

Processus discrets

Bénédicte Haas, Stefano Olla

Table des matières

1	Espérance Conditionnelle	1
1.1	Espérance Conditionnelle	1
1.1.1	Sous-tribus	2
1.1.2	Espérance conditionnelle	2
1.1.3	Espérance conditionnelle comme projection sur L^2	4
2	Chaînes de Markov	5
2.1	Définitions et premières propriétés	5
2.1.1	Equation de Chapman-Kolmogorov	6
2.1.2	Probabilités stationnaires	7
2.1.3	Probabilités réversibles	9
2.1.4	Systèmes dynamiques aléatoires	10
2.2	Chaînes irréductibles	10
2.2.1	Irréductibilité	10
2.2.2	Chaînes irréductibles récurrentes	12
2.2.3	Excursions	13
2.2.4	Le théorème ergodique	15
2.3	Convergence vers l'équilibre	16
2.3.1	Chaînes fortement irréductibles	19
2.3.2	Aperiodicité	19
3	Martingales	21

1^{er} novembre 2008

Chapitre 1

Espérance Conditionnelle

1.1 Espérance Conditionnelle

Lorsqu'on travaille avec des variables aléatoires discrètes on introduit la notion de probabilité conditionnelle par la formule :

$$\mathbb{P}(Y = y|X = x) = \frac{\mathbb{P}(Y = y, X = x)}{\mathbb{P}(X = x)}, \text{ si } \mathbb{P}(X = x) \neq 0, \quad (1.1.1)$$

d'où la définition d'espérance conditionnelle de $f(Y)$ sachant que $X = x$ par

$$\sum_y f(y)\mathbb{P}(Y = y|X = x) = u_f(x),$$

pour toute fonction f à valeurs réelles ou complexes mesurable bornée. Souvent on utilise la notation

$$u_f(x) = \mathbb{E}(f(Y)|X = x)$$

et on peut regarder cette expression comme une variable aléatoire $\mathbb{E}(f(Y)|X)$, fonction de la variable aléatoire X , au sens où $\mathbb{E}(f(Y)|X) = u_f(X)$. On peut remarquer que pour toute fonction mesurable bornée h , $u_f(x)$ a la propriété suivante :

$$\sum_{x:u_f(x) \neq 0} h(x)u_f(x)\mathbb{P}(X = x) = \sum_{x,y} h(x)f(y)\mathbb{P}(Y = y, X = x), \quad (1.1.2)$$

ce qui revient, en utilisant les notations introduites, à

$$\mathbb{E}(h(X)\mathbb{E}(f(Y)|X)) = \mathbb{E}(h(X)u_f(X)) = \mathbb{E}(h(X)f(Y)). \quad (1.1.3)$$

On pourra utiliser (1.1.3) pour définir directement l'espérance conditionnelle : $\mathbb{E}(f(Y)|X)$ est la seule variable aléatoire fonction de X telle que (1.1.3) soit satisfaite pour tout h . Dans la formule de Bayes (1.1.1) il faut toujours assumer que $\mathbb{P}(X = x) > 0$. Avec la formule (1.1.3) on évite ce problème. Mais surtout, cette définition permet de généraliser cette notion de conditionnement.

1.1.1 Sous-tribus

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^d . La tribu engendrée par X est la sous-tribu $\mathcal{F}(X)$ de \mathcal{F} définie par

$$\mathcal{F}(X) = \{A \in \mathcal{F} : \exists B \subset \mathbb{R}^d \text{ borélien, } A = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}\}$$

De façon équivalente, on peut dire que $\mathcal{F}(X)$ est la plus petite sous-tribu \mathcal{B} telle que X soit \mathcal{B} -mesurable.

Exemple 1.1.1 Soit $X = 1$ avec probabilité p et $X = 0$ avec probabilité $1 - p$. Alors

$$\mathcal{F}(X) = \{X^{-1}(0), X^{-1}(1), \Omega, \emptyset\}.$$

Les sous-tribus $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ que nous allons considérer vont correspondre à des informations partielles sur le modèle. Par exemple $\mathcal{F}(X)$ correspond à l'information que nous avons si nous connaissons la valeur de X . La tribu triviale $\{\Omega, \emptyset\}$ correspond à une information nulle, et la tribu \mathcal{F} est une information complète.

Exemple 1.1.2 Soit $\Omega = [0, 1]$, et $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0, 1])$, la tribu borélienne sur $[0, 1]$ (i.e. la tribu engendrée par les sous-ensembles ouverts de $[0, 1]$). Soit $\mathcal{F}_2 = \{[0, 1/2],]1/2, 1], [0, 1], \emptyset\}$. Alors la tribu $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}$, et permet de savoir si le point se trouve à gauche ou à droite de $1/2$. En particulier, si $X(\omega) = 1_{[0, 1/2]}(\omega)$, $\omega \in \Omega$, alors $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}(X)$.

1.1.2 Espérance conditionnelle

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, et soit $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ une sous-tribu de \mathcal{F} . Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire telle que $\mathbb{E}(|X|) < +\infty$ (i.e. $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$).

Définition 1.1.3 L'espérance conditionnelle de X sachant \mathcal{B} est une variable aléatoire Z telle que

- a) $Z \hat{\in} \mathcal{B}$ (Z est \mathcal{B} -mesurable).
- b) $\forall A \in \mathcal{B}, \mathbb{E}(1_A X) = \mathbb{E}(1_A Z)$.

L'assertion b) est en fait équivalente à

b') pour toute variable aléatoire réelle bornée $Y \hat{\in} \mathcal{B}$, on a $\mathbb{E}(YX) = \mathbb{E}(YZ)$.

L'existence d'une variable aléatoire Z qui a ces propriétés n'est pas triviale. La démonstration repose sur le théorème de Radon-Nykodym. Par ailleurs, cette variable aléatoire est unique à l'égalité presque-sûre près (voir la preuve du 2. de la proposition suivante).

On utilisera les notations $Z = \mathbb{E}(X|\mathcal{B})$, ainsi que $\mathbb{E}(X|Y) = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}(Y))$.

Proposition 1.1.4 1. $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) \in L^1(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$.

2. Si $X \hat{\in} \mathcal{B}$, alors $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) = X$ p.s.

Preuve.

1. Soit $Y = \text{signe } \mathbb{E}(X|\mathcal{B}) \hat{\in} \mathcal{B}$. Donc $Y\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) = |\mathbb{E}(X|\mathcal{B})|$, et d'après b') on a

$$\mathbb{E}(|\mathbb{E}(X|\mathcal{B})|) = \mathbb{E}(Y\mathbb{E}(X|\mathcal{B})) = \mathbb{E}(YX) \leq \mathbb{E}(|X|) < +\infty.$$

2. L'espace dual de $L^1(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ est $L^\infty(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$. La propriété b') nous dit que pour toute $Y \in L^\infty(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ on a

$$\mathbb{E}(YX) = \mathbb{E}(Y\mathbb{E}(X|\mathcal{B})). \quad (1.1.4)$$

Mais $X \in L^1(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$, donc (1.1.4) implique que $X = \mathbb{E}(X|\mathcal{B})$ p.s., puisque les 2 variables aléatoires X et $\mathbb{E}(X|\mathcal{B})$ appartiennent à $L^1(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$.

□

Remarquons qu'en général $L^1(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ est un sous-espace propre de $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Définition 1.1.5 On dit que X est une variable aléatoire indépendante de la tribu \mathcal{B} si $\forall I \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\forall A \in \mathcal{B}$

$$\mathbb{P}(\{X \in I\} \cap A) = \mathbb{P}(X \in I) \mathbb{P}(A).$$

Proposition 1.1.6 Soit X indépendante de la sous-tribu \mathcal{B} , alors $\mathbb{E}(X|\mathcal{B})$ est constante presque sûrement et

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) = \mathbb{E}(X) \quad \text{p.s.}$$

Preuve. $\mathbb{E}(X)$ est une constante, donc $\mathbb{E}(X) \hat{\in} \mathcal{B}$. Pour tout $A \in \mathcal{B}$

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{B})1_A) = \mathbb{E}(X1_A) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(1_A) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X)1_A). \quad \square$$

Exemple 1.1.7 Soit $\{A_1, A_2, \dots\}$ une partition (finie ou infinie) de Ω . Soit $\mathcal{B} = \sigma(A_1, \dots)$ la tribu engendrée par cette partition. Alors

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{B})(\omega) = \sum_{j: \mathbb{P}(A_j) \neq 0} \frac{\mathbb{E}(X1_{A_j})}{\mathbb{P}(A_j)} 1_{A_j}(\omega). \quad (1.1.5)$$

Preuve. Exercice.

Cas particulier : pour la tribu triviale $\mathcal{B} = \{\emptyset, \Omega\}$, on a $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) = \mathbb{E}(X)$.

Proposition 1.1.8 Propriétés de l'espérance conditionnelle :

1. Linéarité
2. Monotonie + inégalité de Chebishef
3. convergence monotone
4. inégalité de Jensen
5. contractivité dans L^p .

Exercice. Soient $X_i, 1 \leq i \leq n$ des v.a. i.i.d et $T = \sum_{i=1}^n X_i$. Montrer que $\mathbb{E}[T_1|T] = T/n$ et $\mathbb{E}[T|T_1] = (n-1)\mathbb{E}[T_1] + T_1$.

1.1.3 Espérance conditionnelle comme projection sur L^2

Si \mathcal{B} est une sous-tribu de \mathcal{F} , alors $L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ (que l'on dénote plus brièvement $L^2(\mathcal{B})$), est un sous-espace vectoriel fermé de $L^2(\mathcal{F})$.

Proposition 1.1.9 *L'application de $L^2(\mathcal{F})$ dans $L^2(\mathcal{B})$ définie par $X \rightarrow \mathbb{E}(X|\mathcal{B})$ est la projection orthogonale sur $L^2(\mathcal{B})$.*

Preuve.

Soit $X \in L^2(\mathcal{F})$. Il est suffisant de montrer que $X - \mathbb{E}(X|\mathcal{B}) \in L^2(\mathcal{B})^\perp$.

Soit $Y \in L^2(\mathcal{B})$,

$$\mathbb{E}(Y(X - \mathbb{E}(X|\mathcal{B}))) = \mathbb{E}(YX) - \mathbb{E}(Y\mathbb{E}(X|\mathcal{B})) = 0. \quad \square$$

Corollaire 1.1.10

$$\inf_{Y \in L^2(\mathcal{B})} \mathbb{E}([X - Y]^2) = \mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X|\mathcal{B})]^2) \quad (1.1.6)$$

Chapitre 2

Chaînes de Markov

2.1 Définitions et premières propriétés

Soit M un ensemble dénombrable. Une *matrice de transition* sur M est une application

$$P : M \times M \longrightarrow [0, 1] \quad (2.1.1)$$

telle que pour tout $x \in M$

$$\sum_{y \in M} P(x, y) = 1. \quad (2.1.2)$$

Définition 2.1.1 Une chaîne de Markov de matrice de transition P est une suite de variables aléatoires $\{X_n\}_{n \geq 0}$ définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans M , telle que, $\forall n \geq 0$ et $\forall x_0, \dots, x_{n+1} \in M$,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = P(x_n, x_{n+1}). \quad (2.1.3)$$

Autrement dit, la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant X_0, \dots, X_n ne dépend que de X_n et est donnée par $P(X_n, \cdot)$.

On appelle M l'espace d'états de la chaîne X .

Exemples : 1. Marche aléatoire sur \mathbb{Z} . Un joueur lance successivement et de manière indépendante une pièce de monnaie, éventuellement biaisée. Chaque fois qu'il obtient un Pile il reçoit un euro, chaque fois qu'il obtient un Face, il perd un euro. Soit $k_0 \in \mathbb{Z}$ sa fortune initiale. On note S_n sa fortune à l'étape n . Nous avons $S_0 = k_0$ et $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$, où X_{n+1} est une variable aléatoire représentant le gain (positif ou négatif) à l'étape $n+1$: $X_{n+1} = 1$ avec probabilité $p \in]0, 1[$, et -1 sinon. Les variables aléatoires X_1, \dots, X_k, \dots sont i.i.d. par hypothèse. La suite $(S_n)_{n \geq 0}$ est donc une chaîne de Markov de matrice de transition

$$P : (k, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mapsto \begin{cases} p & \text{si } m = k + 1 \\ 1 - p & \text{si } m = k - 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Modèle de Wright-Fischer. Ce modèle décrit l'évolution d'un ensemble de N chromosomes. On suppose qu'il y a 2 types de chromosomes, A et B, et on note X_n le nombre de chromosomes de type A présents à la génération n (il y en a donc $N - X_n$ de type B). Le modèle évolue de la façon suivante : chaque chromosome de la génération $n + 1$ choisit au hasard et uniformément un chromosome parent dans la génération n , ceci indépendamment des autres chromosomes. Le chromosome fils a alors le même type que son chromosome parent. Si $X_n = i$, chaque chromosome de la génération $n + 1$ sera donc de type A avec probabilité i/N . On en déduit que la suite $X_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov à valeurs dans $\{0, 1, \dots, N\}$, de probabilité de transition

$$P(i, j) = C_N^j \left(\frac{i}{N} \right)^j \left(\frac{N-i}{N} \right)^{N-j}, \forall i, j \in \{0, 1, \dots, N\}.$$

Remarque. Etant données une matrice de transition P et une loi de probabilité μ , on peut toujours construire une chaîne de Markov de matrice de transition P issue d'une variable aléatoire initiale X_0 distribuée suivant μ .

Notations. \mathbb{P}_x : probabilité conditionnelle sachant que $X_0 = x$ (i.e. $\mathbb{P}_x(A) = \mathbb{P}(A | X_0 = x)$) pour tout événement A, puisque la v.a. X_0 est discrète) ; \mathbb{E}_x : espérance correspondante.

2.1.1 Equation de Chapman-Kolmogorov

Pour toute fonction bornée $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ on pose

$$Pf(x) = \sum_{y \in M} P(x, y)f(y) = \mathbb{E}(f(X_{n+1}) | X_n = x). \quad (2.1.4)$$

Soit $\mathcal{P}(M) = \{\mu : M \rightarrow [0, 1], \sum_{x \in M} \mu(x) = 1\}$, l'ensemble des mesures de probabilité sur M . Pour toute $\mu \in \mathcal{P}(M)$ on pose

$$\mu P(x) = \sum_{y \in M} \mu(y)P(y, x). \quad (2.1.5)$$

On remarque que $\mu P \in \mathcal{P}(M)$.

On définit aussi P^2, P^n , etc, par récurrence en utilisant la règle usuelle de multiplication des matrices :

$$P^{n+1}(x, y) = \sum_{z \in M} P(x, z)P^n(z, y). \quad (2.1.6)$$

Théorème 2.1.2 Soit $\{X_n\}_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov de matrice de transition P . On note $\mu_0 \in \mathcal{P}(M)$ la loi de X_0 . Alors

1. La loi de (X_0, \dots, X_n) est donnée par

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = \mu_0(x_0)P(x_0, x_1) \dots P(x_{n-1}, x_n), \quad (2.1.7)$$

\forall les états $x_0, \dots, x_n \in M$, et $\forall n \in \mathbb{N}$. Réciproquement, tout processus $(X_n)_{n \geq 0}$ vérifiant l'équation (2.1.7) est une chaîne de Markov de matrice de transition P et de loi initiale μ_0 .

2. La loi de X_n est $\mu_n = \mu_0 P^n$. Elle est donc entièrement caractérisée par μ_0 et P .

3. Pour toute fonction bornée $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, tout $x \in M$,

$$\mathbb{E}(f(X_n) | X_0 = x) = P^n f(x).$$

Preuve. Exercice.

Remarque. La suite $(Y_n)_{n \geq 0}$ définie par $Y_n = X_{k+n}$, k étant fixé, est aussi une chaîne de Markov de matrice de transition P .

Théorème 2.1.3 Propriété de Markov simple. Soient $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov et $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}(X_1, \dots, X_n)$ la tribu engendrée par X_1, \dots, X_n (i.e. la tribu représentant "le passé jusqu'à l'instant n "). Alors la propriété de Markov peut s'écrire

$$\mathbb{E}(f(X_{n+1}) | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(f(X_{n+1}) | X_n) = P f(X_n), \quad (2.1.8)$$

pour toute fonction test f .

2.1.2 Probabilités stationnaires

Définition 2.1.4 Une probabilité $\pi \in \mathcal{P}(M)$ est dite stationnaire (ou invariante) pour la matrice de transition P , si $\pi = \pi P$, i.e.

$$\pi(x) = \sum_{y \in M} \pi(y)P(y, x), \quad \forall x \in M. \quad (2.1.9)$$

Par récurrence, on a $\pi = \pi P^n$ pour tout $n \geq 1$. Par conséquent, si l'état initial de la chaîne X_0 a pour loi π , alors X_n a même loi π que X_0 , $\forall n \geq 1$.

Exemple. Soient $a, b \in [0, 1]$ et

$$P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

alors

$$\pi = \left(\frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b} \right).$$

Remarques. 1. Il peut y avoir plusieurs probabilités stationnaires. Par exemple, la matrice de transition

$$\begin{pmatrix} 1-a & a & 0 & 0 \\ b & 1-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a' & a' \\ 0 & 0 & b' & 1-b' \end{pmatrix},$$

avec $a, b, a', b' \in [0, 1]$, admet comme probabilités stationnaires tout quadruplet de la forme

$$\left(\frac{ab}{a+b}, \frac{\alpha a}{a+b}, \frac{(1-\alpha)b'}{a'+b'}, \frac{(1-\alpha)a'}{a'+b'} \right), \alpha \in [0, 1].$$

2. Lorsque M est infini, il se peut aussi qu'il n'y ait pas de probabilité stationnaire. Par exemple, dans le cas de la marche aléatoire sur \mathbb{Z} , l'équation (2.1.9) devient, pour tout $x \in \mathbb{Z}$,

$$\pi(x) = \pi(x-1)p + \pi(x+1)(1-p)$$

et on vérifie facilement (exercice) qu'il n'y a pas de probabilité satisfaisant cette équation. Par contre il existe des *mesures* (c'est à dire des mesure positives non-finie) satisfaisant cette équation, par exemple la mesure de comptage $\pi(x) = 1, \forall x \in \mathbb{Z}$.

Proposition 2.1.5 *Si M est fini, alors l'ensemble $\mathcal{I}(P)$ des probabilités stationnaires pour une matrice de transition P est un sous-ensemble non-vide, compact et convexe de $\mathcal{P}(M)$.*

Preuve. $\mathcal{P}(M)$ est un sous-ensemble convexe, fermé et borné de \mathbb{R}^m , où m est le cardinal (fini) de M (exercice). En particulier $\mathcal{P}(M)$ est compact.

Soit $\mu \in \mathcal{P}(M)$ une probabilité quelconque. On considère la combinaison convexe

$$\hat{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu P^k.$$

Alors

$$\hat{\mu}_n P - \hat{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\mu P^{k+1} - \mu P^k) = \frac{1}{n} (\mu P^n - \mu) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Puisque $\mathcal{P}(M)$ est compact, il existe une sous-suite $\hat{\mu}_{n_k}$ de $\hat{\mu}_n$ convergente. Soit π sa limite. Alors

$$\pi P = \lim_k \hat{\mu}_{n_k} P = \lim_k \hat{\mu}_{n_k} = \pi,$$

donc π est stationnaire.

La compacité et la convexité de $\mathcal{I}(P)$ sont laissées en exercice. \square .

D'une manière générale, étant donnée une matrice de transition P , une mesure μ satisfaisant $\mu = \mu P$ est dite *invariante* pour P .

2.1.3 Probabilités réversibles

Définition 2.1.6 Une probabilité $\pi \in \mathcal{P}(M)$ est dite réversible par rapport à P si pour tous $x, y \in M$

$$\pi(x)P(x, y) = \pi(y)P(y, x). \quad (2.1.10)$$

Proposition 2.1.7 Si π est réversible, alors elle est stationnaire.

Preuve : exercice.

Exemple. Si P est symétrique, i.e. si $P(x, y) = P(y, x)$ pour tout couple $(x, y) \in M \times M$, et si M est fini de cardinal $|M|$, alors la probabilité uniforme $\left(\frac{1}{|M|}, \dots, \frac{1}{|M|}\right)$ est réversible.

Exercice : l'urne d'Ehrenfest. N molécules de gaz sont réparties dans un récipient divisé en deux enceintes séparées par une paroi poreuse. A chaque étape une particule choisie uniformément au hasard change d'enceinte. On note X_n le nombre de particules dans la première enceinte à l'étape n . Montrer que $(X_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov à valeurs dans $\{1, \dots, N\}$ de matrice de transition

$$P(i, j) = \begin{cases} \frac{N-i}{N} & \text{si } j = i + 1 \text{ et } 0 \leq i \leq N - 1 \\ \frac{i}{N} & \text{si } j = i - 1 \text{ et } 1 \leq i \leq N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et que π est une probabilité réversible ssi $\pi(i) = 2^{-N} C_N^i$.

Proposition 2.1.8 Soit π une probabilité réversible pour P et X_0 une variable aléatoire de loi π . On fixe $n \in \mathbb{N}$. Alors la suite $\{X_j^* = X_{n-j}\}_{0 \leq j \leq n}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition P , et X_0^* a pour loi π .

C'est-à-dire qu'à l'équilibre, la loi de la suite X_0, \dots, X_n est invariante par retournement de temps.

Preuve. Exercice. \square

Une mesure μ sur M est dite réversible par rapport à P si

$$\mu(x)P(x, y) = \mu(y)P(y, x). \quad (2.1.11)$$

Proposition 2.1.9 Condition de cycle de Kolmogorov : Soit P une matrice de transition sur M . Les assertions suivantes sont équivalentes :

a) Pour toute suite x_0, x_1, \dots, x_n dans M avec $x_n = x_0$ et telle que $\prod_{1 \leq i \leq n} P(x_i, x_{i-1}) > 0$, on a

$$\prod_{i=1}^n \frac{P(x_{i-1}, x_i)}{P(x_i, x_{i-1})} = 1.$$

b) Il existe une mesure μ réversible par rapport à P .

Preuve. On voit immédiatement que b) implique a) (exercice). En fait soient x_0, \dots, x_{n-1} dans le support de μ mesure réversible ($\mu(x_j) > 0$). Alors $P(x_{i-1}, x_i) > 0$ implique $P(x_i, x_{i-1}) > 0$. Donc pour la réversibilité

$$\prod_{i=1}^n \frac{P(x_{i-1}, x_i)}{P(x_i, x_{i-1})} = \prod_{i=1}^n \frac{\mu(x_{i-1})P(x_{i-1}, x_i)}{\mu(x_i)P(x_i, x_{i-1})} = 1.$$

Supposons maintenant que a) est vérifiée. Soit x_0 un point quelconque de M et soit $x \in M$ tel qu'il existe un chemin $x_0, x_1, \dots, x_n = x$ tel que $\prod_{1 \leq i \leq n} P(x_i, x_{i-1}) > 0$. On pose alors $\mu(x_0) = 1$,

$$\mu(x) = \prod_{i=1}^n \frac{P(x_{i-1}, x_i)}{P(x_i, x_{i-1})},$$

et $\mu(x) = 0$ si ce chemin n'existe pas. La condition a) garantit que cette définition ne dépend pas du chemin choisi, et il s'ensuit que μ est réversible. \square

Par conséquent, quand M est fini la condition a) implique l'existence d'une probabilité réversible.

2.1.4 Systèmes dynamiques aléatoires

Soit (Θ, \mathcal{B}, m) un espace de probabilité et $\theta_1, \theta_2, \dots$ une suite infinie de variables aléatoires i.i.d., à valeurs dans Θ , de loi m :

$$\mathbb{P}(\theta_i \in A) = m(A), \quad A \in \mathcal{B}.$$

Soit $f : \Theta \times M \rightarrow M$ une application mesurable ($\{\theta : f(\theta, x) = y\} \in \mathcal{B}, \forall x, y \in M$).

On considère X_0 une variable aléatoire indépendante de la suite $\{\theta_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, et récursivement on pose

$$X_{n+1} = f(\theta_{n+1}, X_n), \quad n \geq 0. \quad (2.1.12)$$

Définition 2.1.10 (f, m) s'appelle un "système dynamique aléatoire".

Exercice : montrer que la suite $(X_n, n \geq 0)$ définie par 2.1.12 est une chaîne de Markov.

2.2 Chaînes irréductibles

2.2.1 Irréductibilité

Définition 2.2.1 La matrice de transition P est dite irréductible si $\forall x, y \in M$ il existe un entier $k = k(x, y)$ tel que

$$P^k(x, y) > 0.$$

De manière équivalente, P est irréductible s'il existe une suite de points $(x_0 = x, x_1, \dots, x_k = y)$ allant de x à y telle que $P(x_i, x_{i-1}) > 0, \forall 1 \leq i \leq k$.

Lorsqu'il existe un entier k tel que $P^k(x, y) > 0$, on dit que les états x et y *communiquent*. Donc tous les états d'une chaîne communiquent lorsqu'elle est irréductible.

Exemples. La marche aléatoire sur \mathbb{Z} et le modèle de l'urne d'Ehrenfest sont irréductibles. Par contre, le modèle de Wright-Fisher n'est pas irréductible : les états 0 et N ne communiquent qu'avec eux-même. La matrice (2.1.2) n'est pas non plus irréductible.

Proposition 2.2.2 *Soit P une matrice de transition irréductible et supposons qu'il existe une mesure stationnaire π . Alors*

1. $\pi(x) > 0$ pour tout $x \in M$,
2. $Pf = f$ implique que $f = \text{constante}$,
3. π est l'unique probabilité stationnaire.

Preuve. Soit $x \in M$ tel que $\pi(x) > 0$. Pour tout $y \in M$, il existe un entier k tel que $P^k(x, y) > 0$. Par ailleurs, par stationnarité, $\pi = \pi P^k$. On a donc

$$\pi(y) = \sum_{z \in M} \pi(z) P^k(z, y) \geq \pi(x) P^k(x, y) > 0,$$

ce qui prouve (1).

Pour démontrer (2), on considère

$$\begin{aligned} & \sum_{x, y \in M} \pi(x) P(x, y) (f(x) - f(y))^2 \\ &= 2 \sum_{x \in M} \pi(x) f(x)^2 - 2 \sum_{x, y \in M} \pi(x) P(x, y) f(x) f(y) \\ &= 2 \sum_{x \in M} \pi(x) f(x) \left(f(x) - \sum_{y \in M} P(x, y) f(y) \right) = 0. \end{aligned}$$

Donc $\forall x, y \in M$

$$\pi(x) P(x, y) (f(x) - f(y))^2 = 0.$$

Vu (1), ceci implique que $\forall x, y \in M$

$$P(x, y) (f(x) - f(y))^2 = 0$$

i.e. $f(x) = f(y)$ si $P(x, y) > 0$. Par ailleurs, puisque la chaîne est irréductible, $\forall x, y \in M$, il existe un chemin $x_0 = x, x_1, \dots, x_k = y$ tel que $P(x_i, x_{i-1}) > 0 \forall 1 \leq i \leq k$, et donc $f(x) = f(x_1) = \dots = f(y)$.

Enfin, pour montrer l'unicité (3), considérons une probabilité stationnaire ν ($\nu = \nu P$). On pose

$$Q(x, y) = P(y, x) \frac{\pi(y)}{\pi(x)}$$

et

$$f(x) = \frac{\nu(x)}{\pi(x)}.$$

Alors Q est une matrice de transition irréductible (exercice) et $Qf = f$. Donc f est constante et on en déduit que $\nu(x) = \pi(x)$ pour tout $x \in M$, ν et π étant des mesures de probabilité. \square

2.2.2 Chaînes irréductibles récurrentes

Pour tout $x \in M$, on considère

$$T_x^1 = \inf\{k > 0 : X_k = x\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\} \quad (2.2.1)$$

le premier instant (strictement positif) de passage en x , avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$. Puis, de manière récursive, on introduit

$$T_x^n = \inf\{k > T_x^{n-1} : X_k = x\},$$

le n ème instant de passage en x .

Définition 2.2.3 On dit que $x \in M$ est

- **transient** si $\mathbb{P}_x(T_x^1 < \infty) < 1$,
- **récurrent** si $\mathbb{P}_x(T_x^1 < \infty) = 1$, et dans ce cas
 - **récurrent positif** si $\mathbb{E}_x(T_x^1) < \infty$,
 - **récurrent nul** si $\mathbb{E}_x(T_x^1) = \infty$.

Proposition 2.2.4 Si la chaîne est irréductible, alors ses états sont tous du même type, i.e. soit tous transients, soit tous récurrents positifs, soit tous récurrents nuls.

Preuve. \square

Exemples. 1. On peut montrer que dans le cas de la marche aléatoire sur \mathbb{Z} , la chaîne est

- (a) transiente si $p \neq 1/2$
- (b) récurrente nulle si $p = 1/2$.

2. Dans le modèle de l'urne d'Ehrenfest, la chaîne est récurrente positive. En fait on verra plus loin (Corollaire (2.2.7)) que toute chaîne de Markov à espace d'états fini et irréductible est récurrente positive.

Lorsque $\mathbb{P}_x(T_x^1 = 1) = 1$, l'état x est dit *absorbant*. Par exemple les états 0 et N du modèle de Wright-Fisher sont absorbants; les autres états étant transients.

2.2.3 Excursions

Pour tous $x, y \in M$, on compte le nombre de passages en y avant de toucher x pour la première fois :

$$N_x^y = \sum_{n=0}^{T_x^1-1} 1_{[X_n=y]}. \quad (2.2.2)$$

Remarques. 1. Si $X_0 = x$, alors $N_x^x = 1$.
 2. Si $X_0 \neq x$, alors $N_x^x = 0$.
 3. $\sum_{y \in M} N_x^y = T_x^1$.

On introduit ensuite,

$$\mu_x(y) = \mathbb{E}_x(N_x^y), \forall x, y \in M.$$

On voit que pour tout $x \in M$, μ_x définit une mesure positive sur M (qui n'est pas une probabilité en général), et que

$$\mu_x(M) = \sum_{y \in M} \mu_x(y) = \mathbb{E}_x(T_x^1) \in [0, \infty]. \quad (2.2.3)$$

Proposition 2.2.5 *Pour tout $x \in M$, μ_x est une mesure stationnaire, i.e.*

$$\mu_x(y) = \sum_{z \in M} \mu_x(z) P(z, y).$$

Preuve. On rappelle que $\forall n \geq 1, \forall x, y, z \in M$,

$$P(z, y) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = z, X_0 = x) = \mathbb{E}_x(1_{[X_{n+1}=y]} | X_n = z).$$

Du coup,

$$1_{[X_n=z]} P(z, y) = 1_{[X_n=z]} \mathbb{E}_x(1_{[X_{n+1}=y]} | X_n),$$

et

$$\mathbb{E}_x(1_{[n < T_x^1]} 1_{[X_n=z]}) P(z, y) = \mathbb{E}_x(1_{[n < T_x^1]} 1_{[X_n=z]} \mathbb{E}_x(1_{[X_{n+1}=y]} | X_n)).$$

Cette égalité reste vraie si $n = 0$. Donc,

$$\begin{aligned}
\sum_{z \in M} \mu_x(z) P(z, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{z \in M} \mathbb{E}_x (1_{[n < T_x^1]} 1_{[X_n=z]}) P(z, y) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{z \in M} \mathbb{E}_x (1_{[n < T_x^1]} 1_{[X_n=z]} \mathbb{E}_x (1_{[X_{n+1}=y]} | X_n)) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_x (1_{[n < T_x^1]} \mathbb{E}_x (1_{[X_{n+1}=y]} | X_n)) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_x (1_{[n < T_x^1]} \mathbb{E}_x (1_{[X_{n+1}=y]} | X_0, X_1, \dots, X_n)) \\
&\quad (\text{puisque } X \text{ est une chaîne de Markov}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_x (1_{[n < T_x^1]} 1_{[X_{n+1}=y]})
\end{aligned}$$

(cette dernière égalité venant du fait que $n < T_x^1 = \cup_{i=1}^n \{X_i = x\}$ est $\sigma(X_0, \dots, X_n)$ -mesurable).

Si $y \neq x$, ce dernier terme est égal à

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_x (1_{[n+1 < T_x^1]} 1_{[X_{n+1}=y]}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}_x (1_{[n < T_x^1]} 1_{[X_n=y]}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_x (1_{[n < T_x^1]} 1_{[X_n=y]}) \\
&= \mathbb{E}_x \left(\sum_{n=0}^{T_x^1 - 1} 1_{[X_n=y]} \right) = \mu_x(y),
\end{aligned}$$

et si $y = x$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_x (1_{[n < T_x^1]} 1_{[X_{n+1}=x]}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_x (1_{[T_x^1 = n+1]}) = 1 = \mu_x(x).$$

□

Corollaire 2.2.6 *Si P est irréductible, alors $\mu_x(y) < \infty \forall x, y \in M$.*

Preuve. P est irréductible, donc pour tous $x, y \in M$, il existe un entier k tel que $P^k(y, x) > 0$. Alors,

$$1 = \mu_x(x) = \sum_{z \in M} \mu_x(z) P^k(z, x) \geq \mu_x(y) P^k(y, x)$$

donc

$$\mu_x(y) \leq (P^k(y, x))^{-1} < \infty.$$

□

Remarquons qu'il résulte de la formule (2.2.3), qu'un état $x \in M$ est récurrent positif si et seulement si μ_x est une mesure finie ($\mu_x(M) < +\infty$). Par conséquent,

Corollaire 2.2.7 *Si $|M| < \infty$ et P est irréductible, la chaîne est récurrente positive, i.e. $\mathbb{E}_x(T_x^1) < \infty$ pour tout $x \in M$.*

Soit maintenant x un état récurrent positif. On peut définir la probabilité sur M

$$\pi_x(y) = \frac{\mu_x(y)}{\mathbb{E}_x(T_x^1)}, \forall y \in M. \quad (2.2.4)$$

D'après la Proposition (2.2.5), π_x est une probabilité stationnaire. Par ailleurs, si P est irréductible, on sait, d'après la Proposition 2.2.2, qu'il existe une seule probabilité stationnaire. Dans ce cas, π_x ne dépend pas de x . D'où le résultat suivant.

Proposition 2.2.8 *Si $\{X_n\}_{n \geq 0}$ est une chaîne irréductible avec au moins un état récurrent positif, alors tous les états sont récurrents positifs et*

$$\pi(x) = \frac{1}{\mathbb{E}_x(T_x^1)} > 0 \quad (2.2.5)$$

est l'unique probabilité stationnaire. De plus,

$$\mathbb{E}_x(N_x^y) = \frac{\pi(y)}{\pi(x)}. \quad (2.2.6)$$

2.2.4 Le théorème ergodique

Proposition 2.2.9 *Sous la loi \mathbb{P}_x , la suite de variables aléatoires $\tau_y^i = \{T_y^{i+1} - T_y^i\}_{i \geq 1}$ est i.i.d. de loi $\mathbb{P}_y(T_y^1 = k)$ et indépendante de T_y^1 .*

Preuve. Exercice. □

Remarque 2.2.10 *Si $y \neq x$, en general la loi de T_y^1 sera différente de la loi de τ_y^i .*

Corollaire 2.2.11 *Soit $N_x = \sum_{n=0}^{\infty} 1_{[X_n=x]}$. Alors si x est transient*

$$\mathbb{P}_x(N_x = k) = (1 - a)a^{k-1}, \quad k \geq 1, \quad a = \mathbb{P}_x(T_x^1 < \infty) \quad (2.2.7)$$

et si x est récurrent on a $\mathbb{P}_x(N_x = \infty) = 1$.

Preuve.

$$\mathbb{P}_x(N_x = k) = \mathbb{P}_x(T_y^{i+1} - T_y^i < \infty, i = 0, \dots, k-1; T_y^{k+1} - T_y^k = \infty) = (1 - a)a^{k-1}$$

□

Théorème 2.2.12 *Soit P une matrice irréductible récurrente positive et π sa probabilité stationnaire. Alors pour tout $x \in M$ et tout $y \in M$*

$$\mathbb{P}_x \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 1_{[X_k=y]} = \pi(y) \right) = 1. \quad (2.2.8)$$

Preuve. D'après la loi des grands nombres

$$\frac{1}{k} T_y^k = \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^{k-1} (T_y^{i+1} - T_y^i) + T_y^1 \right) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}_y(T_y^1) = \pi(y)^{-1} \quad \mathbb{P}_x - p.s.$$

Par ailleurs, pour tout $n \geq 1$, il existe un entier k tel que $T_y^k \leq n < T_y^{k+1}$, c'est à dire que au temps $n - 1$ on a déjà visité k -fois y , mais pas encore $k + 1$, i.e.

$$k \leq \sum_{k=0}^{n-1} 1_{[X_k=y]} < k + 1.$$

En divisant par n on obtien

$$\frac{k}{T_y^{k+1}} < \frac{k}{n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 1_{[X_k=y]} < \frac{k+1}{n} \leq \frac{k+1}{T_y^k}$$

D'où le résultat. \square

REMARQUE. En modifiant légèrement cette preuve, on obtient le résultat plus général suivant :

Corollaire 2.2.13 *Soit P une matrice irréductible récurrente positive et π sa probabilité stationnaire. Soit f une fonction appartenant à $L^1(\pi)$, i.e. $\sum_{x \in M} |f(x)|\pi(x) < \infty$. Alors*

$$\mathbb{P}_x \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) = \sum_{x \in M} f(x)\pi(x) \right) = 1.$$

2.3 Convergence vers l'équilibre

Un corollaire du théorème ergodique est que lorsque P est une matrice de transition irréductible récurrente positive de probabilité invariante π , $\mu \in \mathcal{P}(M)$

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu P^j \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \pi,$$

pour toute probabilité $\mu \in \mathbb{P}(M)$. Ceci n'implique pas en général que $\mu P^n \rightarrow \pi$:

EXEMPLE. La matrice

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a pour loi stationnaire $\pi = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et comme puissances

$$P^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $\mu P^n = \mu$ si n est pair et $\mu P^n = \mu P$ si n est impair et on voit que μP^n ne converge pas vers π .

On cherche maintenant des conditions sur P pour que $\mu P^n \rightarrow \pi$. On cherche également à estimer la vitesse de cette convergence.

Proposition 2.3.1 *Soit P une matrice de transition sur M . On pose*

$$\rho_n = \sup_{x,y \in M} \sup_{A \subset M} |P^n(x, A) - P^n(y, A)|. \quad (2.3.1)$$

Alors,

1. $\rho_{n+m} \leq \rho_n \rho_m$
2. Soit $\rho_n = 1$ pour tout $n \geq 1$, soit $\exists C < \infty$ et $\theta < 1$ tels que $\rho_n \leq C\theta^n \forall n \geq 1$.
3. Dans le cas $\rho_n \leq C\theta^n$ avec $\theta < 1$, il existe une unique probabilité stationnaire π et de plus,

$$|P^n(x, y) - \pi(y)| \leq C\theta^n, \forall n \geq 1, x, y \in M. \quad (2.3.2)$$

Donc, lorsqu'il existe un indice n_0 tel que $\rho_{n_0} < 1$, on a (2.3.2), ce qui implique que $\mu P^n \rightarrow \pi, \forall \mu \in \mathcal{P}(M)$, et que ces convergences ont lieu à des vitesses décroissant exponentiellement vite.

Pour montrer cette proposition, on a besoin des deux lemmes suivants.

Lemme 2.3.2 *Soient $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{P}(M)$, et soit $\mu(x) = \mu_1(x) - \mu_2(x)$. Alors pour tout $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ bornée on a*

$$\left| \sum_{x \in M} f(x) \mu(x) \right| \leq 2 \sup_{x \in M} |f(x)| \sup_{A \subset M} |\mu(A)|.$$

Preuve.

$$\begin{aligned} \left| \sum_{x \in M} f(x) \mu(x) \right| &\leq \left| \sum_{x \in M; \mu(x) \geq 0} f(x) \mu(x) \right| + \left| \sum_{x \in M; \mu(x) < 0} f(x) \mu(x) \right| \\ &\leq \sup_{x \in M} |f(x)| \left| \sum_{x \in M; \mu(x) \geq 0} \mu(x) \right| + \sup_{x \in M} |f(x)| \left| \sum_{x \in M; \mu(x) < 0} \mu(x) \right| \\ &\leq 2 \sup_{x \in M} |f(x)| \sup_{A \subset M} |\mu(A)|. \end{aligned}$$

□

Lemme 2.3.3 Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ bornée, alors

$$2 \inf_{c \in \mathbb{R}} \sup_{x \in M} |f(x) - c| \leq \sup_{x, y \in M} |f(x) - f(y)|.$$

Preuve : Exercice. \square

Preuve de la Proposition 2.3.1

$$\begin{aligned} |P^{n+m}(x, A) - P^{n+m}(y, A)| &= \left| \sum_z P^m(z, A) [P^n(x, z) - P^n(y, z)] \right| \\ &= \inf_c \left| \sum_z (P^m(z, A) - c) [P^n(x, z) - P^n(y, z)] \right| \\ &\leq 2 \inf_c \left(\sup_z |P^m(z, A) - c| \right) \sup_B |P^n(x, B) - P^n(y, B)| \\ &\leq \left(\sup_{z, z'} |P^m(z, A) - P^m(z', A)| \right) \left(\sup_B |P^n(x, B) - P^n(y, B)| \right) \\ &\leq \rho_m \rho_n \end{aligned}$$

et (1) s'ensuit.

Pour montrer (2), supposons qu'il existe n_0 tel que $\rho_{n_0} < 1$. Soit alors $m < n_0$ tel que $n = \left\lfloor \frac{n}{n_0} \right\rfloor n_0 + m$. Alors, par (1), on a

$$\rho_n \leq \rho_{\left\lfloor \frac{n}{n_0} \right\rfloor n_0} \rho_m \leq \rho_{n_0}^{\left\lfloor \frac{n}{n_0} \right\rfloor} = (\rho_{n_0}^{-1})^{\left\lfloor \frac{n}{n_0} \right\rfloor n_0} \leq (\rho_{n_0}^{-n_0})^m (\rho_{n_0}^{-1})^n.$$

Donc, si on pose $C = (\rho_{n_0}^{-n_0})^m$ et $\theta = \rho_{n_0}^{-1}$, on obtient bien $\rho_n \leq C\theta^n$.

Pour le dernier point, on observe que

$$|P^{n+m}(x, y) - P^n(x, y)| = \left| \sum_z P^m(x, z) (P^n(z, y) - P^n(x, y)) \right| \leq \rho_n \leq C\theta^n,$$

donc $P^n(x, y)$ est une suite de Cauchy. Soit $\pi_x(y)$ sa limite. On voit facilement qu'elle ne dépend pas de x , puisque

$$|P^n(x, y) - P^n(x', y)| \leq \rho_n \rightarrow 0.$$

On note π la limite de $P^n(x, \cdot)$. On voit que π est stationnaire, donc que

$$\begin{aligned} |P^n(x, y) - \pi(y)| &= |P^n(x, y) - \pi P^n(y)| \\ &= \left| \sum_z \pi(z) (P^n(x, y) - P^n(z, y)) \right| \\ &\leq \rho_n. \end{aligned}$$

\square

2.3.1 Chaînes fortement irréductibles

Définition 2.3.4 Une matrice de transition P est dite *fortement irréductible* s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $x, y \in M$ on ait $P^{n_0}(x, y) > 0$.

Proposition 2.3.5 Si $|M| < \infty$ et si P est fortement irréductible, alors il existe n_0 tel que $\rho_{n_0} < 1$.

Preuve. Par irréductibilité forte, il existe n_0 tel que $P^{n_0}(x, A) > 0 \forall x \in M$ et $A \subset M$. Donc

$$|P^{n_0}(x, A) - P^{n_0}(y, A)| < 1$$

et puisque M est fini, on en déduit que $\rho_{n_0} < 1$. \square

Et donc, dans ce cas, d'après la formule (2.3.2), μP^n converge exponentiellement vite vers l'(unique) probabilité stationnaire.

EXEMPLES. 1. La matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

n'est pas fortement irréductible.

2. La matrice

$$\begin{pmatrix} p & 1-p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

n'est pas irréductible.

3. La matrice

$$\begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est fortement irréductible si $0 < p < 1$.

2.3.2 Aperiodicité

Définition 2.3.6 Soit $x \in M$ et $R(x) = \{n \in \mathbb{N} : P^n(x, x) > 0\}$. La *période* $p(x)$ de x est le plus grand commun diviseur de $R(x)$.

Proposition 2.3.7 Supposons que P est irréductible. Alors tous les points de M ont la même période.

Preuve. Soient $x, y \in M$ et $n_1 = n(x, y)$, $n_2 = n(y, x)$ tels que $P^{n_1}(x, y) > 0$, $P^{n_2}(y, x) > 0$. Alors

$$P^{n_1+n_2}(x, x) = \sum_{z \in M} P^{n_1}(x, z)P^{n_2}(z, x) \geq P^{n_1}(x, y)P^{n_2}(y, x) > 0$$

donc $n_1 + n_2 \in R(x)$. Si $r \in R(y)$, on a

$$P^{n_1+r+n_2}(x, x) \geq P^{n_1}(x, y)P^r(y, y)P^{n_2}(y, x) > 0$$

donc $n_1 + r + n_2 \in R(x)$. Par définition, la période $p(x)$ est un diviseur de $n_1 + n_2$ et de $n_1 + r + n_2$, donc $p(x)$ divise r , i.e. $p(x) \leq p(y)$. Si on répète l'argument en échangeant les rôles de x et y , on obtient $p(y) \leq p(x)$. Donc $p(x) = p(y)$, ceci $\forall x, y \in M$. \square

Donc si P est irréductible, on peut parler de *période* de P .

EXEMPLES. 1. La période de

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est 2.

2. La période de la marche aléatoire sur \mathbb{Z} est également 2.

Lorsque P est irréductible de période 1, P est dite *apériodique*.

Proposition 2.3.8 *Supposons que P est irréductible. S'il existe $x \in M$ tel que $P(x, x) > 0$, alors P est apériodique.*

Preuve. S'il existe $x \in M$ tel que $P(x, x) > 0$ alors $p(x) = 1$. Mais P est irréductible, donc tous les points ont période 1. \square

Proposition 2.3.9 *Une matrice P est fortement irréductible si et seulement si elle est apériodique.*

Preuve.

\square

Chapitre 3

Martingales

