_0^\infty \frac{B(\varepsilon,\varepsilon')}{a(\varepsilon)} \left[F'\,(1+F)\,e^{-\varepsilon} - F\,(1+F')\,e^{-\varepsilon'}\right] d\varepsilon',$$

où B dépend de w et de f, et a de l'expression de $\mathcal{E}$.

Deux cas nous intéressent plus particulièrement:

1) - F repésente une densité de photons (qui sont des Bosons relativistes, de masse nulle, et d'énergie $\mathcal{E}(p) = \hbar\,|p|$) dans un bain d'électrons de densité f. Si la densité initiale f_{in} est une Maxwellienne il est raisonnable de considérer que la densité reste une Maxwellienne pour tout temps (les photons ont peu d'influence sur le gaz d'électrons) ce qui justifie (C.12). La condition $Q_{BB} = 0$ est clairement satisfaite puisque les photons n'intéragissent pas ensemble, et enfin (C.14) est satisfait pourvu que F_{in} soit radiale. Dans ce cas w est la section efficace donnée par le scattering de Thomson et $a(\varepsilon) = \varepsilon^2$. On obtient une expression intégrale explicite pour B, voir [275]. On nommera alors "équation de Boltzmann-Compton", l'équation (C.15). Nous renvoyons aux articles [148], [107], [256], [257], [75] pour des considérations physiques.

2) - F représente une densité de Bosons non relativistes (massique et d'énergie $\mathcal{E}(p) = |p|^2/2\,m$) et f une densité de Fermions à l'équilibre de Fermi (ou Maxwell). Pour une intéraction à courte portée il est raisonnable de prendre comme section efficace $w = 1$. Lorsque f est une Maxwellienne on obtient $a(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}$ et

$$(C.16) \qquad B(\varepsilon,\varepsilon') = \zeta(\min(\varepsilon,\varepsilon')), \qquad \zeta(x) = \int_0^\infty e^{x-y}\,\min(\sqrt{x},\sqrt{y})\,dy.$$

On appelera équation de Boltzmann-Bose quadratique le modèle correspondant. La justification des hypothèses (C.12)–(C.14) est peut-être moins immédiate dans ce cas que dans le cas précédant, nous renvoyons le lecteur intéressé à [158], [159], ainsi qu'à [212], [213].

L'intérêt de l'équation (C.15) est double. D'une part ce modèle intervient dans de nombreuses situations physiques où il peut être considéré comme une bonne approximation du système (C.11). (On le trouve, dans des articles de Kompaneets et Dreicer, appliqué à l'astrophysique). D'autre part, l'équation de Boltzmann-Bose quadratique est un modèle relativement simple pour lequel un phénomène de condensation (de Bose) peut être observé: une partie macroscopique de la densité de particules $F(t,\varepsilon)$ se concentre en une masse de Dirac en l'origine. La condensation de Bose apparaît ici en temps infini, alors qu'elle est censée se produire en temps fini pour le modèle de Boltzmann-Bose.

C.2.2. Le problème stationnaire pour les équations de Boltzmann-Bose quadratiques.

Afin de rendre l'analyse mathématique de (C.15), plus agréable, on fait le changement d'inconnue $F(\varepsilon)\,a(\varepsilon) \to F(\varepsilon)$, de sorte que l'équation s'écrit

$$(C.17) \qquad \frac{\partial F}{\partial t} = Q(F,F) = \int_0^\infty b(\varepsilon,\varepsilon')\left(F'\,(a+F)\,e^{-\varepsilon} - F\,(a'+F')\,e^{-\varepsilon'}\right)d\varepsilon'$$

avec $b(\varepsilon,\varepsilon') = B(\varepsilon,\varepsilon')/a(\varepsilon)\,a(\varepsilon')$.

En suivant la même démarche que dans le premier paragraphe, on s'intéresse aux quantités conservées, à la croissance d'une entropie, à l'existence de Maximum relatif de l'entropie, ce qui doit permettre d'obtenir les solutions stationnaires et la dynamique en temps grand des solutions de l'équation. Pour une distribution $F = g \in L^1(0,\infty)$, on définit le nombre de photons $M(g)$ par

$$M(g) = \int_0^\infty g(t,\varepsilon)\,d\varepsilon$$

et la densité d'entropie $h(g,\varepsilon)$ et l'entropie $H(g)$ par

$$(C.18) \qquad \begin{cases} h(g,\varepsilon) = (a+g)\,\log(a+g) - g\,\log g - a\ln a - \varepsilon\, g \geq 0 \\ H(F) = \displaystyle\int_0^\infty h(g(t,\varepsilon),\varepsilon)\,d\varepsilon. \end{cases}$$

Grâce à l'identité

$$(C.19) \qquad \forall\,\psi,\,g \qquad \int_0^\infty Q(g)\,\psi\,d\varepsilon = \frac{1}{2}\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty b\,(X,X')\,(\psi-\psi')\,d\varepsilon d\varepsilon'$$

avec les notations $X = g'\,(a+g)\,e^{-\varepsilon}$, $X' = g\,(a+g')\,e^{-\varepsilon'}$, obtenue simplement en effectuant le changement de variables $\varepsilon \leftrightarrow \varepsilon'$, on montre la conservation de la masse (en choisissant $\psi = 1$ dans (C.19))

$$\frac{d}{dt}M(g(t,.)) = 0.$$

En faisant maintenant le choix $\psi = \ln(a+s) - \ln\,a - \varepsilon$ dans (C.19), on obtient également la croissance de l'entropie

$$\frac{d}{dt}H(g(t,.)) = \frac{1}{2}D(g(t,.)) \geq 0,$$

où le terme de dissipation d'entropie est défini par

$$D(F) = \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty b\;j(X,X')\,d\varepsilon d\varepsilon'.$$

À notre connaissance, la masse est la seule quantité conservée et l'entropie est la seule fonctionnelle de Lyapunov.

Introduisons maintenant les distributions de Bose-Einstein (cas $\mu > 0$) et de Planck (cas $\mu = 0$) définies par

$$b_\mu(\varepsilon) = \frac{a(\varepsilon)}{e^{\varepsilon+\mu}-1}, \qquad \mu \geq 0,$$

et posons $M_\mu = M(b_\mu)$. On vérifie aisément que les b_μ sont ordonnées ($b_\nu < b_\mu$ si $\nu > \mu$) et $b_\mu \to 0$ lorsque $\mu \to \infty$, que ce sont des solutions stationnaires de (C.17) ($Q(b_\mu, b_\mu) = 0$) et que b_μ est solution du problème de maximisation

$$H(b_\mu) = \max_{M(g)=M(b_\mu)} H(g). \tag{C.20}$$

De plus, on constate que b_0 est le maximum global de l'entropie et est de masse finie, i.e.

$$H(b_0) = \max_{g\geq 0} H(g), \qquad M_0 = M(b_0) = \int_0^\infty \frac{a(\varepsilon)}{e^\varepsilon - 1}\, d\varepsilon < \infty,$$

puisqu'on ne considère que le cas $a(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}$ et $a(\varepsilon) = \varepsilon^2$.

On peut alors se demander si le problème de maximisation (C.20) admet encore une solution pour $m > M_0$. En fait, pour résoudre ce problème il faut étendre la classe des distributions de particules considérées. On définit, pour une distribution de particules F de la forme $F = g + G$ avec g appartenant à L^1 ($g \prec d\varepsilon$) et G une mesure singulière par rapport à la mesure de Lebesgue ($G \perp d\varepsilon$), la masse et l'entropie en posant

$$M(F) = \int_0^\infty dF(\varepsilon) \quad \text{et} \quad H(F) = H(g) - \int_0^\infty \varepsilon\, dG(\varepsilon).$$

On définit aussi les distributions de Bose

$$\mathcal{B}_m = \begin{cases} b_\mu \text{ avec } \mu \text{ t.q. } M(b_\mu) = m \text{ si } m \leq M_0 \\ b_0 + \alpha\, \delta_0 \text{ avec } \alpha = m - M_0 \text{ si } m > M_0. \end{cases}$$

Il est clair que $Q(F, F)$ a encore un sens pour une mesure F bornée positive définie sur $[0, +\infty)$. En particulier, l'équation (C.17) s'écrit, dans le cas d'un état $F = g + G$, sous la forme du système sur les parties régulière et singulière

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial t} = Q_1(g, G) = (a + g)\, e^{-\varepsilon}\, L(F) - g\, L\big((a + F)\, e^{-\varepsilon}\big), \\ \dfrac{\partial G}{\partial t} = Q_2(g, G) = G\, \big[L(F)\, e^{-\varepsilon} - L\big((a + F)\, e^{-\varepsilon}\big)\big], \end{cases} \tag{C.21}$$

avec $L(\phi) := \displaystyle\int_0^\infty b(\varepsilon, \varepsilon')\, \phi'\, d\varepsilon'$. Pour ce système, on a encore conservation du nombre de photons et croissance de l'entropie, pour tout $t \geq 0$

$$\frac{d}{dt} M(F) = 0, \quad \frac{d}{dt} H(F) = \frac{1}{2} D(F) \geq 0,$$

où $D(F) = D(g) + D_1(g, G) + D_2(G)$ est le terme de dissipation d'entropie, et nous ne précisons pas les expressions des termes de dissipation d'entropie partielle D_1 et D_2.

En ce qui concerne le problème stationnaire, nous démontrons le résultat suivant.

Théorème C.3 [267]. *On suppose $b > 0$. Pour une distribution $F = g + G$ de masse $M(F) = m$, les différentes assertions suivantes sont équivalentes*

$$F = \mathcal{B}_m, \tag{C.22}$$

$$F \text{ maximise l'entropie à masse donnée } m, \tag{C.23}$$

$$Q(F, F) = 0, \tag{C.24}$$

$$D(F) = 0. \tag{C.25}$$

L'équivalence entre (C.22) et (C.23) avait déjà été obtenue par Caflisch et Levermore [55] dans le cas de distributions de la forme $F = g + \alpha\,\delta_a \geq 0$. Ce résultat montre bien que l'espace naturel pour les solutions du problème (C.17) est l'espace des états de la forme $F = g + \alpha\,\delta_a$ ou plus généralement de la forme $F = g + G$.

C.2.3. Le problème de Cauchy pour les équations de Boltzmann-Bose quadratiques.

Nous abordons maintenant le problème d'évolution pour les deux jeux d'hypothèses suivantes sur le noyau b et la donnée initiale F_{in}:

$$(i) \qquad \begin{cases} 0 \leq b \in L^\infty \quad \text{ou} \quad b \text{ défini par } \; (C.16), \\ \text{et} \;\; 0 \leq F_{in} \in M^1_1(\mathbb{R}_+) \end{cases}$$

ou

$$(ii) \qquad \begin{cases} b\, e^{-\eta\,(k+k')} \in L^\infty \quad \text{avec} \quad \eta \in [0,1), \\ \text{et} \;\; F_{in} = g_{in} + \alpha_{in}\,\delta_0 \quad \text{avec} \quad 0 \leq g_{in} \leq b_0, \;\; \alpha_{in} \geq 0. \end{cases}$$

Théorème C.4. *Sous les hypothèses (i) et (ii), il existe $F = g + G \in C([0,\infty), M^1)$ solution du système (C.21) qui satisfait*

- *$M(F(t,.)) = M(F_{in}) =: m$ pour tout $t \geq 0$,*
- *Si $F_{in} = g_{in} \in L^1$ (i.e. $G_{in} = 0$) alors $F(t) = g(t) \in L^1$ (i.e. $G(t) = 0$) pour tout $t > 0$,*
- *$F(t,.) \rightharpoonup \mathcal{B}_m$ dans $\sigma(M^1, C_c)$ faible$\star$ lorsque $t \to \infty$.*

De plus, sous l'hypothèse (ii), on a $F(t) = g(t) + \alpha(t)\,\delta_0$ avec $0 \leq g(t) \leq b_0$ pour tout $t \geq 0$.

Dans la partie existence de ce résultat, la difficulté provient essentiellement du fait que l'entropie (C.18) ne procure pas l'équi-intégrabilité de la solution comme dans le cas classique de sorte que les méthodes de stabilité/compacité utilisées habituellement pour les équations de Boltzmann (voir la partie A) ne fonctionnent pas. Ce manque d'information est normal: il permet le phénomène de concentration.

Lorsque $b \in L^\infty$ il est possible de faire fonctionner un point fixe de Banach dans l'espace $C([0,T]; M^1_1)$ pour $T > 0$ assez petit, et d'en déduire le résultat d'existence globale ci-dessus. Sous l'hypothèse (ii) il est en fait possible, par un principe du maximum, de montrer que $0 \leq g(t,.) \leq b_0 + \alpha\,\delta_0$ si $0 \leq g_{in} \leq b_0 + \alpha\,\delta_0$ (disons pour un problème régularisé) et d'en déduire de la compacité faible dans L^∞, ce qui bien sûr résout tous nos problèmes. Enfin dans le cas, le plus intéressant, où b est donné par (C.16), nous arrivons à montrer directement sur une suite d'approximations bornées b^n de b que la suite de solutions F^n des solutions des problèmes approchés est une suite de Cauchy dans M^1_1. Ceci est rendu possible grâce une propriété de type “gain de moments” et une méthode introduite pour l'équation de Boltzmann dans [263]. À noter que dans ce cas, le terme de collision n'a pas de sens dans L^1 (ou M^1) a priori, à cause de la singularité en 0. Pour lui donner un sens, on écrit

$$\begin{aligned} Q(F,F) = & \int_0^\infty b\,(e^{-\varepsilon} - e^{-\varepsilon'})\,F\,F'\,d\varepsilon' \qquad && (=: Q_1(F,F)) \\ & + \int_0^\infty b\left(F'\,a\,e^{-\varepsilon} - F\,a'\,e^{-\varepsilon'}\right) d\varepsilon' && (=: Q_2(F)). \end{aligned}$$

Le terme $Q_1(F)$ est défini dans M^1 puisque $\zeta(z) \leq C\,\sqrt{z}$, de sorte que $b\,(e^{-\varepsilon} - e^{-\varepsilon'})$ est bornée et continue. Quant au terme linéaire Q_2, on le définit au sens faible par

$$\forall \psi \in C^1_c(\mathbb{R}_+) \qquad < Q_2(F), \psi > \, = \int_0^\infty \!\! \int_0^\infty b\,a'\,e^{-\varepsilon'}\,(\psi' - \psi)\,F\,d\varepsilon d\varepsilon',$$

et encore une fois $b\,a'\,e^{-\varepsilon'}\,(\psi' - \psi)$ est bornée et continue. Ce type de formulation avait été introduite pour l'équation de Boltzmann dans [13].

La difficulté majeure est de montrer le comportement asymptotique en temps grand. Dans le cas (ii) et le cas $b = 1$, un contrôle de l'équi-intégrabilité de $g(t,.)$ lorsque $t \to \infty$, peut être obtenu (au moins en dehors de l'origine). Les techniques classiques de semi-continuité inférieure dans L^1 de la dissipation d'entropie $g \mapsto D(g)$ permettent de montrer que tout élement g_∞ appartenant à l'ensemble ω-limite de $g(t)$ satisfait $D(g_\infty) = 0$ et possède la même masse m que la donnée initiale, c'est donc l'état de Bose-Einstein $\mathcal{B}_m$, voir [264]. Dans le cas général, le contrôle de l'équi-intégrabilité de $g(t,.)$ est perdu et le seul contrôle est une borne uniforme dans M^1_1. On peut toutefois appliquer la même stratégie que précédemment si on sait montrer la semi-continuité inférieure dans M^1 de la dissipation d'entropie $g \mapsto D(g)$, et conclure de la même manière. À cette fin, on écrit

$$D(g) = J(X, X')$$

où on définit encore $X = g'\,(a + g)\,e^{-\varepsilon}$, $X' = g\,(a + g')\,e^{-\varepsilon'}$ et la fonctionnelle J par

$$J(A, B) = \int_0^\infty \int_0^\infty b\,j(A, B)\,d\varepsilon d\varepsilon',$$

pour toutes fonctions $A, B : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}_+$. Grâce à la convexité de la fonction j (par rapport aux deux variables) et en adaptant les résultats sur les fonctionnelles convexes de mesures [87], [224], [137], [43] nous sommes capables de montrer un tel résultat.

Soulignons deux conséquences de ce résultat. Si l'on part d'une donnée initiale "régulière" $F_{in} = g_{in} \in L^1$ la solution reste régulière pour tout temps: $F(t) \equiv g(t) \in L^1$ $\forall t > 0$. De plus, si $m = M(F_{in}) = M(g_{in}) > M_0$ alors $F(t,.) \equiv g(t,.) \rightharpoonup \mathcal{B}_m$ avec $\mathcal{B}_m = b_0 + (m - M_0)\,\delta_0$, i.e. un état régulier de masse supérieure à M_0 "condense à l'origine" en temps infini.

La condensation en temps infini avait déjà été annoncée pour ce modèle dans [75], ainsi que par [55] pour le modèle similaire de Kompaneets.

C.2.4. Étude fine du comportement asymptotique en temps grand lorsque $b = 1$.

Dans [271] nous poursuivons l'étude de l'équation de Boltzmann-Compton (C.17) dans le cas le plus simple $b = 1$. Il s'agit d'analyser précicément le comportement asymptotique en temps grand des solutions. En particulier, comment apparaît le condensat en temps infini lorsque $M_{in} = m > M_0$ et quelle est la convergence de la solution $F(t)$ vers l'état d'équilibre $\mathcal{B}_m$.

On réécrit l'équation (C.17) sous la forme

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial t} = (g + b_0)\,d(t) - M_{in}\,(1 - e^{-\varepsilon})\,g, \qquad g(0) = g_{in} \\ \dfrac{\partial \alpha}{\partial t} = d\,\alpha, \qquad d(t) = \displaystyle\int_0^\infty (1 - e^{-\varepsilon'})\,g'\,d\varepsilon', \qquad \alpha(0) = \alpha_{in}. \end{cases}$$

En introduisant les nouvelles variables

$$h = g\,e^{-\int_0^t d(s)\,ds}, \qquad \lambda(t) = d(t)\,e^{-\int_0^t d(s)\,ds},$$

la première équation du système devient une équation linéaire en h

$$\frac{\partial h}{\partial t} = b_0\,\lambda(t) - M_{in}\,(1 - e^{-\varepsilon})\,h,$$

et on peut résoudre explicitement cette équation en fonction de λ. En effectuant une transformée de Laplace (en temps) on peut pousser encore un peu plus loin l'analyse.

Supposons que $M(F_{in}) > M_0$ et pour fixer les idées que $g_{in}(\varepsilon) \sim A\,\varepsilon^\gamma$ lorsque $\varepsilon \to 0$ avec $\gamma \geq 0$.

a) - Si $\alpha(0) = 0$ on montre que

$$(C.26) \qquad d(t) \underset{t\to\infty}{\sim} \frac{1}{t} \quad \text{et} \quad g(t,\varepsilon) \underset{t\to\infty}{\sim} t \quad \text{pour} \quad \varepsilon \sim \frac{1}{t}.$$

On observe bien, en particulier, la formation d'une masse de Dirac à l'origine lorsque $t \to \infty$.

b) - Si $\alpha(0) > 0$ on montre que

$$d(t) \sim \frac{\Gamma(3)}{2\,M_{in}^3\,t^2} + \frac{\Gamma(2+\gamma)}{(\gamma+1)\,M_{in}^{2+\gamma}\,t^{1+\gamma}} \qquad \text{lorsque} \quad t \to \infty,$$

et

$$g(t,\varepsilon) \underset{t\to\infty}{\sim} \big(g_{in}(\varepsilon) + b_0(\varepsilon)\big)\, e^{-M_{in}\,(1-e^{-\varepsilon})\,t} + \mathcal{O}\big(\frac{1}{t^3} + \frac{1}{t^{\gamma+2}} + \frac{\varepsilon^{\gamma+1}}{t} + \varepsilon^2\big).$$

En comparant (4.1) et (C.26) on constate que la vitesse de retour vers l'équilibre (mesurée par la "distance" $d(t)$) est plus rapide lorsque l'état initial est déjà en partie condensé (hypothèse b)) que lorsqu'il n'y a aucun condensat formé initialement (hypothèse a)). De plus, sous l'hypothèse b), toute la partie condensée $\alpha = M_{in} - M_0$ de l'état asymptotique de Bose $\mathcal{B}_m$ provient de la partie déjà condensée $\alpha(t)$ et donc il n'y a pas de formation d'une masse de Dirac en temps grand à partir de la partie régulière $g(t)$.

Une analyse semblable est faite pour $M_{in} \leq M_0$.

C.2.5. L'asymptotique de Kompaneets.

En 1954, Kompaneets dérive par un développement de type Fokker-Planck à partir de l'équation de Boltzmann-Compton une équation parabolique dégénérée. Il obtient l'équation (*de Kompaneets*) suivante sur la densité de photons $f(t,\varepsilon)$ d'énergie $\varepsilon > 0$ au temps $t \geq 0$:

$$(C.27) \qquad \varepsilon^2 \frac{\partial f}{\partial t} = K(f) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}[\varepsilon^4(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} + f + f^2)] \;\; \text{pour} \;\; \varepsilon, t > 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon^4(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} + f + f^2) \underset{\varepsilon\to 0,\,\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Le noyau B obtenu à partir de la section efficace de Thomson étant très singulier, cette approximation est censée être réaliste. Nous renvoyons à [148], [82] pour plus de détails. On renvoie également à [55], [147] et [114] pour une analyse de l'équation de Kompaneets. Le résultat le plus frappant obtenu dans ces travaux est peut-être le suivant.

Théorème C.5 ([114]). *Pour tout instant $T_* > 0$ et toute masse $m > 0$ il existe une donnée initiale $f_{in} \in \mathcal{D}((0,\infty))$ telle que pour la solution f de l'équation de Kompaneets (C.27) associée à cette condition initiale la conservation de la masse*

$$\int_0^\infty f(t,\varepsilon)\,\varepsilon^2\,d\varepsilon = \int_0^\infty f_{in}(\varepsilon)\,\varepsilon^2\,d\varepsilon$$

cesse d'être vraie après l'instant T_*.

La conservation de la masse est vraie formellement et est équivalente à la condition aux limites (annulation des flux) dans (C.27). En d'autres termes, le Théorème dit que la condition aux limites

$$\varepsilon^4(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} + f + f^2) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$$

ne peut être vrai pour tout temps $t \geq 0$. Il convient de souligner que ce comportement des solutions de l'équation de Kompaneets est très différent de celui des solutions de l'équation de Boltzmann-Compton décrit par le Théorème C.4. La question de la validité de l'asymptotique de Kompaneets (ou de l'extension du Théorème C.4 à la section efficace de Thomson) se pose donc.

Une première réponse dans cette direction est de justifier rigoureusement (pour certaines données initiales) l'asymptotique de Kompaneets par une méthode utilisée pour justifier l'équation de Landau à partir de l'équation de Boltzmann, voir [86], [90], [130], [Villani98].

Théorème C.6. *Pour toute donnée initiale* $0 \leq g_{in} \leq b_0$ *on note* $g_n \in C([0,+\infty); L^1)$ *la solution de (C.17) correspondant à* g_{in} *et à une section efficace* b_ε *de la forme*

$$b_n(\varepsilon, \varepsilon') = n^3 \, e^{\varepsilon/2} \, e^{\varepsilon'/2} \, \sigma\big(n\,(\varepsilon' - \varepsilon)\big).$$

Alors pour tout $T > 0$,

$$\lim \|g_n - g\|_{C([0,T];L^2)} = 0,$$

où $g = \varepsilon^2 f$ *et* f *est solution de l'équation de Kompaneets* Nous dérivons ainsi rigoureusement l'équation de Kompaneets pour ce type de donnée initiale. La difficulté principale est d'obtenir la convergence forte de la suite (g_n) nécessaire pour passer dans les termes non-linéaires. Cela est rendu possible par une analyse fine du terme de dissipation d'entropie.

Lemme C.7. *Soit* (g_n) *une suite de fonctions telles que*

$$0 \leq g_n \leq b_0$$

et

$$\int_0^T D_n(g_n) \leq C_0 \qquad \forall\, T > 0,$$

où D_n *désigne le terme de dissipation d'entropie associée au noyau* b_n, *alors*

$$(g_n) \ \text{ appartient à un compact de } \ L^p([0,T] \times \mathbb{R}_+)$$

pour tout $p \in [1, \infty)$.

Un résultat semblable au Lemme C.7. pour l'équation de Boltzmann classique (qui est donc beaucoup plus technique!) a été obtenu au même moment et indépendamment par Alexandre, Desvillettes, Villani, Wennberg [8], voir également [9].

Terminons par une liste de **problèmes ouverts** concernant les modèles décrivant les gaz de Bosons:

- Est-il possible d'obtenir un Théorème d'existence globale pour l'équation de Boltzmann-Bose (C.1) (avec $\tau = 1$) sans les hypothèses simplificatrices (1) et (2) faites au Théorème C.2? Pour un tel modèle, y a-t-il apparition d'un condensat de Bose-Einstein en temps fini?

- Dans le cadre élaboré par X. Lu, est-il possible d'obtenir, pour toute donnée initiale, un résultat de convergence en temps grand vers l'unique état de Bose-Einstein associé à la condition initiale?

- Est-il possible d'étendre le Théorème C.4 d'existence à l'équation de Boltzmann-Compton pour la section-efficace de Thomson donnée dans [275]?

- Est-il possible d'étendre l'asymptotique fine lorsque $t \to \infty$ obtenue dans le cas $b = 1$ (section C.2.4.) à des sections efficaces b générales?

- Est-il possible d'étendre l'asymptotique de Kompaneets aux sections efficaces de Thomson? Quel est l'asymptotique de Kompaneets lorsque g_{in} ne satisfait pas $0 \leq g_{in} \leq b_0$?

- Chapitre D -

Équations de Coagulation-Fragmentation

D.1 Présentation des équations

Dans cette partie nous nous intéressons à un système d'objets de tailles $z \in Z$ variable (on utilisera désormais le terme d'agglomérat pour désigner ces objets). Ces agglomérats peuvent correspondre à des particules solides ou liquides en suspension dans un gaz en physique des aérosols [106] (typiquement des gouttelettes dans un spray), à des suspensions coloïdales [216], [217], à des planètes (ou étoiles, ou astéroïdes ...) en astrophysique [211], à des polymères, mais également à des aggrégats de cellules sanguines en hématologie [199] et à des regroupements d'animaux en dynamique des populations [190]. La variable de taille correspondra suivant la situation à la mesure de la masse, du volume, de la longueur, du nombre de "particules élémentaires" (ou individus) de l'agglomérat. Cette variable pourra donc être considérée comme discrète (nombre d'individus dans une population, nombre de monomères dans un polymère), on prend alors $Z = \mathbb{N}$ et on note $z = i \in \mathbb{N}^*$, ou continue (volume ou rayon d'une gouttelette), on prend dans ce cas $Z = (0, \infty)$ et on note $z = y \in (0, \infty)$.

On suppose que (sous l'effet de certaines forces) ces agglomérats évoluent suivant deux mécanismes opposés. Deux agglomérats peuvent se regrouper (s'agglomérer) pour former un agglomérat de taille plus grande (c'est le processus de coagulation (binaire)). Un agglomérat peut se scinder en deux parties formant ainsi deux agglomérats de tailles plus petites (c'est le processus de fragmentation (binaire)). En désignant par C_z une particule de taille z on écrit schématiquement:

$$C_z + C_{z'} \overset{a(z,z')}{\longrightarrow} C_{z+z'}, \qquad C_z \overset{b(z-z',z')}{\longrightarrow} C_{z-z'} + C_{z'},$$

où a et b désignent les taux (ou vitesses) des processus (ou réactions) de coagulation et fragmentation. La taille d'un agglomérat peut donc croître ou décroître et c'est cette dynamique de croissance que l'on souhaite principalement décrire.

On considère maintenant un système constitué d'un grand nombre d'agglomérats identifiés par leur taille et soumis au double processus de coagulation et de fragmentation binaires et on néglige tout autre phénomène tels que la coagulation ou la fragmentation multiple (mettant en jeu trois ou davantage d'agglomérats), la condensation ou l'influence d'une force extérieure. On suppose éventuellement, de plus, que ces agglomérats sont confinés dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ et s'y déplacent suivant une dynamique Brownienne avec un coefficient de diffusion $d = d(z)$ qui ne dépend que de la taille. On ignore dans cette description l'éventuelle vitesse ou énergie interne des agglomérats. Un tel système est donc convenablement défini par la densité $f(t, x, z)$ d'agglomérats de taille $z \in Z$ se trouvant à l'instant $t \geq 0$ en la position $x \in \Omega$.

Sous ces conditions, l'équation de coagulation-fragmentation (équation CF) décrivant la dynamique de la densité $f(t, .)$ est

$$(D.1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} - d(z)\, \Delta_x f = Q(f) \quad (t, x, z) \in (0, +\infty) \times \Omega \times Z, \\ \dfrac{\partial f}{\partial n} = 0 \quad (t, x, z) \in (0, +\infty) \times \partial\Omega \times Z, \\ f(0, x, z) = f_{in}(x, z) \quad (x, z) \in \Omega \times Z. \end{cases}$$

Dans le cas d'un modèle de taille continue ($Z = (0, \infty)$, $z = y$) le terme $Q(f)$ de réaction s'écrit

$$(D.2)\qquad \begin{aligned} Q(f)(y) = \frac{1}{2}\int_0^y a(y', y-y')\ f(x,y')\ f(x,y-y')\ dy' - \int_0^\infty a(y,y')\ f(x,y)\ f(x,y')\ dy' \\ - \frac{1}{2}\int_0^y b(y', y-y')\ dy'\ f(x,y) + \int_0^\infty b(y,y')\ f(x,y+y')\ dy'. \end{aligned}$$

Dans le cas discret ($i \in Z = \mathbb{N}_*$) le terme de réaction s'écrit $Q(f) = (Q_i(f))$ avec

$$(D.3)\qquad \begin{aligned} Q_i(f) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{i-1} a_{j,i-j}\, f_j\, f_{i-j} - \sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j} f_i\, f_j \\ - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{i-1} b_{j,i-j}\, f_i + \sum_{j=1}^{\infty} b_{i,j}\, f_{i+j}. \end{aligned}$$

Le sens des différentes contributions au terme de réaction $Q(f)$ est le suivant: le premier terme correspond à la création d'un agglomérat de taille C_z par coagulation de deux plus petits agglomérats et le second terme correspond à la disparition d'un agglomérat de taille C_z par coagulation de celui-ci avec un autre agglomérat; le troisième terme correspond à la perte d'un agglomérat de taille C_z par fragmentation de celui-ci et le dernier terme correspond au gain d'un agglomérat de taille C_z issu de la fragmentation d'un agglomérat de plus grande taille.

L'équation (D.1) a été introduite en l'absence de fragmentation et dans un cadre homogène en espace par Smoluchowski en 1916 [216], [217] dans un cadre discret (pour décrire des suspensions colloïdales) et par Müller [186] dans le cas continu. C'est Melzak [184] qui introduit l'équation complète.

Le coefficient de diffusion d peut être constant ou dépendre effectivement de la taille des agglomérats. Un exemple typique est $d(y) = D_0\, y^{-\delta}$ avec $\delta \in (0,1]$, $D_0 > 0$, voir [214].

Quelques remarques sur les taux de réactions a et b. Ces taux dépendent de la manière dont se produisent, à l'echelle microscopique des agglomérats, les réactions de coagulation et de fragmentation, celles-ci résultant de mécanismes complexes où peuvent rentrer en compte divers facteurs tels que la vitesse, l'énergie interne, la charge éléctrostatique, la forme précise des agglomérats. Comme à l'échelle de description qui nous intéresse (mesoscopique ou macroscopique) on ne veut pas prendre en compte ces divers paramètres supplémentaires, les taux de réactions proviendront de moyénnisations par rapport à ces paramètres. Il paraît donc clair que si le processus de coagulation-fragmentation est relativement universel, les taux de réactions, eux, vont dépendre fortement du contexte d'application physique et qu'ils seront difficiles à déterminer. L'expression de ces taux (lorsqu'elle est connue) varie beaucoup selon le domaine d'application et on trouve dans la littérature ([6]) les exemples suivants de taux de coagulation

$$(D.4)\qquad \begin{aligned} & a(z,z') = (z^{1/3} + z'^{1/3})\,(z^{-1/3} + z'^{-1/3}), \quad (z^{1/3} + z'^{1/3})^2\,(z^{-1} + z'^{-1})^{1/2} \\ & a(z,z') = (z^{1/3} + z'^{1/3})^3, \quad (z^{1/3} + z'^{1/3})^{7/3} \\ & a(z,z') = (z^{1/3} + z'^{1/3})\,|z'^{1/3} - z^{1/3}|, \quad (z^{1/3} + z'^{1/3})\,|z'^{2/3} - z^{2/3}| \\ & a(z,z') = (z' - z)^2\,(z + z')^{-1} \\ & a(z,z') = (A\,z + B)\,(A\,z' + B) \qquad \text{(Flory-Stockmayer)} \\ & a(z,z') = (z^{1/3} + z'^{1/3})\,(z\,z')^{1/2}\,(z + z')^{-3/2}. \end{aligned}$$

L'exemple le plus courant de taux de fragmentation est

$$(D.5) \qquad b(z,z') = (z+z')^\gamma \text{ ou } (1+z+z')^\gamma \text{ avec } \gamma \in \mathbb{R}.$$

En dehors de ces exemples, il est difficile de savoir quelles sont les hypothèses (physiques) importantes que l'on doit faire sur ces taux. Néanmoins les deux hypothèses suivantes semblent (presque) faire l'unanimité

$$(D.6) \quad \forall\, z,z' \in Z \qquad a(z,z') = a(z',z), \qquad b(z,z') = b(z',z) \qquad \text{(hypothèse de symétrie)}$$

et

$$(D.7)\ \forall\, z,z' \in Z \qquad 0 \le a(z,z'),\, b(z,z') \le K_0\,(1+z)\,(1+z') \qquad \text{(hypothèse de croissance),}$$

et nous les adopterons désormais. L'hypothèse (D.4) est systématique et l'hypothèse (D.5) est souvent considérée comme la seule physiquement raisonnable, voir [160]. On trouvera néanmoins dans [156] des exemples de taux de coagulation ne satisfaisant pas cette condition.
Le taux modèle

$$(D.8) \qquad a(z,z') = z^\alpha\, {z'}^\beta + z^\beta\, {z'}^\alpha, \qquad \alpha,\, \beta \in [0,1]$$

semble donc déjà raisonnablement général, il inclut le cas des taux constants $a = 1$, somme $a = z+z'$ et produit $a = z\,z'$ (qui ont été les plus étudiés) mais ne recouvre pas, bien sûr, la diversité des taux de la liste (D.4).

Pour éclairer cette discussion signalons, dès à présent, qu'il n'existe pas à notre connaissance de théorie d'existence de solutions valable sous les seules hypothèses (D.6), (D.7) (même pour l'équation de coagulation seule ($b \equiv 0$) dans le cas discret et homogène en espace). Pour developper une théorie d'existence il conviendra de faire soit une hypothyèse de croissance plus restrictive que (D.7) (on fera l'hypothèse (D.19)), soit une hypothèse de structure (par exemple (D.8)), cette dernière permettant d'obtenir davantage de bornes a priori, mais nous y reviendrons. La situation devient encore plus complexe lorsqu'on s'intéresse aux propriétés qualitatives des solutions de (D.1) puisque celles-ci dépendent très fortement des hypothèses faites sur les taux de coagulation et fragmentation.

Un cas particulier important est celui qui correspond à des particules qui ne peuvent augmenter et diminuer de taille que par addition et soustraction d'un *monomère* (particule de taille $i = 1$), c'est-à-dire, en termes de taux de réactions

$$a_{i,j} = b_{i,j} = 0 \quad \text{lorsque} \quad i \text{ ou } j \neq 1.$$

L'équation correspondante est appelée équation de Becker-Döring (équation BD) et s'écrit

$$(D.9) \qquad \begin{aligned} &\frac{d}{dt} f_i = a_{i-1}\, f_{i-1}\, f_1 - b_i\ f_i - (a_i\, f_i\, f_1 - b_{i+1}\, f_{i+1}) \qquad \forall i \ge 2 \\ &\frac{d}{dt} f_1 = -(a_1\, f_1^2 - b_2\, f_2) - \sum_{j=1}^{\infty} (a_j\, f_j\, f_1 - b_{j+1}\, f_{j+1}) \end{aligned}$$

après avoir posé $a_i = a_{i,1}$, $b_{i+1} = b_{i,1}$ pour $i \ge 2$ et $a_1 = \frac{1}{2}\, a_{1,1}$, $b_2 = \frac{1}{2}\, b_{1,1}$. On remplace souvent la dernière équation sur les particules de taille unité par l'équation de la conservation de la masse totale

$$(D.10) \qquad f_1(t) + \sum_{i=2}^{\infty} j\, f_j(t) = Y_1\, (= \text{constante}) \qquad \forall\, t \ge 0.$$

Ce modèle a été introduit en 1935 par Becker et Döring [30] pour décrire la condensation de gouttelettes de liquide à partir d'une vapeur. C'est le modèle pour lequel la théorie mathématique est la plus avancée. Nous renvoyons à l'article fondateur [24] et à [274] et aux références incluses pour les développements plus récents.

Si l'on part d'une solution liquide constituée de monomères, l'équation BD est concidérée comme pertinente dans une première phase (de *nucléation* ou *germination*) où des polymères de taille macroscopique sont créés à partir de la phase liquide. L'essentiel du système d'agglomérats est sous forme de monomères ($f_k << f_1 \,\forall\, k \neq 1$) et le mécanisme prépondérant est donc $C_k + C_1 \rightleftharpoons C_{k+1}$. Dans une seconde partie de cette phase de nucléation, les polymères peuvent commencer à réagir un peu ensemble et la modélisation adéquate serait plutôt l'équation CF (avec tous les taux de réactions non nuls), on parlera alors de phase de *nucléation* secondaire.

Dans une deuxième phase (dite de *coalescence* ou *mûrissement*) ces polymères se regroupent pour en former d'autres de plus grandes tailles. La taille moyenne des polymères est alors suffisamment grande pour pouvoir être traitée comme une variable continue. Pour modéliser ce stade de la coalescence Lifshitz et Slyozov [163] et Wagner [241] ont proposé en 1961 l'équation suivante sur la densité des polymères $f(t,y) \geq 0$ de taille $y > 0$:

$$(D.11) \qquad \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}((k\,u - q)\,f) = 0 \qquad t \geq 0,\ y \in (0,\infty),$$

appelée équation de Lifshitz-Slyozov-Wagner (équation LSW) que nous écrivons sans dépendance en espace pour simplifier. Ici les fonctions $k = k(y)$, $q = q(y)$ sont données et satisfont $0 \leq k(y), q(y) \leq K_0\,(1+y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}_+$. Les exemples typiques sont

$$(D.11) \qquad k(y) = \frac{a\ y^{2/3}}{c\ y^{1/3} + d} \quad \text{et} \quad q(y) = \frac{b\ y^{1/3}}{c\ y^{1/3} + d}, \quad y \in \mathbb{R}_+,$$

avec a, b, c, $d \in \mathbb{R}_+$, et en particulier $k(y) = 3\ y^{1/3}$, $q(y) = 3$, voir [241], [163]. La fonction $u(t)$ représente la densité de monomère et satisfait

$$\forall\, t \geq 0 \qquad u(t) + \int_0^\infty y\, f(t,y)\, dy = 1,$$

dans le modèle proposé par Lifshitz et Slyozov, et

$$(D.13) \qquad \forall\, t \geq 0 \qquad u(t) \int_0^\infty k(y)\, f(t,y)\, dy = \int_0^\infty q(y)\, f(t,y)\, dy,$$

dans celui introduit par Wagner.

Dans tous ces modèles, la propriété microscopique évidente est que la masse totale des agglomérats est conservée au cours des réactions de coagulation et fragmentation. Cette propriété se traduit au niveau de la densité f des agglomérats par une conservation formelle de la masse totale. Cette propriété fondamentale est la seule "universelle" (valable pour tous les modèles présentés) et ce n'est qu'une conservation formelle, nous reviendrons sur ce point dans un instant.

Pour démontrer cette conservation, par exemple pour l'équation CF, on procède de la manière suivante. Pour $f = f(y)$ et $\psi = \psi(y)$ données on écrit la relation fondamentale

$$(D.14) \qquad \int_0^\infty Q(f)\,\psi\, dy = \frac{1}{2}\int_0^\infty\int_0^\infty (a\, f\, f' - b\, f'')\,(\psi + \psi' - \psi'')\, dy' dy$$

avec les notations $\psi = \psi(y)$, $\psi' = \psi(y')$ et $\psi'' = \psi(y'')$, $y'' = y + y'$, que nous adopterons désormais. Cette identité s'obtient en faisant le changement de variables $(y, y') \to (z = y - y', y')$ dans le premier et le troisième terme de $Q(f)$ dans (D.2) et est donc vraie sous certaines hypothèses de croissance sur a, b, f et ψ. On en déduit immédiatement, si on est autorisé à prendre $\psi(y) = y$ dans l'identité (D.14), qu'une solution f de (D.1)-(D.2) satisfait

$$(D.15) \qquad \int_\Omega \int_0^\infty f(t,x,y)\, y\, dydx = \int_\Omega \int_0^\infty f_{in}(x,y)\, y\, dydx \qquad \forall\, t \geq 0.$$

Les prochaines sections s'organisent de la façon suivante. Dans la section D.2 nous présentons la théorie d'existence/stabilité pour l'équation CF. Nous commençons par le modèle continu et homogène en espace. Nous poursuivons par le modèle discret et non homogène en espace. Nous terminons par le modèle continu et non homogène en espace. Comme application de ces résultats de stabilité nous présentons dans la section D.3 une asymptotique qui permet d'obtenir (rigoureusement) le modèle continu à partir du modèle discret de l'équation CF ainsi qu'une asymptotique qui permet d'obtenir l'équation LSW comme limite du modèle de BD. Dans la section D.4 nous revenons sur la question fondamentale de la conservation de la masse (D.15) et nous établissons que suivant le choix des taux de réactions la conservation de la masse (D.15) est effective ou, à l'inverse, cesse d'être vraie au bout d'un temps fini T_g, appelé temps de gélification. Enfin, dans la section D.5 nous abordons rapidemment le problème du comportement asymptotique en temps grand des solutions de l'équation CF.

D.2. Théorèmes d'existence.

D.2.1 Équations de Coagulation-Fragmentation homogènes.

Les premiers travaux sur l'existence remonte à Melzak [184]. Par des techniques de Point fixe de Banach ou de transformation de Laplace, des résultats d'existence ont été obtenus par [252], [179], [5], [23] pour des taux sous-linéaires. On trouvera aussi dans la littérature de physique théorique la construction de solutions explicites pour l'équation de coagulation seule discrète ou continue pour des taux particuliers [161], [160], [113]. Plus récemment, afin de traiter des coefficients généraux, des méthodes de compacité sont introduites par [219], [116] pour l'équation CF discrète et [53], [118], [220], [109], [150] pour l'équation continue.

Nous présentons très schématiquement la théorie de l'existence de solution pour l'équation de CF continue. L'approche est celle de [272] et [273] ainsi qu'une transposition à l'équation continue de [83] que l'on pourra retrouver dans [278]. Les preuves d'existence reposent sur des résultats de stabilité. Cette manière de voir a notre préférence dans la mesure où elle permet de traiter, dans le même temps, des questions de modélisation et de comportement en temps grand: voir les sections D.3 et D.4. Comme toujours la preuve de l'existence s'effectue selon les étapes suivantes:

1) recherche de bornes a priori;

2) Théorème de stabilité pour des suites de solutions qui satisfont les bornes 1) uniformément;

3) Adaptation (immédiate!) des deux étapes précédentes pour une famille de solutions d'équations régularisées pour lesquelles l'existence s'obtient plus aisémment (par exemple, par un point fixe de Banach).

Sous les conditions (D.6) et (D.7) sur les taux de réactions, une solution f de l'équation de CF homogène

$$(D.16) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} = Q(f) \qquad (t,y) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}_+ \\ f(0,y) = f_{in}(y) \qquad y \in \mathbb{R}_+ \end{cases}$$

vérifie formellement la conservation de la masse, et donc la borne a priori

$$(D.17) \qquad \sup_{t\in[0,\infty)} \int_0^\infty y\, f(t,y)\, dy \le \int_0^\infty y\, f_{in}(y)\, dy.$$

On montre aussi qu'il existe $\Phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ (dépendant de f_{in}) vérifiant $1 \le \Phi(s)/s \to \infty$ lorsque $s \to \infty$ et telle que

$$(D.18) \qquad \forall\, T, R > 0 \qquad \sup_{[0,T]} \int_0^R \Phi(f(t,y))\, dy \le C_{T,R} < \infty,$$

où $C_{T,R}$ ne dépend que de f_{in}, K_0 dans (D.7).

i) Un résultat général. On fait l'hypothèse de croissance supplémentaire

$$(D.19) \qquad \forall z_0 > 0, \qquad \sup_{z\in[0,z_0]} \frac{a(z,z')}{z'}, \ \sup_{z\in[0,z_0]} \frac{b(z,z')}{z'} \underset{z'\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Les bornes (D.17) et (D.18) suffisent pour établir un théorème de stabilité d'où on déduit le résultat d'existence suivant.

Théorème D.1. [272] *Supposons que les taux de réactions satisfont (D.6), (D.7) et (D.19). Pour toute donnée initiale* $0 \le f_{in} \in L^1(\mathbb{R}_+, (1+y)\, dy)$ *il existe une fonction* $0 \le f \in C([0,\infty); L^1(\mathbb{R}_+))$ *satisfaisant les bornes (D.17), (D.18) et qui est solution (au sens des distributions) de l'équation CF continue homogène.*

Un mot sur la preuve du résultat de stabilité correspondant. Le Lemme de Dunford-Pettis garantie que, d'une suite de solutions (f^n) satisfaisant les bornes (D.17), (D.18) uniformément en n, on puisse extraire une sous-suite $(f^{n'})$ qui converge faiblement dans L^1 vers une fonction $f \in C([0,\infty); L^1(\mathbb{R}_+))$. De plus, en utilisant l'équation, on en déduit que pour tout $\psi \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+)$ telle que $\psi(y)/y \to 0$ lorsque $y \to \infty$ on a

$$(D.20) \qquad \int_0^\infty f_n(t,y)\, \psi(y)\, dy \ \to \int_0^\infty f(t,y)\, \psi(y)\, dy.$$

Or la condition (D.19) est précisément la condition qui permet de passer à la limite dans les termes de réactions $Q(f_n)$ sachant (D.20) et on en déduit que f est encore solution.

ii) Coagulation faible ou dominée par la fragmentation. On fait l'une des hypothèses supplémentaires

$$a(z,z') \le K_1\, (1 + z + z')$$

ou

$$(D.21) \qquad a(z,z') \le K_2\, (1 + z^\lambda + (z')^\lambda), \quad b(z,z') \ge K_3\, (1 + z + z')^\gamma, \quad \lambda - \gamma < 2, \ K_3 > 0.$$

On montre alors qu'il existe une fonction $\Psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que $\Psi(y)/y \to \infty$ lorsque $y \to \infty$ telle qu'une solution f de l'équation CF (D.16) satisfait (au moins formellement)

$$(D.22) \qquad \forall T > 0 \qquad \sup_{[0,T]} \int_0^\infty f(t,y)\, \Psi(y)\, dy \le C_T < \infty.$$

iii) Coagulation forte et dominant la fragmentation. On fait l'hypothèse supplémentaire (qui est l'opposée de (D.21))

$$(D.23)\quad a(z,z') \geq K_2\,(1+y^\alpha\,y'^\beta+y'^\alpha\,y^\beta),\quad b(z,z') \leq K_3\,(1+z+z')^\gamma,\quad \lambda>1,\ \lambda-\gamma>2,\ K_2>0,$$

où l'on note $\lambda = \alpha+\beta$. On montre cette fois-ci que toute solution de l'équation CF satisfait

$$(D.24)\qquad \forall T>0 \qquad \int_0^T \left(\int_0^\infty f(t,y)\,\frac{y^{\lambda/2+1/2}}{(\ln(e+y))^2}\,dy\right)^2 dt \leq C_T < \infty.$$

Nous reviendrons sur la preuve de (D.22) et (D.24) dans la section D.4.

Dans les deux cas ii) et iii), la borne supplémentaire (D.22) ou (D.24) permet de montrer (D.20) pour tout ψ tel que $\psi(y)/(1+y)L^\infty(\mathbb{R}_+)$. Une telle information permet de passer à la limite dans les termes de réactions $Q(f_n)$ sous la seule condition de croissance (D.7) sur les taux de réactions. On étend donc sans difficulté le Théorème D.1 d'existence au cas où les taux de réactions satisfont (D.6) et (D.7) ainsi que (D.21) ou (D.23).

On voit donc que le contrôle des moments des solutions de l'équation CF est au coeur des deux processus (opposés) de coagulation et de fragmentation. À noter enfin la curiosité suivante pour le cas modèle

$$a(z,z') = y^\alpha\,y' + y'^\alpha\,y,\quad b(z,z') = (1+z+z')^\gamma,\quad \alpha\in(0,1],\ \lambda-\gamma=2.$$

On ne sait pas démontrer en général l'existence d'une solution: dans ce cas la coagulation est "forte" et la fragmentation est critique.

D.2.2 Équation de Coagulation-Fragmentation discrète non-homogène.

Nous présentons dans cette sous-section et la suivante les résultats d'existence globaux en temps dans un cadre L^1 pour les équations (D.1)-(D.2) et (D.1)-(D.3) que nous avons obtenu en collaboration avec Ph. Laurençot [269], [270]. Ces résultats reposent sur des résultats de stabilité faible dans l'esprit de la théorie développée pour l'équation de Boltzmann. La difficulté est ici aussi de contrôler les termes quadratiques dans l'opérateur de réaction (dûs à la coagulation) avec le peu d'estimations a priori disponibles. On montre qu'il n'est pas nécessaire de renormaliser les équations car les termes quadratiques (de coagulation) peuvent être (dans certains cas) estimés par les termes de fragmentation (qui sont eux linéaires et peuvent donc être contrôlés par la borne a priori sur la masse totale qui est pour l'instant, rappelons le, la seule borne dont on dispose).

Des résultats d'existence pour l'équation CF discrète non-homogène avaient été obtenus dans [73], [34], [78] suivi de [134], [253], [254], [153], [154]. Dans tous ces travaux, des hypothèses de structures (coefficients de diffusions constants, équation de coagulation seule, équation de fragmentation seule ou équation de Becker-Döring) ou des hypothèses de croissances très restrictives sur les coefficients sont faites, le plus souvent afin de déduire des bornes L^∞ sur f (ce qui permet bien sûr de donner un sens à $Q(f)$). Nous présentons ci-dessous un résultat d'existence général sous des hypothèses naturelles sur les coefficients de réactions et de diffusion et sur la donnée initiale.

Théorème D.2. [269] *Supposons $d_i>0$ pour tout $i\in\mathbb{N}^*$ et que les taux de réactions satisfont (D.6), (D.7), (D.19). Pour toute donnée initiale (f_{in}) telle que*

$$(D.25)\qquad Y_1(f_{in}) := \sum_{i\geq 1} i\int_\Omega f_{in,i}(x)\,dx < \infty,$$

il existe une fonction $f \in C([0,\infty); L^1(\Omega \times \mathbb{N}^*))$ satisfaisant les bornes

$$(D.26) \qquad \forall t \geq 0 \qquad Y_1(f(t,.)) \leq Y_1(f_{in}),$$

$$(D.27) \qquad \forall T > 0, i \in \mathbb{N}^* \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^T \int_\Omega a_{i,j}\, f_i(t,x)\, f_j(t,x)\, dxdt \leq C_{i,T},$$

qui est solution de l'équation de CF discrète non homogène (D.1),(D.3).

La preuve de ce résultat s'effectue en deux étapes. Première étape, établir formellement la borne (D.27) (en raisonnant par récurrence sur l'indice $i \in \mathbb{N}^*$ de l'équation dans le système d'équations (D.1),(D.3)). Celle-ci permet de définir (comme fonction de $L^1((0,T)\times\Omega)$) les termes de coagulation. À noter que la borne (D.25) suffit pour donner un sens aux termes de fragmentations. Deuxième étape, par un argument de Boot Strap, on montre que tous les termes de réaction appartiennent à des compacts faibles de $L^1((0,T)\times\Omega)$. On adapte alors aisémment les arguments présentés dans la section D.1 pour l'équation de CF homogène, et le Théorème D.2 en découle.

On commence par écrire la première équation du système d'équations CF

$$(D.28) \qquad \frac{\partial f_1}{\partial t} - d_1\, \Delta_x\, f_1 = -f_1 \sum_{j=1}^{\infty} a_{1,j}\, f_j + \sum_{j=1}^{\infty} b_{1,j}\, f_{1+j}$$

que l'on intègre par rapport aux variables t et x. Il vient

$$\int_\Omega f_1(T,x)\, dx + \int_0^T \int_\Omega f_1 \sum_{j=1}^{\infty} a_{1,j}\, f_j\, dxdt = \int_\Omega f_{1,in}(x)\, dx + \int_0^T \int_\Omega \sum_{j=1}^{\infty} b_{1,j}\, f_{1+j}\, dxdt$$

d'où on déduit

$$\int_0^T \int_\Omega f_1 \sum_{j=1}^{\infty} a_{1,j}\, f_j\, dxdt \leq (1 + 2\, T\, K_0)\, \|f_{in}\|_X$$

et ce qui prouve (D.27) pour $i = 1$. On obtient (D.27) en procédant par récurrence et en effectuant le même calcul pour les autres équations du système.

Pour conclure il suffit maintenant d'établir :

Lemme D.3. *Pour tout $i \in \mathbb{N}_*$ et $T > 0$ il existe un compact $\mathcal{K}_{i,T}$ de $L^1((0,T)\times\Omega)$ et une fonction $\omega_{i,T}$ telle que $\omega_{i,T}(r) \to 0$ lorsque $r \to \infty$ et*

$$(D.29) \qquad f_i \in \mathcal{K}_{i,T}$$

$$(D.30) \qquad \int_0^T \int_\Omega f_i\, \mathbf{1}_{f_i > r} \sum_{j=1}^{\infty} a_{1,j}\, f_j\, dxdt \leq \omega_{i,T}(r) \qquad \forall r > 0,$$

où $\mathcal{K}_{i,T}$ et $\omega_{i,T}$ ne dépendent que de f_{in} et des taux de réactions.

Pour prouver (D.29) on peut invoquer, par exemple, les résultats de régularité de [26], [39] qui dans la situation présente s'écrivent

$$\forall i \in \mathbb{N}_*, \forall T > 0 \qquad \nabla_x f_i \in L^1((0,T)\times\Omega).$$

Or, des bornes (D.26), (D.27) et de l'équation on déduit aussi

$$\forall i \in \mathbb{N}_*, \forall T > 0 \qquad f_i \in W^{1,1}(0,T; W^{-2,1}(\Omega)).$$

La compacité (D.29) est alors une conséquence immédiate de ces deux bornes et du Lemme d'Aubin.

En multipliant maintenant l'équation (D.28) par $\mathbf{1}_{f_1>r}$ et en intégrant comme précédemment il vient

$$\int_0^T \int_\Omega \mathbf{1}_{f_1>r}\, f_1 \sum_{j=1}^\infty a_{1,j}\, f_j\, dxdt \le \int_\Omega (f_{1,in}(x)-r)_+\, dx + \int_0^T \int_\Omega \mathbf{1}_{f_i>r} \sum_{j=1}^\infty b_{1,j}\, f_{1+j}\, dxdt.$$

Or d'après (D.29) (et les bornes (D.19), (D.26)) le terme de droite tend clairement vers 0 lorsque $r\to\infty$, ce qui prouve (D.30) pour $i=1$. La suite d'estimations (D.30) s'obtient par récurrence en raisonnant comme nous venons de le faire pour chaque équation $i\ge 2$.

D.2.3 Équation de Coagulation-Fragmentation continue non-homogène.

La démonstration de l'existence dans le cas de l'équation CF discrète non-homogène que nous venons de présenter repose clairement sur le caractère discret de cette équation et ne peut donc pas être transposée telle quelle au modèle continu. Dans [270] nous développons deux cadres dans lesquels des résultats de stabilité (et d'existence) peuvent être obtenus pour l'équation CF continue non-homogène. Ici, en plus de l'hypothèse de croissance (D.19), nous sommes amenés à faire des hypothèses de structure sur les taux de réactions ce qui permet d'obtenir davantage d'estimations a priori.

Commençons par une définition. On dit que $0\le f\in C([0,\infty);L^1(\Omega\times\mathbb{R}))$ est solution de l'équation CF continue non-homogène (D.1),(D.3) si

$$\begin{array}{ll} \forall\, t\ge 0 & Y_1(f(t,.)) := \displaystyle\int_\Omega\int_0^\infty f(t,x,y)\, y\, dydx \le Y_1(f_{in}) \\ \forall T,R & f\in L^1((0,T)\times(1/R,R);W^{1,1}(\Omega)),\quad Q(f)\in L^1((0,T)\times\Omega\times(0,R)) \end{array}$$

et satisfait (D.1) au sens des distributions.

Théorème D.4. [270] *On suppose* $0<d\in C((0,\infty))$ *et (D.6), (D.7), (D.19).*
1. On fait l'hypothèse supplémentaire, dite d'équilibre en détails,

$$\exists M\in L^1(\mathbb{R}_+,(1+y)\,dy) \qquad a\,M\,M' = b\,M'' \qquad \forall\, y,y'\in\mathbb{R}_+.$$

Pour toute donnée initiale f_{in} telle que

$$f_{in}\in L^1(\Omega\times\mathbb{R},(1+y)\,dydx), \tag{D.31}$$

$$H(f_{in}|M) := \int_\Omega\int_0^\infty [f_{in}\,(\ln\frac{f_{in}}{M}-1)+M]\,dydx<\infty$$

il existe une solution f à l'équation CF continue non-homogène.

2. On fait l'hypothèse supplémentaire, dite de monotonie,

$$a(y',y-y')\le a(y',y)\quad b(y',y-y')\le A\,a(y',y)+B(y')\quad \forall y\ge y'\ge 0, \tag{D.32}$$

avec $B\in L^1(\mathbb{R}_+)$, $y\mapsto y\,B(y)\in L^\infty(\mathbb{R}_+)$. Pour toute donnée initiale f_{in} satisfaisant (D.31) il existe une solution f à l'équation CF continue non-homogène.

Avant de donner une idée de la preuve, remarquons que l'hypothèse d'équilibre en détail est satisfaite, par exemple, lorsque $a=b$, il convient alors de prendre $M(y)=e^{-y}$. L'hypothèse de monotonie est satisfaite pour une bonne moitié des exemples de la liste (D.4) (tous ceux qui n'ont pas de dépendance en $|z^\theta - {z'}^\theta|$). Cette hypothèse semble avoir été introduite pour la première fois dans [119].

Le Théorème D.4 est le premier résultat d'existence général d'une solution globale pour ce modèle de Coagulation et Fragmentation. Dans un cadre L^∞, des résultats d'existence avait été obtenus par Burobin [51], [52], pour l'équation de coagulation seule sous l'hypothèse de monotonie. Des résultats d'existence locaux ont été obtenus par Chae, Dubovski [74] pour le modèle complet ainsi que plus récemment par Amann [10]. Dans ce dernier article, des résultats d'existence globaux sont démontrés dans des cas particuliers, par exemple, lorsque la diffusion est constante ($d(y) \equiv D_0$), en absence de coagulation ou en dimension un d'espace ($\Omega \subset \mathbb{R}$).

Quelques indications sur la preuve du Théorème. L'hypothèse d'équilibre en détail permet de montrer (formellement) que l'entropie relative $H(f|M)$ est décroissante (et donc bornée) et que la dissipation d'entropie

$$D(f) = \int_\Omega \int_0^\infty \int_0^\infty [a\, f\, f' - b\, f''] \left(\ln(a\, f\, f') - \ln(b\, f'')\right] dy' dy dx \geq 0,$$

est aussi bornée dans $L^1(0,T)$. Ces bornes permettent de montrer que f et $Q(f)$ appartiennent à un compact faible de L^1 (pour estimer les termes de coagulation, on utilise une inégalité du type (A.35) et la borne sur le terme de dissipation d'entropie). On a également, comme dans la preuve du Lemme D.3, en utilisant [26], [39] et le Lemme d'Aubin: pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ il existe un compact fort $\mathcal{K}_{T,\psi}$ de $L^1((0,T) \times \Omega)$ tel que

$$\int_0^\infty f(.,y)\, \psi(y)\, dy \;\in\; \mathcal{K}_{T,\psi}.$$

Ces informations suffisent pour établir un résultat de stabilité en adaptant la théorie de DiPerna-Lions pour l'équation de Boltzmann [98] et le Théorème D.4 s'en déduit.

Lorsqu'on fait l'hypothèse de monotonie et si $b \equiv 0$ on montre sans peine que les quantités

$$Y_0(f) = \int_\Omega \int_0^\infty f(t,.)\, dy dx \quad \text{ et } \quad \Phi(f) = \int_\Omega \int_0^\infty \phi(f(t,.))\, dy dx,$$

sont décroissantes et ceci pour une large classe de fonctions ϕ convexes et surlinéaires à l'infini (par exemple, pour $\phi(s) = s^p \; \forall\, p > 1$). Sous la condition de domination de la fragmentation par la coagulation (D.32), on ne sait plus montrer que $Y_0(f)$ et $\Phi(f)$ sont des fonctionnelles de Lyapunov, mais on arrive à démontrer que ces fonctionnelles restent bornées ainsi que le terme de "dissipation d'entropie" D_Φ associée à l'"entropie" Φ si $\Phi(f_{in}) < \infty$. Grâce à (D.31) et au Théorème de De la Vallée-Poussin, il est aisé de construire une fonction convexe Φ telle que $\Phi(f_{in}) < \infty$ et rentrant dans la classe des fonctions pour lesquelles les bornes que nous venons de décrire sont valables. On obtient encore ainsi des bornes garantissant que f et $Q(f)$ appartiennent à des compacts faibles de L^1, et la suite de la preuve se fait comme dans le cas de l'hypothèse d'équilibre en détail.

D.3. Liens entre modèles discrets et continus.

Nous considérons dans cette section le problème du passage de l'équation CF discrète à l'équation CF continue et celui du passage de l'équation BD à l'équation LSW dans un cadre homogène en espace.

D.3.1 Des équations de Coagulation-Fragmentation discrètes aux équations continues.

Commençons par le passage de l'équation CF discrète à l'équation CF continue, que nous formulons dans les termes suivants: peut-on obtenir les équations CF continues comme limite d'équations de CF discrètes? Nous répondons positivement à cette question, en suivant l'approche introduite dans [261] (voir partie A.3.) pour l'équation de Boltzmann. Schématiquement cela se fait de la manière suivante:

(1) Étant donnés des taux $a(y,y')$, $b(y,y')$ et une donnée initiale f^{in} on définit une famille (indéxée par $\varepsilon > 0$) de taux discrets (a^ε_{ij}), (b^ε_{ij}) et une famille de données initiales $(c^{in,\varepsilon})$ et on associe $(c^\varepsilon(t))$ une famille de solutions associées à ces équations CF discrètes.

(2) On construit à partir des c^ε une famille de fonctions $f^\varepsilon(t)$ qui vérifient une certaine équation CF continue modifiée et des bornes uniformes en $\varepsilon > 0$ (que l'on déduit des bornes obtenues sur la famille c^ε).

(3) On passe à la limite dans cette équation et on montre qu'il existe une fonction de l'équation CF continue associée aux taux a et b et à la condition initiale f^{in}, obtenue comme limite des (f^ε).

La relation entre les modèles discrets et continus est une question classique qui a été abondamment étudiée. Les travaux antérieurs traitent la question soit d'un point de vue formel [106], [5], soit dans des cas particuliers (équation de coagulation seule [48] ou équation de fragmentation seule [258]) ou enfin d'un point de vue de l'analyse numérique [46].

Théorème D.5. *Considérons a, $b \in C(\mathbb{R}^2_+)$ des taux de réactions satisfaisant (D.6), (D.7), (D.19) et une donnée initiale continue $0 \le f_{in} \in L^1(\mathbb{R}_+, (1+y)\,dy)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on définit des taux de réactions et une donnée initiale discrète par*

$$a^\varepsilon_{ij} = \varepsilon\, a(\varepsilon\, i, \varepsilon\, j), \quad b^\varepsilon_{ij} = \varepsilon\, b(\varepsilon\, i, \varepsilon\, j), \quad f^\varepsilon_{in,i} = f_{in}(\varepsilon\, i),$$

et on considère $(f^\varepsilon_i)_i$ une solution de l'équation CF discrète associée. Alors la fonction

$$f^\varepsilon(t,y) := \sum_{i\in\mathbb{N}} f^\varepsilon_i(t)\,\chi^\varepsilon_i(y), \qquad \chi^\varepsilon_i(y) = \mathbf{1}_{(i\,\varepsilon,(i+1)\,\varepsilon)}(y),$$

converge (à extraction d'une sous-suite) vers une solution f de l'équation CF continue associée aux taux de réactions a, b et ayant pour condition initiale f_{in}.

L'idée principale de la démonstration est d'écrire l'équation CF discrète sous la forme faible: pour toute suite (φ_i) de réels (nulle à partir d'un certain rang)

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^\infty f^\varepsilon_i\,\varphi_i = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^\infty (a^\varepsilon_{ij}\,f^\varepsilon_i\,f^\varepsilon_j - b^\varepsilon_{ij}\,f^\varepsilon_{i+j})\,(\varphi_{i+j} - \varphi_i - \varphi_j), \tag{D.33}$$

et de réinterpréter (D.33) comme une formulation faible d'une équation CF continue "modifiée". Pour cela on introduit quelques notations. Pour tout $\varepsilon \in (0,1)$ on définit

$$a_\varepsilon(y,y') = \sum_{i,j=1}^\infty \frac{a_{i,j}}{\varepsilon}\,\chi^\varepsilon_i(y)\,\chi^\varepsilon_j(y'), \quad b_\varepsilon(y,y') = \sum_{i,j=1}^\infty \frac{b_{i,j}}{\varepsilon}\,\chi^\varepsilon_i(y)\,\chi^\varepsilon_j(y').$$

De plus, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ fixée, on définit la famille de fonctions (φ_ε) par

$$\varphi_\varepsilon(y) = \sum_{i=1}^\infty \varphi^\varepsilon_i\,\chi^\varepsilon_i(y), \qquad \varphi^\varepsilon_i = \frac{1}{\varepsilon}\int_{i\,\varepsilon}^{(i+1)\,\varepsilon}\varphi(y)\,dy.$$

Enfin, pour toute fonction g constante par morceaux $g(y) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i \, \chi_i^\varepsilon(y)$, $g_i \in \mathbb{R}$ on introduit

$$T_\varepsilon(g)(y,y') := \sum_{i,j=1}^{\infty} g_{i+j} \, \chi_i^\varepsilon(y) \, \chi_j^\varepsilon(y'), \qquad (y,y') \in \mathbb{R}_+^2,$$

qui doit être vue comme une approximation de $g(y+y')$. Avec ces nouvelles notations, l'équation (D.33) s'écrits

$$(D.34) \qquad \frac{d}{dt} \int_0^\infty f_\varepsilon \, \varphi_\varepsilon \, dy = \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty (a_\varepsilon \, f_\varepsilon \, f'_\varepsilon - b_\varepsilon \, T_\varepsilon(f_\varepsilon)) \, (T_\varepsilon(\varphi_\varepsilon) - \varphi_\varepsilon - \varphi'_\varepsilon) \, dy dy'.$$

Il convient alors de collecter suffisamment de bornes sur la suite (f_ε) pour pouvoir passer à la limite dans l'équation (D.34) et cela est effectivement possible en adaptant la preuve du résultat de stabilité présenté dans la section D2.1 (et en montrant, en particulier, que $T_\varepsilon(\varphi_\varepsilon) \to \varphi''$ et $T_\varepsilon(f_\varepsilon) \rightharpoonup f''$). On reconnaît alors que f est solution faible de l'équation CF continue homogène.

D.3.2 Des équations de Becker-Döring aux équations de Lifshitz-Slyozov-Wagner.

Comme nous l'avons vu en introduction, les équations BD et les équations LSW modélisent deux phases chronologiquement distinctes de la croissance des agglomérats. Les arguments physiques qui ont permis leur déduction par Becker et Döring d'une part et Lifshitz, Slyozov et Wagner d'autre part sont de natures différentes. Penrose et al [198] parviennent à dériver formellement le modèle LSW à partir du modèle BD, voir aussi les travaux ultérieurs [196], [197]. La première dérivation rigoureuse a été obtenue très récemment dans [81] (essentiellement dans le cas de coefficients k et q constants) et repose sur des résultats de stabilité pour l'équation LSW. Une théorie de stabilité et d'existence de solutions pour l'équation LSW avait été entreprise par [80] et [188] et poursuivie par [151], [152].

En nous appuyant sur les résultats de [151], [152], nous généralisons dans [274] la dérivation rigoureuse de LSW à partir de BD au cas de coefficients k et q homogènes, i.e.

$$(D.35) \qquad k(y) = a \, y^\lambda, \quad q(y) = b \, y^\mu, \qquad 0 \le \mu < \lambda \le 1, \; a, b > 0.$$

À noter que cela inclut le cas physique $k(y) = y^{1/3}$, $q(y) = 3$, cf. (D.11).

Théorème D.6. *On se donne deux coefficients k et q vérifiant (D.35) et une condition initiale $0 \le f_{in} \in L^1(\mathbb{R}_+; (1+y)\,dy) \cap W^{1,1}(\mathbb{R}_+)$ qui n'est pas à support compact. Pour tout $\varepsilon > 0$, on définit les taux de réactions et la donnée initiale*

$$(D.36) \qquad a_1^\varepsilon = \varepsilon^{3-\lambda} \, k(1), \; a_i^\varepsilon = k(i) \; i \ge 2, \quad b_i^\varepsilon = q(i), \; i \ge 1, \quad f_{in,i}^\varepsilon = \varepsilon^2 \, f_{in}(\varepsilon \, i), \; i \ge 1,$$

et on considère $(f_i^\varepsilon)_i$ la solution de l'équation de Becker-Döring associée. Alors la famille de fonctions $(f^\varepsilon, u^\varepsilon)$ définie par

$$(D.37) \qquad f^\varepsilon(t,x) := \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i \ge 2} f_i^\varepsilon(t \, \varepsilon^{\mu-1}) \, \chi_i^\varepsilon(x), \quad u^\varepsilon(t) = \varepsilon^{\mu-\lambda} \, f_1^\varepsilon(t \, \varepsilon^{\mu-1})$$

convergent (à extraction d'une sous-suite) vers une solution (f,u) de l'équation de Lifshitz-Slyozov-Wagner (D.5), (D.7) associée aux coefficients k et q et ayant pour condition initiale f_{in}.

L'idée du passage de l'équation BD à l'équation LSW est la suivante. On part d'une solution $f = (f_i)$ de l'équation BD associée aux taux $a_i = i^\lambda$, $b_i = i^\mu$. On écrit les équations (D1.10) sous la forme

$$\frac{d}{dt} f_i = \big(f_1 \ (i-1)^\lambda \ f_{i-1} - i^\lambda \ f_i\big) + ((i+1)^\mu \ f_{i+1} - i^\mu \ f_i) \qquad \forall i \geq 2.$$

On introduit le changement d'échelle en temps $g_i^\varepsilon(t) := f_i(t\,\varepsilon^{\mu-1})$ et le système d'équations devient

$$\frac{d}{dt} g_i^\varepsilon = \frac{((i+1)\ \varepsilon)^\mu \ g_{i+1}^\varepsilon - (i\ \varepsilon)^\mu \ g_i^\varepsilon}{\varepsilon} - \varepsilon^{\mu-\lambda} \ g_1^\varepsilon \ \frac{(i\ \varepsilon)^\lambda \ g_i^\varepsilon - ((i-1)\ \varepsilon)^\lambda \ g_{i-1}^\varepsilon}{\varepsilon} \qquad \forall i \geq 2,$$

que l'on complète avec la conservation de la masse (D.10)

$$g_1^\varepsilon(t) + \sum_{j=2}^\infty j\,\varepsilon^2 \,\frac{g_j^\varepsilon}{\varepsilon^2} = Y_1(0).$$

En introduisant alors le changement d'échelle en taille et distribution

$$v^\varepsilon(t) := \varepsilon^{\mu-\lambda}\, g_1^\varepsilon(t), \quad g^\varepsilon(t,y) := \sum_{i\geq 2} \frac{g_i^\varepsilon(t)}{\varepsilon^2}\, \mathbf{1}_{i\,\varepsilon \leq y < (i+1)\,\varepsilon}$$

le système précédant se traduit pour ε tendant vers 0 (de sorte que $y \sim i\,\varepsilon$ peut être considérée comme une variable continue) par

$$(D.38) \qquad \frac{\partial}{\partial t} g^\varepsilon \sim \frac{\partial}{\partial y}(y^\mu g^\varepsilon) - v^\varepsilon \ \frac{\partial}{\partial y}(y^\lambda \ g^\varepsilon), \qquad \varepsilon^{\lambda-\mu} \ v^\varepsilon(t) + \int_0^\infty y\, g^\varepsilon(t,y)\, dy = Y_1(0).$$

Si on sait montrer que

$$(D.39) \qquad (v^\varepsilon, g^\varepsilon) \text{ appartient à un compact faible de } \ L^\infty(0,T) \times L^\infty(0,T; L^1(\mathbb{R}_+))$$

alors, $(v^\varepsilon, g^\varepsilon)$ converge (à extraction d'une sous-suite) vers un couple de fonctions (v, g) qui est solution de

$$\frac{\partial}{\partial t} g = \frac{\partial}{\partial y}(y^\mu g) - v \ \frac{\partial}{\partial y}(y^\lambda \ g), \qquad \int_0^\infty y\, g(t,y)\, dy = Y_1(0),$$

ce qui est précisément dire que (v, g) est solution de l'équation LSW (D.11), (D.13).

La construction de $(u^\varepsilon, f^\varepsilon)$ grâce à (D.36), (D.37) permet de justifier (D.39). Remarquons qu'une borne de g^ε dans $L^\infty(0,T; L^1(\mathbb{R}_+, (1+y)\,dy))$ se déduit immédiatement de (D.38) et que la compacité faible s'obtient aisément. Par contre, la borne L^∞ sur (u^ε) n'est pas une conséquence immédiate de (D.38) et demande un peu plus de travail.

D.4. Conservation de la masse et phénomène de gélification.

Dans cette section nous présentons les principaux résultats établis dans [272], [273] et dans le travail en préparation [278]. Nous nous posons la question suivante: les solutions de l'équation CF homogène continu (pour simplifier, nous ne considérons que ce modèle) conservent-elles la masse totale

$$Y_1(t) := \int_0^\infty f(t,y)\, y\, dy = Y_1(0) \qquad \forall t \geq 0$$

ou, à l'opposé, existe-t-il un instant $T_g \geq 0$ (appelé temps de *gélification*) à partir duquel de la masse est perdue

$$Y_1(t) < Y_1(0) \qquad \forall t > T_g?$$

L'interprétation de ce phénomène est que le processus de coagulation, formant des agglomérats de tailles de plus en plus grosses, "s'emballe" et qu'en un temps fini des particules de taille infinie (appelées *gel*) sont créées. À noter qu'il n'est pas clair que le modèle CF reste pertinent après ce temps de gélification, en particulier, parce que la masse du système qui se trouve sous forme de gel n'est plus prise en compte. Lorsque ce phénomène se produit, il décrit une transition de phase du système.

Théorème D.7. *Supposons (pour simplifier) que les taux de réactions sont*

$$a(y,y') = x^\alpha \, y'^\beta + y^\beta \, y'^\alpha, \qquad b(y,y') = (1+y+y')^\gamma, \tag{D.40}$$

et soit $f_{in} \in L^1(\mathbb{R}_+; (1+y)\,dy)$.

1. Si $\lambda := \alpha + \beta \leq 1$ *ou si* $\gamma > \lambda - 2$ *il existe une solution de l'équation CF qui conserve la masse.*

2. Si $\lambda > 1$ *et* $\gamma < \lambda - 2$ *il existe* Y^* *tel que si* $Y_1(f_{in}) > Y^*$ *pour toute solution de l'équation CF il y a gélification.*

3. Si $\lambda > 1$ *et* $b \equiv 0$ *ou si* $\lambda = 2$ *et* $\gamma < -1$ *pour toute solution de l'équation CF il y a gélification (sans condition sur* $Y_1(f_{in})$*) et* $Y_1(t) \to 0$ *lorsque* $t \to \infty$.

La question de la conservation de la masse totale a été abondamment étudiée et nous renvoyons à [252], [104], [23], [221], [109], [83] ainsi qu'à [272], [278].

À partir de la fin des années 70, Ziff et Lushnikov conjecturent l'existence du phénomène de gélification pour les équations de Coagulation seule. Une preuve rigoureuse est donnée dans le cas $a_{i,j} = i\,j$ par Leyvraz et Tschudi [161], des solutions explicites qui gèlent sont aussi construites dans des cas particuliers [160], [139] et de nombreux arguments formels sont avancés [139], [113], [104], [50]. Récemment, Jeon parvient à montrer l'existence (par une méthode probabiliste) d'une solution qui gèle pour toute donnée initiale de masse finie et pour un taux de coagulation satisfaisant $k\,(i\,j)^\alpha \leq a_{i,j} \leq K\,(i\,j)$, $\alpha \in (1/2, 1]$ et $\lim a_{ij}/ij = 0$ lorsque $i + j \to \infty$, voir [143], le cas du modèle CF avec fragmentation faible est aussi étudié. Enfin, Laurençot obtient une vitesse de décroissance de la masse totale vers 0 dans la cas du taux produit de coagulation, [150].

Le résultat que nous proposons ici généralise un peu le résultat de Jeon et simplifie considérablement la démonstration, qui s'adapte aisément à un modèle non-homogène en espace. De plus, nous mettons en évidence l'existence d'un exposant critique $\gamma^* = \lambda - 2$ pour la fragmentation, au dessus duquel la masse est conservée et en dessous duquel la gélification peut se produire. La philosophie de la preuve repose sur des estimations de moments d'une solution f de l'équation de Coagulation-Fragmentation.

Conservation de la masse. Pour montrer la conservation de la masse on démontre qu'un certain moment

$$Y_\Phi(t) := \int_0^\infty f(t,y)\,\Phi(y)\,dy$$

est borné avec Φ surlinéaire ($\Phi(y)/y \to \infty$ lorsque $y \to \infty$). Cela permet de montrer que si pour une solution régularisée on a $Y_1(f^n) = Y_1(f^{in})$ et $f^n \to f$, alors on peut passer à la limite dans la conservation de la masse et l'obtenir sur la solution limite. Donnons la démonstration dans le cas $\lambda \in (1,2]$ et $\gamma > \lambda - 2$ d'un contrôle du moment Y_2, nous renvoyons à [272] pour le cas (plus simple) $\lambda \in [0,1]$. L'identité fondamentale (D.14) avec $\psi(y) = y^2$ implique immédiatement

$$\frac{d}{dt} Y_2 \leq \frac{1}{2} Y_{1+\alpha}\, Y_{1+\beta} - \frac{B}{2}\, Y_{3+\gamma}.$$

Utilisant les inégalité d'Hölder $Y_{1+\alpha} \leq Y_1^{1-\alpha}\, Y_2^{\alpha}$ et $Y_2 \leq Y_1^{1-\frac{1}{2+\gamma}}\, Y_{3+\gamma}^{\frac{1}{2+\gamma}}$ il vient

$$\frac{d}{dt} Y_2 \leq \frac{1}{2}\, Y_1^{2-\lambda}\, Y_2^{\lambda} - \frac{B}{2}\, Y_1^{-1-\gamma}\, Y_2^{2+\gamma}.$$

Il suffit alors d'utiliser l'inégalité de Young pour obtenir

$$\frac{d}{dt} Y_2 + \frac{B}{4}\, Y_1^{-1-\gamma}\, Y_2^{2+\gamma} \leq C(Y_1, \lambda, \gamma).$$

Cette inégalité différentielle donne une estimation a priori du type $Y_2(t) \leq C\, t^{-\nu}$ avec $C, \nu > 0$ ne dépendant que de $Y_1(0)$, λ et γ et donc une borne pour le moment $Y_2(t)$ pour tout $t > 0$.

Gélification. Pour montrer la gélification, on démontre que $Y_1 \in L^2(\mathbb{R}_+)$ et donc que Y_1 ne peut rester constant. Lorsque $a(y, y') = y\, y'$, $b \leq B \in \mathbb{R}_+$ il suffit de choisir $\psi = 1$ dans l'identité fondamentale (D.14) ce qui donne

$$\frac{d}{dt} Y_0 \leq -\frac{1}{2} Y_1^2 + \frac{B}{2}\, Y_1.$$

En intégrant en temps cette inégalité différentielle il vient

$$\int_0^T Y_1^2(t)\, dt \leq 2\, Y_1(0) + B \int_0^T Y_1(t)\, dt,$$

et en utilisant l'inégalité de Young pour estimer le dernier terme, on obtient finalement

$$\forall\, T \geq 0 \qquad \int_0^T Y_1^2(t)\, dt \leq 4\, Y_1(0) + B^2\, T.$$

On voit donc qu'on ne peut avoir $Y_1(t) \equiv Y_1(0) > B$ (puisque sinon on aurait $Y_0(t) < 0$ en temps fini, ce qui est absurde) et cela prouve le Théorème D.7 dans ce cas particulier.

Dans le cas du taux de coagualtion donné par (D.40), la même preuve conduit à

$$(D.41) \qquad \forall\, T \geq 0 \qquad \int_0^T Y_{\lambda/2}^2(t)\, dt \leq 4\, Y_1(0) + B^2\, T,$$

mais il est clair que cela ne suffit plus pour conclure à la gélification lorsque $\lambda \in (1, 2)$. L'idée est de choisir $\psi(y) = \min(y, A)$ pour $A > 0$ fixé dans l'identité fondamentale (D.14), il vient

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty A \left(\int_A^\infty f(t, y)\, y^{\lambda/2}\, dy \right)^2 dt \leq Y_1(0) + \frac{B}{2} \int_0^T \int_A^\infty f(t, z)\, A\, z\, (1+z)^\gamma\, dz dt.$$

En majorant le dernier terme grâce à l'inégalité de Young on obtient

$$(D.42) \qquad \forall\, A > 0 \qquad \int_0^\infty \left(\int_A^\infty f(t, y)\, y^{\lambda/2}\, dy \right)^2 dt \leq \frac{4\, Y_1(0)}{A} + \frac{B^2\, T}{A^{2\,(\lambda/2-1-\gamma)}},$$

avec $\lambda - 2\,\gamma - 2 \geq \lambda - \gamma - 2 > 0$. Pour une fonction $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\Phi(0) = 0$ on note

$$C_k := \int_0^\infty \Phi'(A)\, A^k\, dk$$

et on calcule, en utilisant successivement l'inégalité de Cauchy-Schwarz, le Théorème de Fubini et la borne (D.42),

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left(\int_0^\infty f(t,y)\, y^{\lambda/2}\, \Phi(y)\, dy \right)^2 dt &\leq \int_0^T \left(\int_0^\infty \Phi'(A) \int_A^\infty f(t,y)\, y^{\lambda/2}\, dy\, dA \right)^2 dt \\
&\leq \int_0^T \left(\int_0^\infty \Phi'(A)\, A^{-k}\, dA \right) \left(\int_0^\infty \Phi'(A)\, A^k \left(\int_A^\infty f(t,y)\, y^{\lambda/2}\, dy \right)^2 dA \right) dt \\
&\leq C_{-k} \int_0^\infty \Phi'(A)\, A^k \int_0^T \left(\int_A^\infty f(t,y)\, y^{\lambda/2}\, dy \right)^2 dt\ dA \\
&\leq C_{-k} \left[4\, Y_1(0)\, C_{k-1} + B^2\, T\, C_{k+2+2\,\gamma-\lambda} \right].
\end{aligned}$$

Si on prend $\Phi(y) = (y-1)_+^{1-\lambda/2}$ et $k = 1 - \lambda/2 + \varepsilon$, on remarque que

$$C_k = \int_1^\infty \frac{dA}{A^{1+\varepsilon}}, \quad C_{1-k} = \int_1^\infty \frac{dA}{A^{\lambda-1-\varepsilon}}, \quad C_{k+2+2\,\gamma-\lambda} = \int_1^\infty \frac{dA}{A^{1+2\,(\lambda-\gamma-2)-\varepsilon}}$$

sont finis pour $\varepsilon > 0$ assez petit, ce qui prouve que pour deux constante K_1 et K_2 (ne dépendant que de γ, λ et B) on a

$$(D.43) \qquad \forall T > 0 \qquad \int_0^\infty \left(\int_2^\infty f(t,y)\, y\, dt \right)^2 dt \leq K_1\, Y_1(0) + K_2\, T.$$

Regroupant (D.41) et (D.43) on a démontré

$$\forall T > 0 \qquad \int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(t,y)\, y\, dt \right)^2 dt \leq K_1'\, Y_1(0) + K_2'\, T,$$

et on conclut encore qu'on ne peut avoir $Y_1(t) \equiv Y_1(0) > K_2'$.

Enfin, au moment de la gélification, il est conjecturé lorsque a est donné par (D.19) et $b \equiv 0$ (sur la base d'arguments formels et de solutions explicites) que

$$(D.44) \qquad f(T_g, y) \underset{y\to\infty}{\sim} \frac{1}{y^{\gamma+3/2}}$$

voir [139], [113], [105], [140], [161], [160]. Nous démontrons dans [273] le premier résultat rigoureux établissant (D.22) sous une forme sensiblement plus faible. Plus précisément, nous bornons supérieurement et inférieurement des quantités de type normes de Morrey-Campanato.

Théorème D.8. *Soit f une solution de l'équation de coagulation associée à un taux a de la forme (D.40) avec $\lambda \in (1,2]$. Supposons que pour $T_0 < T_1$ on ait*

$$\Delta Y_1 := Y_1(T_0) - Y_1(T_1) > 0.$$

Alors pour tout $\tau > 0$ il existe C_τ telle que quelque soit $R > 0$:

$$\int_{T_0}^{T_1} \left(\sup_{S>R} \frac{1}{S^\tau} \int_0^S y^{\lambda/2+1/2+\tau}\, f(t,y)\, dy \right)^2 dt \geq C_\tau\, \Delta Y_1$$

et

$$\int_{T_0}^{T_1} \left(\frac{1}{R^\tau} \int_0^R f(t,y)\, y^{\lambda/2+1/2+\tau}\, dy \right)^2 dt \le C_\tau\, Y_1(T_0).$$

Si l'on fait l'hypothèse (que l'on ne sait malheureusement pas vérifier) que $f(T_g, y) \sim y^\theta$ lorsque $y \to \infty$ on déduit du Théorème que $\theta = -\gamma - 3/2$, et on retrouve donc la conjecture (D.44).

D.5. Comportement asymptotique en temps grand.

Une voudrions juste évoquer maintenant le problème fondamental qu'est la description du comportement d'un solution $f(t,.)$ de l'équation de coagulation-fragmentation lorsque le temps t tend vers l'infini. Nous renvoyons à [108] et [6] pour une discution plus détaillé de cette question. Il convient de distinguer trois cas.

D.5.1 Fragmentation seule. Lorsque $a \equiv 0$, les agglomérats ne sont soumis qu'au seul processus de fragmentation qui tend à les casser en morceaux de plus en plus petits. Si f est solution de l'équation de fragmenatation seule on s'attend donc à ce que

$$f_i(t) \;\to\; 0 \text{ pour tout } \; i \ge 2 \qquad \text{et} \qquad f_1(t) \;\to\; Y_1(0)$$

dans le cas discret et

$$f(t,y) \;\rightharpoonup\; Y_1(0)\, \delta_0$$

dans le cas continu. De tels résultats sont établis dans [115], [119], [155].

D.5.2 Coagulation seule. À l'opposé, lorsque $b \equiv 0$, les agglomérats ne sont soumis qu'au seul processus de coagulation qui tend à les regrouper en des aggrégats de tailles de plus en plus grandes. Si f est solution de l'équation de coagulation seule on s'attend donc à ce que

$$f(t,z) \;\to\; 0 \text{ pour tout } \; z \in Z,$$

voir [178], [62], [153].

Même pour ces deux modèles très simples la question de la rapidité de convergence vers l'état final, et la description de l'éventuel profil de la solution pour les temps grands reste essentiellement un problème ouvert, voir [105] pour des arguments formels.

D.5.3 Hypothèse d'équilibre en détails. Nous supposons maintenant que les deux taux de coagulation et de fragmentation sont non nuls, et de plus, qu'ils satisfont l'hypothèse d'équilibre en détails

$$(D.45) \qquad \exists\, M \in L^1; \qquad a(z,z')\, M(z)\, M(z') = b(z,z')\, M(z+z') \qquad \forall z, z' \in Z.$$

Cette hypothèse d'équilibre en détails est toujours satisfaite pour le modèle de Becker-Döring, voir [24]. Pour des taux arbitraires a et b, un tel équilibre n'existe pas, en général. L'hypothèse (D.45) impose donc une certaine relation entre les taux de coagulation et de fragmentation. On remarque d'une part

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R} \qquad M_\alpha(z) = M(z)\, e^{\alpha\, z} \text{ satisfait aussi } \; (D.45),$$

et d'autre part si $M_\alpha \in L^1_1$ alors l'*entropie relative*

$$H(f|M_\alpha) := \int_0^\infty \left(f \left(\ln \frac{f}{M_\alpha} - 1 \right) + M_\alpha \right) dz$$

satisfait

$$\frac{d}{dt} H(f|M_\alpha) = -\frac{1}{2}\, D(f) \le 0$$

où le *taux de dissipation d'entropie* est défini par

$$D(f) := \int_0^\infty \int_0^\infty (a\, f\, f' - b\, f'')\, (\ln\, a\, f\, f' - \ln\, b\, f'')\, dz dz'.$$

Lorsque la conservation de la masse a lieu on s'attend donc à ce que

$$f(t,.) \;\to\; M_{\alpha_{in}} \text{ lorsque } \; t \to \infty \qquad (D.46)$$

où $M_{\alpha_{in}}$ est l'état d'équilibre de même masse que f_{in}, *pour autant qu'un tel état d'équilibre existe!*

On est amené à introduire

$$\alpha_s := \sup\{\alpha \in \mathbb{R}; M_\alpha \in L^1_1\} \in [0, +\infty]$$

de sorte que $M_\alpha \in L^1_1$ pour tout $\alpha < \alpha_s$ et

$$\rho_s := \sup\{Y_1(M_\alpha);\; \alpha \in (-\infty, \alpha_s)\}$$

de sorte qu'il existe $\alpha_{in} \in \mathbb{R}$ tel que $Y_1(M_{\alpha_{in}}) = Y_1(f_{in})$ si $Y_1(f_{in}) < \rho_s$. À noter que lorsque $\alpha_s = +\infty$, alors on a toujours $\rho_s = +\infty$, mais que lorsque $\alpha_s < \infty$; on peut avoir $\rho_s < \infty$ ou $\rho_s = \infty$ suivant les valeurs de la fonction M. Un exemple: lorsque $a = b$ on peut prendre $M(z) = e^{-z}$ et on trouve $\alpha_s = 1$ et $\rho_s = +\infty$.

Le résultat attendu est le suivant.

Théorème D.9. *Cas 1. Si $\rho_s = +\infty$ alors pour toute donnée initiale f_{in} il existe $\alpha_{in} \in \mathbb{R}$ tel que $Y_1(M_{\alpha_{in}}) = Y_1(f_{in})$ et l'on a le retour vers l'équilibre (D.46).*

Cas 2. Si $\rho_s < +\infty$, alors pour toute donnée initiale f_{in} telle que $Y_1(f_{in}) < \rho_s$ alors il existe $\alpha_{in} \in \mathbb{R}$ tel que $Y_1(M_{\alpha_{in}}) = Y_1(f_{in})$ et l'on a le retour vers l'équilibre (D.46), et pour toute toute donnée initiale f_{in} telle que $Y_1(f_{in}) \ge \rho_s$ on a

$$f(t,.) \;\to\; M_{\alpha_s} \textit{ lorsque } \; t \to \infty.$$

Ce théorème a été démontré pour le modèle BD homogène en espace, voir [24]. Pour des résultats partiels dans cette direction pour les équations CF discrètes et continues nous renvoyons à [22] [5], [79], [154], [222], [215], [270].

Concluons par quelques remarques sur les **problèmes ouverts** pour les modèles de coagulation et fragmentation.

La théorie d'existence est aujourd'hui bien avancé (toutefois, les hypothèses faites pour le modèle CFC non homogène demanderaient éventuellement à être mieux comprises), et le Théorème D.7 et son analogue pour l'équation BD (cf. [24]) répondent déjà de manière assez satisfaisante à la question de la conservation de la masse et de sa non conservation (phénomène de gélification). La question de l'unicité est quant à elle moins avancée, comme souvent en théorie cinétique. Il serait intéressant de comprendre si les conditions sur les taux de réactions faites dans les théorèmes d'unicité sont d'ordre technique ou sont essentielles.

Il semble particulièrement pertinent d'approfondir l'analyse des équation de coagulation-fragmentation selon les deux axes suivants (déjà pour les modèles CF homogène en espace):

• *Comportement qualitatif des solutions au moment de la gélification.*

- Le phénomène de gélification est-il un phénomène continu (la masse $M_1(t)$ est-elle continue)?

- Au temps de gélification T_g, le profil de f est-il exactement celui donné par (D.44)?

- Le temps de gélification T_g correspond-il exactement au temps d'explosion du moment $M_{1+\gamma}$?

Nous renvoyons à [273] pour une liste plus complète de problèmes autour de cette question.

• *Précision du comportement asymptotique en temps grand.*

- Le Théorème D.9 est-il vrai pour un modèle de coagulation-fragmentation plus général que le modèle BD?

- Sous les hypothèses D.5.1, D.5.2 et D.5.3, peut-on estimer la vitesse de retour vers l'état final, et peut-on préciser au second ordre le comportement de la solution (profil de la solution, passage de BD à LS)?

- Sans l'hypothèse d'équilibre en détails (D.45), peut-on trouver des taux pour lesquels des solutions stationnaires ou périodiques existent, et ces états sont-ils encore des attracteurs des solutions?

Enfin, il serait intéressant d'analyser des modèles plus complexes, prenant en compte d'autres phénomènes (évaporation, sédimentation, ...), non homogènes en espace, introduisant une variable additionnelle (de vitesse pour une particule, de charge parasitaire pour une cellule).

References

[1] F. Abrahamsson, *Strong L^1 convergence to equilibrium without entropy conditions for the spatially homogeneous Boltzmann equation*, Comm. P.D.E. **24**, 1501-1535 (1999)

[2] E. Acerbi, N. Fusco, *Semi-continuity problems in the calculus of variations*, Arch. Rat. Mech. Anal. **86**, 125-145 (1984)

[3] V.I. Agoshkov, *Spaces of functions with differential-difference characteristics and the smoothness of solutions of the transport equation*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **276** (6), 1289-1293 (1984)

[4] V.I. Agoshkov, *Functional spaces H_p^1, $H_p^{t+\alpha,k}$ and resolution conditions of boundary problems for transport equation*, prepublication du Department of Numerical Mathematics, USSR Academy of Sciences, Moscow.

[5] M. Aizenman and T.A. Bak, *Convergence to equilibrium in a system of reacting polymers*, Comm. Math. Phys. **65**, 203-230 (1979)

[6] D.J. Aldous, *Deterministic and stochastic models for coalescence (aggregation, coagulation): a review of the mean-field theory for probabilists*, Bernoulli **5**, 3-48 (1999)

[7] R. Alexandre, *Weak solutions of the Vlasov-Poisson initial boundary value problem*, Math. Meth. Appl. Sci. **16**, 587-607 (1993)

[8] R. Alexandre, L. Desvillettes, C. Villani, B. Wennberg, *Entropy dissipation and long-range interactions*, Arch. Ration. Mech. Anal. **152** (4), 327-355 (2000)

[9] R. Alexandre, C. Villani, *On the Boltzmann equation for long-range interactions*, Comm. Pure Appl. Math. **55** (1), 30-70 (2002)

[10] H. Amann, *Coagulation-fragmentation processes*, Arch. Rational Mech. Anal. **151**, 339-366 (2000)

[11] H. Andréasson, *Regularity of the gain term and strong L^1 convergence to equilibrium for the relativistic Boltzmann equation*, SIAM J. Math. Anal. **27** (5), 1386-1405 (1996)

[12] L. Arkeryd, *On the Boltzmann equation, I and II*, Arch. Rat. Mech. Anal., **45**, 1-34 (1972)

[13] L. Arkeryd, *Intermolecular forces of infinite range and the Boltzmann equation*, Arch. Rat. Mech. Anal., **77**, 11-21 (1981)

[14] L. Arkeryd, *Asymptotic behavior of the Boltzmann equation with infinite range forces*, Comm. Math. Phys., **86**, 475-484 (1982)

[15] L. Arkeryd, *Stability in L^1 for the spatially homogeneous Boltzmann equation*, Arch. Rat. Mech. Anal., **103**, 151-167 (1988)

[16] L. Arkeryd, *On the strong L^1 trend to equilibrium for the Boltzmann equation*, Stud. Appl. Math. **87** (3), 283-288 (1992)

[17] L. Arkeryd, C. Cercignani, *A global existence theorem for initial-boundary-value problem for the Boltzmann equation when the boundaries are not isothermal*, Arch. Rat. Mech. Anal. **125**, 271-287 (1993)

[18] L. Arkeryd, A. Heintz, *On the solvability and assymptotics of the Boltzmann equation in irregular domains*, Commun. in P.D.E. **22**, 2129-2152 (1997)

[19] L. Arkeryd, N. Maslova, *On diffuse reflection at the boundary for the Boltzmann equation and related equations*, J. of Stat. Phys. **77**, 1051-1077 (1994)

[20] H. Babovski, *On a simulation scheme for the Boltzmann equation*, Math. Med. Appl. Sc. **8**, 223-233 (1986)

[21] H. Babovsky, R. Illner, *A convergence proof for Nanbu's simulation method for the full Boltzmann equation*, SIAM J. Numer. Anal. (1989)

[22] J.M. Ball, J. Carr, *Asymptotic behaviour of solutions to the Becker-Döring equations for arbitrary initial data*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **108**, 109-116 (1988)

[23] J.M. Ball, J. Carr, *The discrete coagulation-fragmentation equations : existence, uniqueness, and density conservation*, J. Statist. Phys. **61**, 203-234 (1990)

[24] J.M. Ball, J. Carr, O. Penrose, *The Becker-Döring cluster equations : basic properties and asymptotic behaviour of solutions*, Commun. Math. Phys. **104**, 657-692 (1986)

[25] J. Ball, F. Murat, Remarks on Chacon's Biting lemma, *Proc. Amer. Math. Soc.* **107** (3), 655-663 (1989)

[26] P. Baras, M. Pierre, *Problèmes paraboliques semi-linéaires avec données mesures*, Appl. Anal. **18**, , 111-149 (1984)

[27] C. Bardos, *Problèmes aux limites pour les E.D.P. du premier ordre à coefficients réels; théorèmes d'approximation; application à l'équation de transport*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4^e série, **3**, 185-233 (1970)

[28] C. Bardos, P. Degond, *Global existence for the Vlasov-Poisson equation in three space variables with small initial data*, Ann. I.H.P., Analyse non-linéaire, **2**, 101-118 (1985)

[29] R. Beal, V. Protopopescu, *Abstract time dependent transport equations*, J. Math. Ann. and Appl. **121**, 370-405 (1987)

[30] R. Becker, W. Döring, *Kinetische Behandlung der Keimbildung in übersättigten Dämpfern*, Ann. Phys. (Leipzig) **24**, 719-752 (1935)

[31] N. Bellomo, G. Toscani, *On the Cauchy problem for the nonlinear Boltzmann equation*, J. Math. Phys. **26**, 334-338 (1985)

[32] N. Ben Abdallah, *Weak Solutions of the Vlasov-Poisson Initial Boundary Value Problem*, Math. Meth. Appl. Sci. **17**, 451-476 (1994)

[33] N. Ben Abdallah, P. Degond, A. Mellet, F. Poupaud, *Electron transport in semiconductor superlattices*, to appear in Quarterly Appl. Math.

[34] Ph. Bénilan and D. Wrzosek, *On a infinite system of reaction-diffusion equations*, Adv. Math. Sci. Appl. **7**, 349-364 (1997)

[35] M. Bézard, Régularité L^p précisée des moyennes dans les équations de transport, Bull. Math. France **22**, 29-76 (1994)

[36] G.A. Bird, *Molecular gas dynamics*, Clarendon Press, Oxford, (1976)

[37] A.V. Bobylev, *Moment inequalities for the Boltzmann equation and applications to spatially homogeneous problems*, J. Statist. Phys. **88** (5-6), 1183-1214 (1997)

[38] A.V. Bobylev, A. Palczewski, J. Schneider, *A consistency result for a discrete velocity model of the Boltzmann equation*, SIAM J. Num. Anal. (1997)

[39] L. Boccardo, T. Gallouët, *Nonlinear elliptic and parabolic equations involving measure data*, J. Funct. Anal. **87**, 149-169 (1989)

[40] A. Bogdanov, V. Dubrovsky, M. Krutykov, D. Kulginov, V. Strelchenya, *Interaction of gases with surfaces*, Lecture Notes in Physics, Springer, (1995)

[41] L. Boltzmann, *Weitere studien über das wärme gleichgenicht unfer gasmoläkuler* Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften **66**, 275-370 (1872). Traduction: *Further studies on the thermal equilibrium of gas molecules* in Kinetic Theory **2**, 88-174 , Ed. S.G. Brush, Pergamon, Oxford (1966)

[42] S. N. Bose, *Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese*, Z. Phys. **26**, 178-181 (1924)

[43] G. Bouchitté, M. Valadier, *Integral representation of Convex functionals on a space of measures* **80**, 398-420 (1988)

[44] F. Bouchut, L. Desvillettes, *A proof of the smoothing properties of the positive part of Boltzmann's kernel*, Rev. Mat. Iberoamericana **14** (1), 47-61 (1998)

[45] F. Bouchut, L. Desvillettes, *Averaging lemmas without time Fourier transform and application to discretized kinetic equation* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **129** (1), 19-36 (1999)

[46] I. Bouzoubaa, K. Hamdache, A. Noussair, *Global weak solutions via a transport-projection scheme to a thin film growth kinetic model*, preprint (1999).

[47] J. Brooks, R. Chacon, *Continuity and compactness of measures*, Adv. in Math. **37**, 16-26 (1980)

[48] O. Bruno, A. Friedman, F. Reitich, *Asymptotic behavior for a coalescence problem*, Trans. Amer. Math. Soc. **338**, 133-158 (1993)

[49] C. Buet, *A discrete-velocity scheme for the Boltzmann operator of rarefied gas dynamics*, Transport Theory Statist. Phys. **25** (1), 33-60 (1996)

[50] E. Buffet, J.V. Pulé, *Gelation: the diagonal case revisited*, Nonlinearity **2**, 373-381 (1989)

[51] A.V. Burobin, *Existence and uniqueness of a solution of a Cauchy problem for the inhomogeneous three-dimensional coagulation equation*, Differential Equations **19**, 1187-1197 (1983)

[52] A.V. Burobin, *The Cauchy problem for the spatially inhomogeneous equation of coagulation taking diffusion into account*, Differential Equations (1985)

[53] A.V. Burobin, V.A. Galkin *Solutions of an equation of coagulation*, Differential Equations (1981)

[54] H. Cabannes, *The discrete Boltzmann equation (Theory and Applications),* Lectures notes, University of California, Berkeley (1980).

[55] R.E. Caflisch, C.D. Levermore, *Equilibrium for radiation in a homogeneous plasma*, Phys. Fluids **29**, 748-752 (1986)

[56] M. Cannone, C. Cercignani, *On the trace theorem in kinetic theory*, Appl. Math. Letters, **4**, 63-67 (1991)

[57] J.A. Carillo, *Global weak solutions for the initial-boundary value problems to the Vlasov-Poisson-Fokker-Planck system*, Math. Meth. Appl. Sci. **21**, 907-938 (1998)

[58] T. Carleman, *Sur la théorie de l'équation intégrodifférentielle de Boltzmann*, Acta Math. **60**, 369-424 (1932)

[59] T. Carleman, *Problèmes mathématiques dans la théorie cinétiques des gaz*, Almqvist and Wiksell, Uppsala (1957).

[60] E.A. Carlen, M. Carvalho, *Strict entropy production bounds and stability of the rate of convergence to equilibrium for the Boltzmann equation*, J. Stat. Phys., **67**, (1992), 575-608.

[61] E.A. Carlen, M. Carvalho, *Entropy production estimates for Boltzmann equation with physically realistic collision kernels*, J. Stat. Phys., **74**, (1994), 743-782.

[62] J. Carr, F.P. da Costa, *Asymptotic behavior of solutions to the coagulation-fragmentation equations. II. Weak fragmentation*, J. Statist. Phys. **77** (1-2), 89-123 (1994)

[63] F. Castella, B. Perthame, *Estimations de Strichartz pour les quations de transport cintique*, C. R. Acad. Sci. Paris Sr. I Math. **322** (6), 535-540 (1996)

[64] P. Cembrabos, J. Mendoza, *Banach spaces of vector-valued functions*, Lecture Note in Mathematics n. 1676 Springer-Verlag (1997)

[65] C. Cercignani, *The Boltzmann equation and its application*, Springer-Verlag, Berlin (1988)

[66] C. Cercignani, *Scattering kernels for gas/surface interaction*, in Proceeding of the workshop on hypersonic flows for reentry problems **1**, INRIA, Antibes, 9-29 (1990)

[67] C. Cercignani, *Are there more than five linearly-independent collision invariants for the Boltzmann equation?*, J. Stat. Phys. **58**, 817-823 (1990)

[68] C. Cercignani, *On the initial value problem for the Boltzmann equation*, Arch. Rat. Mech. Anal. **116**, 307-315 (1992)

[69] C. Cercignani, *Initial boundary value problems for the Boltzmann equation*, transp. theory stat. phys. **25** (3-5), 425-436 (1996)

[70] C. Cercignani, R. Illner, M. Pulvirenti, *The mathematical theory of dilute gases*, Springer-Verlag (1994)

[71] C. Cercignani, M. Lampis, A. Lentati, *A new scattering kernel in kentic theory of gases*, transp. theory stat. phys. **24** (9), 1319-1336 (1995)

[72] M. Cessenat, *Théorèmes de trace L^p pour les espaces de fonctions de la neutronique*, Note C. R. Acad. Sci. Paris Série I **299**, 831-834 (1984) & **300**, 89-92 (1985)

[73] D. Chae, P.B. Dubovski, *Existence and uniqueness for spatially inhomogeneous coagulation equation with sources and effluxes*, Z. Angew. Math. Phys. **46**, 580-594 (1995)

[74] D. Chae, P.B. Dubovski, *Existence and uniqueness for spatially inhomogeneous coagulation-condensation equation with unbounded kernels*, J. Integral Equations Appl. **9**, 219-236 (1997)

[75] G. Chapline, G. Cooper, S. Slutz, *Condensation of photons in a hot plasma*, Phys. Rev. A **9**, 1273-1277 (1974)

[76] S. Chapman, T.G. Cowling, *The mathematical theory of non-uniform gases*, Cambridge. Univ. Press., London, (1952).

[77] Y. Choquet-Bruhat, *Problme de Cauchy pour le systme intgro diffrentiel d'Einstein-Liouville*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **21** (3), 181-201 (1971)

[78] J.F. Collet, F. Poupaud, *Existence of solutions to coagulation-fragmentation systems with diffusion*, Transport Theory Statist. Phys. **25**, 503-513 (1996)

[79] J.F. Collet, F. Poupaud, *Asymptotic behaviour of solutions to the diffusive fragmentation-coagulation system*, Phys. D **114**, 123-146 (1998)

[80] J.F. Collet, T. Goudon, *On solutions of the Lifshitz-Slyozov model*, Nonlinearity **13**, 1239-1262 (2000)

[81] J.F. Collet, T. Goudon, F. Poupaud, A. Vasseur, *The Becker-Döring system and its Lifshitz-Slyozov limit*, preprint, 2000.

[82] G. Cooper, Compton Fokker-Planck equation for hot plasmas, *Phys. Rev. D* **3**, 2312-2316 (1974)

[83] F.P. da Costa, *Existence and uniqueness of density conserving solutions to the coagulation-fragmentation equations with strong fragmentation*, J. Math. Anal. Appl. **192**, 892-914 (1995)

[84] J.S. Darrozès, J.P. Guiraud *Généralisation formelle du théorème H en présence de parois*, Note C. R. Acad. Sci. Paris, Série I **262 A**, 368-371 (1966)

[85] P. Degond, *Numerical Approximation of Collision Kinetic Equations by Deterministic Methods*, Summer school of "GdR SPARCH" in Oléron, Ecole Polytechnique, Palaiseau, (1993).

[86] P. Degond, B. Lucquin-Desreux, *The Fokker-Planck asymptotic of the Boltzmann collision operator in the Coulomb case*, Math. Mod. Meth. in appl. Sc. **2** (2), 167-182 (1992)

[87] F. Demengel, R. Temam, *Convex Functions of a measure and Applications*, Indiana Univ. Math. J. **33** (5), 673-709 (1984)

[88] L. Desvillettes, *Entropy dissipation rate and convergence in kinetic equations*, Comm. Math. Phys. **123**, 687-702 (1989)

[89] L. Desvillettes, *Convergence to equilibrium in large time for Boltzmann and BGK equation*, Arch. for Ration. Mech. and Anal. **110** (1), 73-91 (1990)

[90] L. Desvillettes, *On the asymptotic of the Boltzmann equation when the collisions become grazing*, Transp. theory and stat. phys. **21** (3), 259-276 (1992)

[91] L. Desvillettes, *Convergence to equilibrium in various situations for the solution of the Boltzmann equation*, in Nonlinear Kinetic Theory and Mathematical Aspects of Hyperbolic Systems, Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences, Vol. 9, World Sc. Publ., Singapour, 101-114 (1992)

[92] L. Desvillettes, *Some applications of the method of moments for the homogeneous Boltzmann and Kac equation*, Arch. Rational Mech. Anal. **123** (4), 387-395 (1993).

[93] L. Desvillettes, *On the convergence of splitting algorithms for some kinetic equations*, Asympt. Anal. **6** (4), 315-333 (1993)

[94] L. Desvillettes, C. Villani, *On the trend to global equilibrium in spatially inhomogeneous entropy-dissipating systems: the linear Fokker-Planck equation*, Comm. Pure Appl. Math. **54** (1), 1-42 (2001)

[95] G. DiBlasio, *Differentiability of spatially homogeneous solutions of the Boltzmann equation*, Comm. Math. Phys. **38**, 331-340 (1974)

[96] R.J. DiPerna, P.-L. Lions, *On the Fokker-Planck-Boltzmann equation*, Comm. Math. Phys. **120**, 1-23 (1988)

[97] R.J. DiPerna, P-L. Lions, *Solutions globales d'équations du type Vlasov-Poisson*, C. R. Acad. Sc., série I **307**, 655-658 (1988)

[98] R.J. DiPerna, P-L. Lions, *On the Cauchy problem for Boltzmann equations: Global existence and weak stability*, Ann. Math. **130**, 321-366 (1989)

[99] R.J. DiPerna, P-L. Lions, *Global weak solutions of Vlasov-Maxwell systems*, Comm. Pure Appl. Math., **42**, 729-757 (1989)

[100] R.J. DiPerna, P.-L. Lions, *Ordinary Differential Equations*, Transport Theory and Sobolev Spaces, Invent. Math. **98**, 707-741 (1989)

[101] R.J. DiPerna, P-L. Lions, *Global solutions of Boltzmann equation and the entropy inequality*, Arch. Rat. Mech. Anal. **114**, 47-55 (1991)

[102] R.J. DiPerna, P-L. Lions, Y. Meyer, *L^p regularity of velocity averages*, Ann. I.H.P., Analyse non-linéaire **8**, 271-287 (1991)

[103] J. Dolbeault, *Kinetic models and quantum effects: a modified Boltzmann equation for Fermi-Dirac particles*, Arch. Rat. Mech. Anal. **127**, 101-131 (1994)

[104] P.G.J. van Dongen, M.H. Ernst, *On the occurrence of a gelation transition in Smoluchowski's coagulation equation*, J. Stat. Phys., **44**, 785-792 (1986)

[105] P.G.J. van Dongen, M.H. Ernst, *Scaling solutions of Smoluchowski's coagulation equation*, J. Stat. Phys. **50** (1-2), 295-329 (1988)

[106] R.L. Drake, *A general mathematical survey of the coagulation equation*, in "Topics in Current Aerosol Research (part 2)," International Reviews in Aerosol Physics and Chemistry, Pergamon Press, Oxford, 203-376 (1972)

[107] H. Dreicer, *Kinetic Theory of an Electron-Photon Gas*, Phys. Fluids **7**, 735-753 (1964)

[108] P.B. Dubovskiĭ, *Mathematical Theory of Coagulation*, Lecture Notes Series **23**, Seoul National University, Research Institute of Mathematics, Global Analysis Research Center, Seoul (1994)

[109] P.B. Dubovskiĭ, I.W. Stewart, *Existence, uniqueness and mass conservation for the coagulation-fragmentation equation*, Math. Methods Appl. Sci. **19**, 571-591 (1996)

[110] A. Einstein, Stiz. Presussische Akademie der Wissenschaften, Phys-math. Klasse, Sitzungsberichte, **1924**, 3 (1924)

[111] A. Einstein, Presussische Akademie der Wissenschaften, Phys-math. Klasse, Sitzungsberichte, **23**, 3 (1925)

[112] T. Elmroth, *Global boundedness of moments of solutions of the Boltzmann equation for forces of infinite range*, Arch. Rat. Mech. Anal., **82** (1), 1-12 (1983).

[113] M.H. Ernst, R.M. Ziff, E.M. Hendriks, *Coagulation processes with a phase transition*, J. Colloid Interface Sci. **97**, 266-277 (1984)

[114] M. Escobedo, M.A. Herrero, J.J.L. Velazquez, *A nonlinear Fokker-Planck equation modeling the approach to thermal equilibrium in a homogeneous plasma*, Trans. Amer. Math. Soc. **350**, 3837-3901 (1998)

[115] A.F. Filippov, *On the distribution of the sizes of particles which undergo splitting*, Theory Probab. Appl. **6**, 275–294 (1961)

[116] A. Friedman, F. Reitich *A hyperbolic inverse problem arising in the evolution of combustion aerosol*, Arch. Rational Mech. Anal. **110**, 313-350 (1990)

[117] E. Gabetta, L. Pareschi, G. Toscani, *Wild's Sums and numerical approximation of nonlinear kinetic equations*, Transp. Theory Stat. Phys. (1996)

[118] V.A. Galkin, P.B. Dubovskii *Solution of the coagulation-fragmentation equations with unbounded kernels*, Differential equation **22**, 373-378 (1986)

[119] V.A. Galkin, V.A. Tupchiev, *About asymptotic behaviour of solutions of the coagulation equation*, Transactions of the Institute of Experimental Meteorology **19**, 31-41 (1978) (in Russian).

[120] V.F. Gaposkhin, *Convergences and limit theorems for sequences of random variables*, Theory of probability App. **17**, 379-400 (1979)

[121] R. Gatignol, *Théorie cinétique des gaz à répartition discrete de vitesses*, Lectures Notes in Physics, **36**, Springer Verlag (1975).

[122] P. Gérard, *Microlocal Defect Measures*, Comm. Partial Diff. Equation **16** (11), 1761-1794 (1991)

[123] R. T. Glassey, *The Cauchy Problem in Kinetic Theory*, SIAM, Philadelphia (1996)

[124] R. T. Glassey, W. A. Strauss, Asymptotic stability of the relativistic Maxwellian Publ. Res. Inst. Math. Sciences, Kyoto University, **29** (2), (1993)

[125] D. Goldstein, B. Sturtevant, J. E. Broadwell, *Investigation of the Motion of Discrete-Velocity Gases*, in "Rarefied Gas Dynamics: Theoretical and Computational Techniques"", E. P. Muntz, D. P. Weaver and D. H. Campbell (eds), Progress in Astronautics and Aeronautics, Vol **118**, AIAA, Washington DC, (1989).

[126] F. Golse, P-L. Lions, B. Perthame, R. Sentis, *Regularity of the moments of the solution of a transport equation*, J. Funct. Anal. **76**, 110-125 (1988)

[127] F. Golse, B. Perthame, R. Sentis, *Un résultat de compacité pour l'équation de transport et application au calcul de la valeur propre principale d'un opérateur de transport*, C. R. Acad. Sci. Paris Sr. I Math. **301**, 341-344 (1985)

[128] T. Goudon, *Sur quelques questions relatives à la théorie cinétique des gaz et à l'équation de Boltzmann*, Thèse de l'Université de Bordeaux (1996)

[129] T. Goudon, *Existence of solutions of transport equations with non linear boundary conditions*, European J. Mech. B Fluids **16**, 557-574 (1997)

[130] T. Goudon, *On the Boltzmann equations and Fokker-Planck asymptotic: influence of grazing collisions*, J. Stat. Phys. **89** (3-4), 751-776 (1997)

[131] T. Goudon, *Generalized invariant sets for the Boltzmann equation*, Math. Models Methods Appl. Sci. **7** (4), 457-476 (1997)

[132] H. Grad, *Principles of the kinetic theory of gases*, Flügge's Handbuch der Physik, **12**, 205-294 (1958)

[133] W. Greenberg, C. Van der Mee, V. Protopopescu, *Boundary value problems in abstract kinetic theory*, Birkhäuser Verlag (1987)

[134] F. Guiaş, *Convergence properties of a stochastic model for coagulation-fragmentation processes with diffusion*, Stochastic Anal. Appl. **19** (2), 245-278 (2001)

[135] Y. Guo, *Global weak solutions of the Vlasov-Maxwell system with boundary conditions*, Commun. Math. Phys. **154**, 154-263 (1993)

[136] T. Gustafsson, *Global L^p-properties for the spatially homogeneous Boltzmann equatione*, Arch. Rational Mech. Anal. **103**, 1-38 (1988)

[137] T. Hadhri, *Convex Function of a Measure and Application to a Problem of Nonhomogeneous Elasto-plastic Material*, preprint of the C.M.A.P. Ecole Polytechnique (1990) et *Fonction convexe d'une mesure*, C. R. Acad. Sci. Paris Sr. I Math. **301** (13), 687-690 (1985)

[138] K. Hamdache, *Initial boundary value problem for the Boltzmann equation: Global existence of weak solutions*, Arch. Rat. Mech. Anal. **119**, 309-353 (1992)

[139] E.M. Hendriks, M.H. Ernst, R.M. Ziff *Coagulation equations with Gelation*, Journal Stat. Phys. **33**, 519-563 (1983)

[140] M.A. Herrero, J.J.L. Velazquez, D. Wrozec, *Sol-gel transition in a coagulation-diffusion model*, Phys. D **141** (3-4,), 221-247 (2000)

[141] R. Illner, H. Neunzert, *On simulation methods for the Boltzmann equation*, Trans. Theory and Stat. Phys. (1987)

[142] R. Illner, M. Shinbrot, *The Boltzmann equation: Global existence for a rare gas in an infinite vacuum*, Comm. Math. Phys. **95**, 217-226 (1984)

[143] I. Jeon, *Existence of gelling solutions for coagulation-fragmentation equations*, Comm. Math. Phys. **194**, 541-567 (1998)

[144] C. Josserand, Y. Pomeau, *Nonlinear aspects of the theory of Bose-Einstein condensates*, Nonlinearity **14**, R25-R62 (2001)

[145] M.I. Kadec, A. Pelzyński, *Bases, lacunary sequence and complemented subspaces in the space L_p*, Sudia Math. **21**, 161-176 (1962)

[146] S. Kaniel, M. Shinbrot, *The Boltzmann equation, I: Uniqueness and local existence*, Comm. Math. Phys. **58**, 65-84 (1978)

[147] O. Kavian, *Remarks on the Kompaneets Equation, a Simplified Model of the Fokker Planck equation*, à paraître dans Séminaire J.L. Lions - Collège de France - série rouge, (Pitman-Longman-Wesley)

[148] A.S. Kompaneets, *The establishment of thermal equilibrium between quanta and electrons*, Soviet Physics JETP (1957)

[149] I. Kuščer, *Phenomological aspects of gas-surface interaction*, Fundamentals problems in statistical mechanics **IV**, E.G.D. Cohen and W. Fiszdon eds, Ossilineum, Warsaw 441-467 (1978)

[150] Ph. Laurençot, *On a class of continuous coagulation-fragmentation models*, J. Differential Equations **167**, 145-174 (2000)

[151] Ph. Laurençot, *Weak solutions to the Lifshitz-Slyozov-Wagner equation*, Indiana Univ. Math. J., à paraître

[152] Ph. Laurençot, *The Lifshitz-Slyozov-Wagner equation with conserved total volume*, prépublication de l'Université de Toulouse (2001)

[153] Ph. Laurençot, D. Wrzosek, *Fragmentation-diffusion model. Existence of solutions and asymptotic behaviour*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **128**, 759-774 (1998)

[154] Ph. Laurençot, D. Wrzosek, *The Becker-Döring model with diffusion. II. Long-time behaviour*, J. Differential Equations **148**, 268-291 (1998)

[155] Ph. Laurençot, D. Wrzosek, *Coagulation model with partial diffusion*, Z. Angew. Math. Phys. **50**, 559-573 (1999)

[156] M.H. Lee, *On the validity of the coagulation equation and the nature of runaway growth*, Icarus **143**, 74-86 (2000)

[157] M. Lemou, *Linearized quantum and relativistic Fokker-Planck-Landau equations*, Math. Methods Appl. Sci. **23** (12), 1093-1119 (2000)

[158] E. Levich, V. Yakhot, *Time evolution of a Bose system passing through the critical point*, Phys. Rev. B **15**, 243-251 (1977)

[159] E. Levich, V. Yakhot, *Time development of coherent and superfluid properties in a course of a $\lambda-$transition*, J. Phys. A: Math. Gen. **11**, 2237-2254 (1978)

[160] F. Leyvraz *Existence and properties of post-gel solutions for the kinetic equations of coagulation*, J. Phys. A: Math. Gen. **16**, 2861-2873 (1983)

[161] F. Leyvraz, H.R. Tschudi, *Singularities in the kinetics of coagulation processes*, J. Phys. A: Math. Gen. **14**, 3389-3405 (1981)

[162] A. Lichnerowicz, R.Marrot, *Propriétés statistiques des ensembles de particules en relativité restreinte*, C. R. Acad. Sci. Paris **210**, 759-761 (1940)

[163] I.M. Lifshitz, V.V. Slyozov, *The kinetics of precipitation from supersaturated solid solutions*, J. Phys. Chem. Solids **19**, 35-50 (1961)

[164] P.-L. Lions, *Compactness in Boltzmann equation via Fourier integral operators and applications Part I*, J. Math. Kyoto Univ. **34** 2, 391-461 (1994)

[165] P.-L. Lions, *Compactness in Boltzmann equation via Fourier integral operators and applications Part II*, J. Math. Kyoto Univ. **34** 2, 391-461 (1994)

[166] P.-L. Lions, *Compactness in Boltzmann equation via Fourier integral operators and applications Part III*, J. Math. Kyoto Univ. **34** 3, 539-584 (1994)

[167] P.-L. Lions, *Régularité optimale des moyennes en vitesses*, Note C.R. Acad. Sci. Paris, Série I **320**, 911-915 (1995)

[168] P.-L. Lions, *Régularité optimale des moyennes en vitesses II*, Note C.R. Acad. Sci. Paris, Série I **326**, 945-948 (1998)

[169] P.-L. Lions, B. Mercier, *Splitting algorithms for the sum of two maximal monotone operators*, S.I.A.M. J. Numer. Anal. **31**, 964-979 (1979)

[170] P.-L. Lions, B. Perthame, *Propagation of moments and regularity for the three dimensional Vlasov-Poisson system*, Invent. Math. **105**, 415-430 (1991)

[171] P.-L. Lions, B. Perthame, *Lemmes de moments, de moyenne and de dispersion*, Note C. R. Acad. Sci. Paris, Série I **314**, 801-806 (1992)

[172] X.G. Lu, *A direct method for the regularity of the gain term in the Boltzmann equation*, J. Math. Anal. Appl. **228** (2), 409-435 (1998)

[173] X.G. Lu, *Spatial decay solutions of the Boltzmann equation: converse properties of long time limiting behavior*, SIAM J. Math. Anal. **30** 5, 1151-1174 (1999)

[174] X.G. Lu, *Conservation of energy, entropy identity and local stability for the spatially homogeneous Boltzmann equation*, J. Statist. Phys. **96** 3-4, 765-796 (1999)

[175] X.G. Lu, *A modified Boltzmann equation for Bose-Einstein particles: isotropic solutions and long time behavior*, J. Statist. Phys. **98** 5-6, 1335-1394 (2000)

[176] X.G. Lu, *On the spatially homogeneous solutions of a modified Boltzmann equation for Fermi-Dirac particles*, J. Statist. Phys. **105** 1-2, 353-388 (2001)

[177] H.P. McKean, *Speed of approach to equilibrium for Kac's caricature of a Maxwellian gas*, Arch. Rat. Mech. Anal. **21**, 347-367 (1966)

[178] E.D. McGrady, R.M. Ziff, *"Shattering" transition in fragmentation*, Phys. Rev. Lett. **58**, 892-895 (1987)

[179] J.B. McLeod, *On the scalar transport equation*, Proc. London Math. Soc. **3** 14, 445-458 (1964)

[180] P. Markowich, C. Ringhofer, C. Schmeiser, *Semiconductor equations*, ed. Springer-Verlag (1990)

[181] Y.L. Martin, F. Rogier, J. Schneider, *Une méthode déterministe pour la résolution de l'équation de Boltzmann inhomogène*, C.R. Acad. Sci. Paris, **314**, 483-487 (1992)

[182] J.-C. Maxwell, *On the dynamical theory of gases*, Phil. Trans. Roy. Soc. London **157**, 49-88 (1867)

[183] J.-C. Maxwell, *On stresses in rarefied gases arising from inequalities of temperature*, Phil. Trans. Roy. Soc. London **170**, Appendix 231-256 (1879)

[184] Z.A. Melzak, *A scalar transport equation*, Trans. Amer. Math. Soc. **85**, 547-560 (1957)

[185] P. Michel, J. Schneider, *Approximation simultanée de réels par des nombres rationnels et noyau de collision de l'équation de Boltzmann*, Note C.R. Acad. Sci. Paris Série I **330**, 857-862 (2000)

[186] H. Müller, *Zur allgemeinen Theorie der raschen Koagulation*, Kolloidchemische Beihefte **27**, 223-250 (1928)

[187] K. Nanbu, *Interrelations between various direct simulations methods for solving the Boltzmann equation*, J. Phys. Soc. Jap. **52**, 3382-3388 (1983)

[188] B. Niethammer, R.L. Pego, *On the initial-value problem in the Lifshitz-Slyozov-Wagner theory of Ostwald ripening*, SIAM J. Math. Anal. **31**, 467-485 (2000)

[189] L.W. Nordheim, *On the Kinetic Mathos in the New Statistics and its Applications in the Electron Theory of Conductivity*, Proc. Roy. Soc. London **A 119**, 689- (1928)

[190] A. Okubo, *Dynamical aspects of animal grouping : swarms, schools, flocks and herds*, Adv. Biophys. **22**, 1-94 (1986)

[191] A. Palczewski, J. Schneider, *Existence, stability, and convergence of solutions of discrete velocity models to the Boltzmann equation*, J. Statist. Phys. **91**, 307-326 (1998)

[192] V.A. Panferov, A.G. Heintz, *A new consistent Discrete-Velocity model for the Boltzmann equation*, prṕrublication de l'Université de Goteborg (1999)

[193] L. Pareschi, B. Perthame, *A Fourier spectral method for homogeneous Boltzmann equations*, in proceeding of the second international workshop on nonlinear kinetic theories and mathematical aspects of hyperbolic systems (Sanremo 1994) **25**, 369-382 (1996)

[194] L. Pareschi, G. Russo, *Numerical solution of the Boltzmann equation. I. Spectrally accurate approximation of the collision operator*, SIAM J. Numer. Anal. **37** 4, 1217-1245 (2000)

[195] L. Pareschi, G. Russo, *On the stability of spectral methods for the Boltzmann equation*, Proceedings of the Fifth International Workshop on Mathematical Aspects of Fluid and Plasma Dynamics (Maui, HI, 1998). Transport Theory Statist. Phys. **29** 3-5, 431-447 (2000)

[196] O. Penrose, *Metastable states for the Becker-Döring cluster equations*, Comm. Math. Phys. **124**, 515-541 (1989)

[197] O. Penrose, *The Becker-Döring equations at large times and their connection with the LSW theory of coarsening*, J. Statist. Phys. **89**, 305-320 (1997)

[198] O. Penrose, J.L. Lebowitz, J. Marro, M.H. Kalos, A. Sur, *Growth of clusters in a first-order phase transition*, J. Statist. Phys. **19**, 243-267 (1978)

[199] A.S. Perelson, R.W. Samsel, *Kinetics of red blood cell aggregation : an example of geometric polymerization*, in "Kinetics of Aggregation and Gelation," F. Family and D.P. Landau (eds.), Elsevier (1984)

[200] B. Perthame, *Global existence of the B.G.K. model of Boltzmann equation*, J. Diff. Eq. **82** 1, 191-205 (1989)

[201] B. Perthame, *Time decay, propagation of low moments and dispersive effects for kinetic equations*, Comm. in P.D.E. **21** (1-2), 659-686 (1996)

[202] B. Perthame, *An introduction to the collision models in Boltzmann's theory*, in modeling of Collisions, P. Raviart, Ed. vol 2 of Series in Applied Mathematics Gauthiers-Villars (1998)

[203] B. Perthame, P.E. Souganidis, *A limiting case for Velocity Averaging*, Ann. Sci. cole Norm. Sup. (4) **31** 4, 591-598 (1998)

[204] R. Petterson, *On solutions to the linear Boltzmann equation with general boundary conditions and infinite-range forces*, J. Stat. Phys. **59**, 403-440 (1990)

[205] Y. Pomeau, M.-E. Brachet, S. Métens, S. Rica, *Théorie cinétique d'un gas de Bose dilué avec condensat*, C. R. Acad. Sci. Paris **327** série II b, 791-798 (1999)

[206] F. Poupaud, *Boundary value problems for the stationary Vlasov-Poisson system*, Note C. R. Acad. Sci. Paris Série I **311**, 307-312 (1990)

[207] F. Poupau, *Boundary value problems for the stationary Vlasov-Maxwell system*, Forum Math. **4**, 499-527 (1992)

[208] A.J. Povzner, *The Boltzmann equation in the kinetic theory of gases*, Amer. Math. Soc. Trans. **47**, 193-214 (1965)

[209] M. Pulvirenti, W. Wagner, M.B. Zavelani Rossi, *Convergence of particle scheme for Boltzmann equation*, J. Stat. Phys. (1992)

[210] F. Rogier, J. Schneider, *A direct method for solving the Boltzmann equation*, Transp. Theory Stat. Phys. (1994)

[211] V.S. Safronov, *Evolution of the Protoplanetary Cloud and Formation of the Earth and the Planets*, Israel Program for Scientific Translations Ltd., Jerusalem (1972)

[212] D. V. Semikov, I.I. Tkachev, *Kinetics of Bose Condensation*, Phys. Rev. Lett. **74**, 3093-3097 (1995)

[213] D. V. Semikov, I.I. Tkachev, *Condensation of bosons in the kinetic regime*, Phys. Rev. D **55**, 489-502 (1997)

[214] S. Simons, D.R. Simpson, *The effect of particle coagulation on the diffusive relaxation of a spatially inhomogeneous aerosol*, J. Phys. A **21**, 3523-3536 (1988)

[215] M. Slemrod, *Trend to equilibrium in the Becker-Döring cluster equations*, Nonlinearity **2**, 429-443 (1989)

[216] M. Smoluchowski, *Drei Vorträge über Diffusion, Brownsche Molekularbewegung und Koagulation von Kolloidteilchen*, Physik. Zeitschr. **17**, 557-599 (1916)

[217] M. Smoluchowski, *Versuch einer mathematischen Theorie der Koagulationskinetik kolloider Lösungen*, Zeitschrift f. physik. Chemie **92**, 129-168 (1917)

[218] H. Spohn, *Large scale dynamics of interacting particles*, Texts and Monographs in Physics, Sptinger-Verlag, Berlin (1991)

[219] J. Spouge, *An existence theorem for the discrete coagulation-fragmentation equations*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **96**, 351-357 (1984)

[220] I.W. Stewart, *A global existence theorem for the general coagulation-fragmentation equation with unbounded kernels*, Math. Methods Appl. Sci. **11**, 627-648 (1989)

[221] I.W. Stewart, *Density conservation for a coagulation equation*, Z. Angew. Math. Phys. **42**, 746-756 (1991)

[222] I.W. Stewart, P.B. Dubovskiĭ, *Approach to equilibrium for the coagulation-fragmentation equation via a Lyapunov functional*, Math. Methods Appl. Sci. **19**, 171-185 (1996)

[223] A. Sznitmann, *Equations de type Boltzmann spatialement homogènes*, Z. Wahrsch. Verw. Geb. **66**, 559-562 (1984)

[224] R. Temam, *Problèmes Mathématiques en Plasticité*, Gauthier-Villars, Paris (1983)

[225] G. Toscani, *H-theorem and asymptotic trend of the solution for a rarefied gas in vacuum*, Arch. Rat. Mech. Anal. **100**, 1-12 (1987)

[226] G. Toscani, *New a priori estimates for the spatially homogeneous Boltzmann equation* Cont. Mech. Thermodyn. **4**, 81-93 (1992)

[227] G. Toscani, C. Villani, *Sharp entropy dissipation bounds and explicit rate of trend to equilibrium for spatially homogeneous Boltzmann equation*, Comm. Math. Phys. **203** (3), 667-706 (1999)

[228] G. Toscani, C. Villani, *On the trend to equilibrium for some dissipative systems with slowly increasing a priori bounds*, J. Statist. Phys. **98** 5-6, 1279-1309 (2000)

[229] C. Truesdell, R. Muncaster, *Fundamentals of Maxwell's kinetic theory of a simple monoatomic gas*, Acad. Press., New York (1980).

[230] E.A. Uehling, G. E. Uhlenbeck, *Transport Phenomena in Einstein-Bose and Fermi-Dirac Gases*, Physical Review **43**, 552-561 (1933)

[231] S. Ukaï, *Solutions of the Boltzmann equations*, Paterns and Waves-Qualitative Analysis of Nonlinear Differential Equations, Stud. Math. Appl. **18**, North-Holland, 37-96 (1986)

[232] A. Vasseur, *Convergence of a semi-discrete kinetic scheme for the system of isentropic gas dynamics with* $\gamma = 3$, Indiana Univ. Math. J. **48**, 347-364 (1999)

[233] A. Vasseur, *Time regularity for the system of isentropic gas dynamics with $\gamma = 3$*, Comm. Partial Differential Equations, **24**, 1987-1997 (1999)

[234] C. Villani, *Square-root-renormalized solution of the Boltzmann equation*, Contribution à l'étude mathématique des équations de Boltzmann et de Landau en théorie cinétique des gaz et des plasmas, *Ph.D. Thesis of University Paris Dauphine* (1998)

[235] C. Villani, *On a new class of weak solutions to the spatially homogeneous Boltzmann and Landau equations*, Arch. for Ration. Mech. and Anal. **143** (3), 273-307 (1998)

[236] C. Villani, *Fisher information estimates for Boltzmann's collision operator*, J. Math. Pures Appl. **77** (9), 821-837 (1998)

[237] C. Villani, *On the trend to equilibrium for solutions of the Boltzmann equation: quantitative versions of Boltzmann's H-theorem*, a review paper, soumis

[238] C. Villani, *A review of mathematical topics on collisional kinetic theory*, Handbook of Fluid Mechanics, S. Friedlander & D. Serre Eds, à paraitre

[239] C. Villani, *Limites hydrodynamiques de l'équation de Boltzmann*, Seminaire N. Bourbaki **893** (2001)

[240] J. Voigt, *Fonctional analytic treatment of the initial boundary value problem for collisionless gases*, Habilitationsschrift of the Univ. München (1980)

[241] C. Wagner, *Theorie der Alterung von Niederschlägen durch Umlösen (Ostwald-Reifung)*, Z. Elektrochem. **65**, 581-591 (1961)

[242] W. Wagner, *A convergence proof for Bird's direct simulation Monte Carlo method for Boltzmann equation*, J. Stat. Phys. (1992)

[243] J. Weckler, *Vlasov-Poisson initial boundary value problem*, Arch. Rat. Mech. Anal. **130**, 145-161 (1995)

[244] B. Wennberg, *On an entropy dissipation inequality for the Boltzmann equation*, C. R. Acad. Sc., Série I, **315**, 1441-1446 (1992)

[245] B. Wennberg, *Stability and exponential convergence in L^p for the spatially homogeneous Boltzmann equation*, Nonlinear Anal. **20** 8, 935-964 (1993)

[246] B. Wennberg, *Regularity in the Boltzmann equation and the Radon transform*, Comm. Partial Differential Equations **19** (11-12), 2057-2074 (1994)

[247] B. Wennberg, *On moments and uniqueness for solutions to the space homogeneous Boltzmann equation*, Transport Theory Stat. Phys. **24** (4), 533-539 (1994)

[248] B. Wennberg, *Stability and exponential convergence for the Boltzmann equation*, Arch. Rational Mech. Anal. **130** (2), 103-144 (1995)

[249] B. Wennberg, *The Povzner inequality and moments in the Boltzmann equation* Proceedings of the VIII International Conference on Waves and Stability in Continuous Media, Part II (Palermo, 1995). Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl. No. 45, part II, 673-681 (1996)

[250] B. Wennberg, *Entropy dissipation and moment production for the Boltzmann equation* J. Statist. Phys. **86** (5-6), 1053-1066 (1997)

[251] B. Wennberg, *An example of nonuniqueness for solutions to the homogeneous Boltzmann equation*, J. Statist. Phys. **95** (1-2), 469-477 (1999)

[252] W.H. White, *A global existence theorem for Smoluchovski's coagulation equations*, Proc. Am. Math. Soc., **80** (1980)

[253] D. Wrzosek, *Existence of solutions for the discrete coagulation-fragmentation model with diffusion*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **9**, 279-296 (1997)

[254] D. Wrzosek, *Mass-conserving solutions to the discrete coagulation-fragmentation model with diffusion*, Nonlinear Anal., to appear.

[255] V.E. Zakharov, *Weak-turbulence spectrum in a plasma without a magnetic field*, Sov. Phys.-JETP **24**, 455- (1967)

[256] Ya. B. Zel'dovich, E. V. Levich, *Bose Condensation and Shock Waves in Photon Spectra*, Sov. Phys. JETP **28**, 1287-1290 (1969)

[257] Ya. B. Zel'dovich, E. V. Levich, R. A. Syunyaev:*Stimulated Compton Interaction Between Maxwellian Electrons and Spectrally Narrow Radiation*, Sov. Phys. JETP **35**, 733-740 (1972)

[258] R.M. Ziff, E.D. McGrady, *The kinetics of cluster fragmentation and depolymerisation*, J. Phys. A **18**, 3027-3037 (1985)

PUBLICATIONS DE L'AUTEUR

[259] S. Mischler, *Uniqueness for the B.G.K.-equation in* $\mathbf{R}^N$ *and rate of convergence for a semi-discrete scheme,* Differential and Integral Equations, volume 9, No. 5, p. 1119-1138, 1996.

[**260**] L. Desvillettes et S. Mischler, *About the splitting algorithm for Boltzmann and B.G.K. equations*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, volume 6, No. 8, p. 1079-1101, 1996.

[**261**] S. Mischler, *Convergence of discrete velocities schemes for the Boltzmann equation,* Archive for Rational Mechanics and Analysis, volume 140, p. 53-77, 1997.

[262] S. Mischler et B. Perthame, *Boltzmann equation with infinite energy: Renormalized solutions and distributional solutions for small initial data and initial data close to a Maxwellian*, SIAM Journal of Mathematical Analysis, volume 28, No 5, p. 1015-1027, 1997.

[**263**] S. Mischler et B. Wennberg, *On the Homogeneous Spatially Boltzmann equation*, Annales de l'Institut Henri Poincaré, volume 16, No 4, p. 467-501, 1999.

Récompensé par le prix Institut Henri Poincaré / Gauthier-Villars

[**264**] M. Escobedo et S. Mischler, *Équation de Boltzmann Quantique pour un gaz de photons*, Note au C.R. Acad. Sc. Paris 329, série I, p. 593-598, 1999.

[**265**] S. Mischler, *On the trace problem for solutions of the Vlasov equation*, Comm. Partial Differential Equations, volume 25, No 7-8, p. 1415-1443, 2000.

[**266**] S. Mischler, *On the initial boundary value problem for the Vlasov-Poisson-Boltzmann system*, Comm. Math. Phys. volume 210, No 2, p. 447-466, 2000.

[**267**] M. Escobedo et S. Mischler, *On a Quantum Boltzmann equation for a gas of photons*, J. Math. Pures Appl. volume 80, No 5, p. 471-515, 2001.

[**268**] S. Mischler, *Kinetic equations with Maxwell boundary condition*, prépublication du Laboratoire de Mathématiques Appliquées, Université de Versailles Saint-Quentin, No. 35 sous le titre *On weak-weak convergences and some applications to the initial boundary value problem for kinetic equations.*

[**269**] Ph. Laurençot, S. Mischler, *Global existence for the discrete diffuse coagulation-fragmentation equations in* L^1, prépublication n.1 du DMA ENS Paris, 2001, accépté pour publication dans Rev. Mat. Iberoamericana.

[**270**] Ph. Laurençot, S. Mischler, *The continuous coagulation-fragmentation equations with diffusion*, prépu- blication n.6 du DMA ENS Paris, 2001.

[**271**] M. Escobedo, S. Mischler, J.J.L. Velazquez, *Asymptotic description of Dirac mass formation in kinetic equations for quantum particles*, prépublication n.20 du DMA ENS Paris, 2001.

[**272**] Ph. Laurençot, S. Mischler, *From the discrete to the continuous coagulation-fragmentation equations*, prépublication n.18 du DMA ENS Paris, 2001.

[**273**] M. Escobedo, S. Mischler, B. Perthame, *Gelation in coagulation and fragmentation models*, prépu- blication n.19 du DMA ENS Paris, 2001.

[**274**] Ph. Laurençot, S. Mischler, *The Lifshitz-Slyozov-Wagner asymptotic of the Becker-Döring equation*, prépublication n.16 du DMA ENS Paris, 2001, accépté pour publication dans J. Stat. Phys.

[275] M. Escobedo, S. Mischler, M. Del Valle, *Homogeneous Boltzmann equation for Quantum and Relativistic particles.*

[276] T. Horsin, S. Mischler, A. Vasseur, *On the convergence of numerical schemes for the Boltzmann equation.*

[277] A. Mellet, S. Mischler, *Uniqueness and semigroup for the Vlasov equation with elastic-diffusive reflexion boundary conditions*, prépublication n. 73 du Laboratoire de Mathématiques Appliquées, Université de Versailles Saint-Quentin.

[278] M. Escobedo, Ph. Laurençot, S. Mischler, B. Perthame, *Coagulation-fragmentation models with strong and medium fragmentation*, travail en préparation

Les articles dont le numero de référence apparaît en gras constituent ce mémoire d'Habilitation à Diriger les Recherches.