Lagrangiens Sobolev

Vito Mandorino

CEREMADE, Univ. Paris Dauphine

Rencontre KAM faible à Calvi

11 Octobre 2010

travail avec A. Figalli

Sommaire

Calcul des variations

Étant donné un Lagrangien L, on définit :

- l'action d'une courbe

$$A(\gamma) = \int L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t)\, dt;$$

- la fonction valeur (de donnée initiale u_0)

$$u(x,t) = \min_{\gamma:\gamma(t)=x} \Big\{ u_0(\gamma(0)) + A(\gamma) \Big\}, \qquad t > 0$$

Les propriétés de base de ces objets dans le cas où L est lisse sont bien connues.

Qu'est-ce qu'on peut dire si L n'est pas lisse ?

Calcul des variations

Étant donné un Lagrangien L, on définit :

- l'action d'une courbe

$$A(\gamma) = \int L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t)\, dt;$$

- la fonction valeur (de donnée initiale u_0)

$$u(x,t) = \min_{\gamma:\gamma(t)=x} \Big\{ u_0(\gamma(0)) + A(\gamma) \Big\}, \qquad t > 0$$

Les propriétés de base de ces objets dans le cas où L est lisse sont bien connues.

Qu'est-ce qu'on peut dire si L n'est pas lisse ?

Calcul des variations

Étant donné un Lagrangien L, on définit :

- l'action d'une courbe

$$A(\gamma) = \int L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t)\, dt;$$

- la fonction valeur (de donnée initiale u_0)

$$u(x,t) = \min_{\gamma:\gamma(t)=x} \Big\{ u_0(\gamma(0)) + A(\gamma) \Big\}, \qquad t > 0$$

Les propriétés de base de ces objets dans le cas où L est lisse sont bien connues.

Qu'est-ce qu'on peut dire si L n'est pas lisse ?

Aperçu des résultats (1)

L Tonelli		L Sobolev (mechanique sur $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{T}^d$ + d'autres hypothèses)
• équations d'Euler-Lagrange pour les courbes qui minimisent l'action à extremes fixés	$\rightsquigarrow$	"presque toutes" les courbes qui minimisent l'action à extremes fixés sont C^1 et satisfont les équations d'Euler-Lagrange en forme faible
• $u(\cdot, t)$ est semiconcave, i.e. la differentielle seconde est $\leq C \in \mathbb{R}$	$\rightsquigarrow$	$u(\cdot, t)$ est "L^p-semiconcave", i.e. la differentielle seconde est $\leq f \in L^p$

Aperçu des résultats (1)

L Tonelli		L Sobolev (mechanique sur $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{T}^d$ + d'autres hypothèses)
• équations d'Euler-Lagrange pour les courbes qui minimisent l'action à extremes fixés	$\rightsquigarrow$	"presque toutes" les courbes qui minimisent l'action à extremes fixés sont C^1 et satisfont les équations d'Euler-Lagrange en forme faible
• $u(\cdot, t)$ est semiconcave, i.e. la differentielle seconde est $\leq C \in \mathbb{R}$	$\rightsquigarrow$	$u(\cdot, t)$ est "L^p-semiconcave", i.e. la differentielle seconde est $\leq f \in L^p$

Aperçu des résultats (1)

L Tonelli		L Sobolev (mechanique sur $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{T}^d$ + d'autres hypothèses)
• équations d'Euler-Lagrange pour les courbes qui minimisent l'action à extremes fixés	$\rightsquigarrow$	"presque toutes" les courbes qui minimisent l'action à extremes fixés sont C^1 et satisfont les équations d'Euler-Lagrange en forme faible
• $u(\cdot, t)$ est semiconcave, i.e. la differentielle seconde est $\leq C \in \mathbb{R}$	$\rightsquigarrow$	$u(\cdot, t)$ est "L^p-semiconcave", i.e. la differentielle seconde est $\leq f \in L^p$

Aperçu des résultats (1)

L Tonelli		L Sobolev (mechanique sur $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{T}^d$ + d'autres hypothèses)
• équations d'Euler-Lagrange pour les courbes qui minimisent l'action à extremes fixés	$\rightsquigarrow$	"presque toutes" les courbes qui minimisent l'action à extremes fixés sont C^1 et satisfont les équations d'Euler-Lagrange en forme faible
• $u(\cdot, t)$ est semiconcave, i.e. la differentielle seconde est $\leq C \in \mathbb{R}$	$\rightsquigarrow$	$u(\cdot, t)$ est "L^p-semiconcave", i.e. la differentielle seconde est $\leq f \in L^p$

Aperçu des résultats (2)

L Tonelli

L Sobolev (mechanique sur $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{T}^d$+ d'autres hypothèses)

- $\exists\, d_x u(\bar{x},\bar{t}) \;\Leftrightarrow\; \exists!\,\gamma$ t.q.

  $u(\bar{x},\bar{t}) = u_0(\gamma(0)) + A(\gamma)$,

  et alors on a

  $d_x u(\bar{x},\bar{t}) = \partial_v L(\gamma(\bar{t}),\dot{\gamma}(\bar{t}),\bar{t})$;

  sinon, la sur-differentielle $d_x^+ u$ est l'envelope convexe de

  $$\left\{\partial_v L(\gamma(\bar{t}),\dot{\gamma}(\bar{t}),\bar{t}) : \gamma \text{ minimiseur pour } u(\bar{x},\bar{t})\right\}$$

$\rightsquigarrow$ le gradient $\nabla_x u(\cdot,\bar{t})$ est dans L^p. De plus, $\nabla_x u(\bar{x},\bar{t})$ est une "moyenne" des

$$\left\{\partial_v L(\gamma(\bar{t}),\dot{\gamma}(\bar{t}),\bar{t}) : \gamma \text{ minimiseur pour } u(\bar{x},\bar{t})\right\}$$

Aperçu des résultats (2)

L Tonelli

L Sobolev (mechanique sur $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{T}^d$+ d'autres hypothèses)

- $\exists\, d_x u(\bar{x}, \bar{t}) \;\Leftrightarrow\; \exists!\,\gamma$ t.q.

  $u(\bar{x}, \bar{t}) = u_0(\gamma(0)) + A(\gamma)$,

  et alors on a

  $d_x u(\bar{x}, \bar{t}) = \partial_v L(\gamma(\bar{t}), \dot{\gamma}(\bar{t}), \bar{t})$;

  sinon, la sur-differentielle $d_x^+ u$ est l'envelope convexe de

  $$\Big\{\partial_v L(\gamma(\bar{t}), \dot{\gamma}(\bar{t}), \bar{t}) : \gamma \text{ minimiseur pour } u(\bar{x}, \bar{t})\Big\}$$

$\rightsquigarrow$ le gradient $\nabla_x u(\cdot, \bar{t})$ est dans L^p. De plus, $\nabla_x u(\bar{x}, \bar{t})$ est une "moyenne" des

$$\Big\{\partial_v L(\gamma(\bar{t}), \dot{\gamma}(\bar{t}), \bar{t}) : \gamma \text{ minimiseur pour } u(\bar{x}, \bar{t})\Big\}$$

Aperçu des résultats (3)

L Tonelli

L Sobolev (mechanique sur $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{T}^d$+ d'autres hypothèses)

- la fonction valeur est solution de viscosité de Hamilton-Jacobi dépendante du temps

$$\partial_t u(x,t) + H(x, d_x u(x,t), t) = 0$$

(H étant la trasformée de Legendre de L)

$\rightsquigarrow$ la fonction valeur est solution de viscosité *presque partout* de Hamilton-Jacobi dépendante du temps

Aperçu des résultats (3)

L Tonelli

- la fonction valeur est solution de viscosité de Hamilton-Jacobi dépendante du temps

$$\partial_t u(x,t) + H(x, d_x u(x,t), t) = 0$$

(H étant la trasformée de Legendre de L)

$\rightsquigarrow$

L Sobolev (mechanique sur $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{T}^d$+ d'autres hypothèses)

la fonction valeur est solution de viscosité *presque partout* de Hamilton-Jacobi dépendante du temps

Cas d'étude

On va s'interesser ici à :

D ouvert convexe borné à bord régulier de $\mathbb{R}^d$ ou bien
$D = \mathbb{T}^d \cong \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$

$$L\colon D \times \mathbb{R}^d \times [0, T] \to \mathbb{R}$$
$$(x, v, t) \mapsto \frac{|v|^2}{2} - V(x, t)$$

$$V(\cdot, t) \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \quad \forall\, t \in [0, T], \qquad 1 \leq p \leq +\infty$$

et

$$t \mapsto \|V(\cdot, t)\|_{W^{1,p}} \in L^1([0, T])$$

(ou $W^{2,p}$ à la place de $W^{1,p}$)

Cas d'étude

On va s'interesser ici à :

D ouvert convexe borné à bord régulier de $\mathbb{R}^d$ ou bien $D = \mathbb{T}^d \cong \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$

$$\begin{aligned} L\colon D \times \mathbb{R}^d \times [0,T] &\to \mathbb{R} \\ (x,v,t) &\mapsto \frac{|v|^2}{2} - V(x,t) \end{aligned}$$

$$V(\cdot,t) \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \quad \forall\, t \in [0,T], \qquad 1 \le p \le +\infty$$

et

$$t \mapsto \|V(\cdot,t)\|_{W^{1,p}} \in L^1([0,T])$$

(ou $W^{2,p}$ à la place de $W^{1,p}$)

Cas d'étude

On va s'interesser ici à :

D ouvert convexe borné à bord régulier de $\mathbb{R}^d$ ou bien $D = \mathbb{T}^d \cong \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$

$$\begin{aligned} L\colon D \times \mathbb{R}^d \times [0, T] &\to \mathbb{R} \\ (x, v, t) &\mapsto \frac{|v|^2}{2} - V(x, t) \end{aligned}$$

$$V(\cdot, t) \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \quad \forall\, t \in [0, T], \qquad 1 \leq p \leq +\infty$$

et

$$t \mapsto \|V(\cdot, t)\|_{W^{1,p}} \in L^1([0, T])$$

(ou $W^{2,p}$ à la place de $W^{1,p}$)

Probas sur l'espace des courbes

On ne peut pas raisonner sur une courbe particulière : V n'est pas differentiable ou même pas définie sur ensembles 1-dim tels que les courbes $\Rightarrow A(\gamma)$ pas définie en général

$\rightsquigarrow$ *point de vue différent : non pas courbes, mais probabilités sur l'espace des courbes.*

$$\mathcal{P}\big(C([0,T];\bar{D})\big) = \Big\{\text{probas sur l'espace des courbes continues}\Big\}$$

$$\eta \in \mathcal{P}\big(C([0,T];\bar{D})\big) \qquad \text{est dit} \qquad \textit{flot généralisé}$$

Probas sur l'espace des courbes

On ne peut pas raisonner sur une courbe particulière : V n'est pas differentiable ou même pas définie sur ensembles 1-dim tels que les courbes $\Rightarrow$ $A(\gamma)$ pas définie en général

$\rightsquigarrow$ *point de vue différent : non pas courbes, mais probabilités sur l'espace des courbes.*

$$\mathcal{P}\big(C([0,T];\bar{D})\big) = \Big\{\text{probas sur l'espace des courbes continues}\Big\}$$

$\eta \in \mathcal{P}\big(C([0,T];\bar{D})\big)$ est dit *flot généralisé*

Probas sur l'espace des courbes

On ne peut pas raisonner sur une courbe particulière : V n'est pas differentiable ou même pas définie sur ensembles 1-dim tels que les courbes $\Rightarrow A(\gamma)$ pas définie en général

$\rightsquigarrow$ *point de vue différent : non pas courbes, mais probabilités sur l'espace des courbes.*

$$\mathcal{P}\big(C([0,T];\bar{D})\big) = \Big\{\text{probas sur l'espace des courbes continues}\Big\}$$

$\eta \in \mathcal{P}\big(C([0,T];\bar{D})\big)$ est dit *flot généralisé*

Flots généralisés

- toute courbe peut être vue comme un flot generalisé (une Dirac) ;

$$\begin{array}{rcl} \bar{D} & \hookrightarrow & \mathcal{P}(\bar{D}) \\ x & \longmapsto & \delta_x \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{rcl} C([0,T];\bar{D}) & \hookrightarrow & \mathcal{P}(C([0,T];\bar{D})) \\ \gamma & \longmapsto & \delta_\gamma \end{array}$$

- on peut *évaluer* un flot généralisé au temps t, ce qui donne une proba sur $\bar{D}$

$$\begin{array}{rcl} C([0,T];\bar{D}) & \xrightarrow{e_t} & \bar{D} \\ \gamma & \longmapsto & \gamma(t) \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(C([0,T];\bar{D})) & \xrightarrow{(e_t)_\#} & \mathcal{P}(\bar{D}) \\ \eta & \longmapsto & (e_t)_\#\eta \end{array}$$

- $(e_0)_\#\eta$ et $(e_T)_\#\eta$ sont les *extrêmes* de η ;
- plus d'information avec les extrêmes *conjointes* $(e_0, e_T)_\#\eta$.

Flots généralisés

- toute courbe peut être vue comme un flot generalisé (une Dirac) ;

$$\begin{array}{rcl} \bar{D} & \hookrightarrow & \mathcal{P}(\bar{D}) \\ x & \longmapsto & \delta_x \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{rcl} C([0,T];\bar{D}) & \hookrightarrow & \mathcal{P}(C([0,T];\bar{D})) \\ \gamma & \longmapsto & \delta_\gamma \end{array}$$

- on peut *évaluer* un flot généralisé au temps t, ce qui donne une proba sur $\bar{D}$

$$\begin{array}{rcl} C([0,T];\bar{D}) & \xrightarrow{e_t} & \bar{D} \\ \gamma & \longmapsto & \gamma(t) \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(C([0,T];\bar{D})) & \xrightarrow{(e_t)_\#} & \mathcal{P}(\bar{D}) \\ \eta & \longmapsto & (e_t)_\#\eta \end{array}$$

- $(e_0)_\#\eta$ et $(e_T)_\#\eta$ sont les *extrêmes* de η ;
- plus d'information avec les extrêmes *conjointes* $(e_0, e_T)_\#\eta$.

Flots généralisés

- toute courbe peut être vue comme un flot generalisé (une Dirac) ;

$$\begin{array}{rcl} \bar{D} & \hookrightarrow & \mathcal{P}(\bar{D}) \\ x & \longmapsto & \delta_x \end{array} \qquad \rightsquigarrow \qquad \begin{array}{rcl} C([0,T];\bar{D}) & \hookrightarrow & \mathcal{P}(C([0,T];\bar{D})) \\ \gamma & \longmapsto & \delta_\gamma \end{array}$$

- on peut *évaluer* un flot généralisé au temps t, ce qui donne une proba sur $\bar{D}$

$$\begin{array}{rcl} C([0,T];\bar{D}) & \xrightarrow{e_t} & \bar{D} \\ \gamma & \longmapsto & \gamma(t) \end{array} \qquad \rightsquigarrow \qquad \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(C([0,T];\bar{D})) & \xrightarrow{(e_t)_\#} & \mathcal{P}(\bar{D}) \\ \eta & \longmapsto & (e_t)_\#\eta \end{array}$$

- $(e_0)_\#\eta$ et $(e_T)_\#\eta$ sont les *extrêmes* de η ;
- plus d'information avec les extrêmes *conjointes* $(e_0, e_T)_\#\eta$.

Flots généralisés à compression bornée

Esprit : traduire les propriétés Lebesgue-presque partout en propriétés vraies pour η-presque toute γ.

Condition utile sur η : compression bornée, i.e.

$$(e_t)_\# \eta \leq C \mathcal{L}^d, \qquad C > 0 \tag{1}$$

$$\mathcal{P}_T^{\leq}(D) := \left\{ \eta \text{ flot généralisé t.q. (??) est vraie } \right\}$$

$\eta \in \mathcal{P}_T^{\leq}(D)$ est dit *flot généralisé à compression bornée*. On a

$$(e_t)_\# \eta = \rho_t \mathcal{L}^d_{\lfloor D} \quad \text{avec} \quad \|\rho_t\|_{L^\infty(D)} \leq C$$

Flots généralisés à compression bornée

Esprit : traduire les propriétés Lebesgue-presque partout en propriétés vraies pour η-presque toute γ.

Condition utile sur η : compression bornée, i.e.

$$(e_t)_\#\eta \leq C\mathcal{L}^d, \qquad C > 0 \tag{1}$$

$$\mathcal{P}_T^{\leq}(D) := \Big\{\eta \text{ flot généralisé t.q. (??) est vraie } \Big\}$$

$\eta \in \mathcal{P}_T^{\leq}(D)$ est dit *flot généralisé à compression bornée*. On a

$$(e_t)_\#\eta = \rho_t \mathcal{L}^d_{\lfloor D} \quad \text{avec} \quad \|\rho_t\|_{L^\infty(D)} \leq C$$

Flots généralisés à compression bornée (2)

Technique de base :

η à compression bornée, $f : \bar{D} \times [0, T] \to \mathbb{R}$ définie $\mathcal{L}^{d+1}$-presque partout

$\Longrightarrow (\gamma, t) \mapsto f(\gamma(t), t)$ définie $\eta \otimes dt$-presque partout. De plus,

$$\int \int f(\gamma(t), t)\, dt\, d\eta$$
$$= \int \int f(\gamma(t), t)\, d\eta\, dt = \int \int f(x, t)\ d(e_t)_{\#}\eta\ dt$$

Exemples : $f = V$, $f = \chi_{\partial_D}$.

Flots généralisés à compression bornée (2)

Technique de base :

η à compression bornée, $f : \bar{D} \times [0, T] \to \mathbb{R}$ définie $\mathcal{L}^{d+1}$-presque partout

$\Longrightarrow (\gamma, t) \mapsto f(\gamma(t), t)$ définie $\eta \otimes dt$-presque partout. De plus,

$$\int \int f(\gamma(t), t)\, dt\, d\eta$$
$$= \int \int f(\gamma(t), t)\, d\eta\, dt = \int \int f(x, t)\ d(e_t)_{\#}\eta\ dt$$

Exemples : $f = V$, $f = \chi_{\partial_D}$.

Flots généralisés à compression bornée (2)

Technique de base :

η à compression bornée, $f : \bar{D} \times [0, T] \to \mathbb{R}$ définie $\mathcal{L}^{d+1}$-presque partout

$\Longrightarrow (\gamma, t) \mapsto f(\gamma(t), t)$ définie $\eta \otimes dt$-presque partout. De plus,

$$\int \int f(\gamma(t), t)\, dt\, d\eta$$
$$= \int \int f(\gamma(t), t)\, d\eta\, dt = \int \int f(x, t)\ d(e_t)_{\#}\eta\ dt$$

Exemples : $f = V$, $f = \chi_{\partial_D}$.

Action d'un flot généralisé

Donc, l'action de η est bien définie par

$$A(\eta) = \int_{C([0,T];\bar{D})} A(\gamma)\, d\eta(\gamma)$$
$$= E(\eta) - \int_{C([0,T];\bar{D})} \int_0^T V(\gamma(t), t)\, dt\, d\eta$$

avec

$$E(\eta) = \int \int |\dot{\gamma}|^2/2\, dt\, d\eta \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

car

$$\int_{C([0,T];\bar{D})} \int_0^T \Big| V(\gamma(t), t)) \Big|\, dt\, d\eta = \int_0^T \int_{C([0,T];\bar{D})} \Big| V(\gamma(t), t) \Big|\, d\eta\, dt$$
$$= \int_0^T \int_{\bar{D}} \Big| V(x, t) \Big| \rho_t(x)\, dx\, dt \leq C \|V\|_{L^1(D\times[0,T])}$$

Action d'un flot généralisé

Donc, l'action de η est bien définie par

$$\begin{aligned} A(\eta) &= \int_{C([0,T];\bar{D})} A(\gamma)\, d\eta(\gamma) \\ &= E(\eta) - \int_{C([0,T];\bar{D})} \int_0^T V(\gamma(t), t)\, dt\, d\eta \end{aligned}$$

avec

$$E(\eta) = \int \int |\dot{\gamma}|^2/2\, dt\, d\eta \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

car

$$\begin{aligned} \int_{C([0,T];\bar{D})} \int_0^T \Big| V(\gamma(t), t)) \Big|\, dt\, d\eta &= \int_0^T \int_{C([0,T];\bar{D})} \Big| V(\gamma(t), t) \Big|\, d\eta\, dt \\ &= \int_0^T \int_{\bar{D}} \Big| V(x, t) \Big| \rho_t(x)\, dx\, dt \leq C \| V \|_{L^1(D\times[0,T])} \end{aligned}$$

Flots généralisés qui minimisent l'action

On dit que $\eta \in \mathcal{P}_T^{\leq}(D)$ *minimise l'action à extremes fixés* (dans $\mathcal{P}_T^{\leq}(D)$) si

$$A(\eta) = \min\Big\{ A(\nu) \,:\, \nu \in \mathcal{P}_T^{\leq}(D), (e_0, e_T)_{\#}\nu = (e_0, e_T)_{\#}\eta \Big\}$$

Motivation (1)

Les équations d'Euler des fluides incompressibles

$$\begin{cases} \partial_t v + (v \cdot \nabla) v = -\nabla p & \text{dans } D \times [0, T], \\ \operatorname{div} v = 0 & \text{dans } D \times [0, T], \\ u \cdot \nu = 0 & \text{sur } \partial D \times [0, T]. \end{cases}$$

peuvent être interpretés comme équations geodesiques sur la varieté de dimension infinie

$$\mathrm{SDiff(D)} = \{g \colon D \to D : g \text{ diffeomorphism }, g_{\#}\mathcal{L}^d_{\lfloor D} = \mathcal{L}^d_{\lfloor D}\}.$$

- g est le flot du champs de vitesse v ;
- $t \mapsto g_t(\cdot)$ est un chemin géodesique dans $\mathrm{SDiff(D)}$;
- $t \mapsto g_t(x)$ est, pour tout x, le chemin de la "particule de fluide" qui était à l'endroit x à l'instant $t = 0$.

Motivation (1)

Les équations d'Euler des fluides incompressibles

$$\begin{cases} \partial_t v + (v \cdot \nabla) v = -\nabla p & \text{dans } D \times [0, T], \\ \operatorname{div} v = 0 & \text{dans } D \times [0, T], \\ u \cdot \nu = 0 & \text{sur } \partial D \times [0, T]. \end{cases}$$

peuvent être interpretés comme équations geodesiques sur la varieté de dimension infinie

$$\mathrm{SDiff(D)} = \{g \colon D \to D : g \text{ diffeomorphism }, g_{\#}\mathcal{L}^d_{\lfloor D} = \mathcal{L}^d_{\lfloor D}\}.$$

- g est le flot du champs de vitesse v ;
- $t \mapsto g_t(\cdot)$ est un chemin géodesique dans $\mathrm{SDiff(D)}$;
- $t \mapsto g_t(x)$ est, pour tout x, le chemin de la "particule de fluide" qui était à l'endroit x à l'instant $t = 0$.

Motivation (2)

On peut alors chercher des solutions aux équations des fluides incompressibles en minimisant l'énergie cinétique des chemins dans $\mathrm{SDiff}(D)$.

Problème : il se trouve que, pour $f, h \in \mathrm{SDiff}(D)$, la minimisation à extrêmes fixés

$$\inf_{\substack{t \mapsto g_t \in \mathrm{SDiff(D)} \\ g_0 = f, g_T = h}} \int_0^T \int_D \frac{1}{2} |\partial_t g_t(x)|^2 \, dx \, dt$$

est *mal posée* :

- ils existent f, h telles que l'inf soit $+\infty$;
- ils existent f, h telles que l'inf n'est pas un min.

Remède : relaxer le modèle.

Motivation (2)

On peut alors chercher des solutions aux équations des fluides incompressibles en minimisant l'énergie cinétique des chemins dans $\mathrm{SDiff}(D)$.

Problème : il se trouve que, pour $f, h \in \mathrm{SDiff}(D)$, la minimisation à extrêmes fixés

$$\inf_{\substack{t \mapsto g_t \in \mathrm{SDiff(D)} \\ g_0 = f, g_T = h}} \int_0^T \int_D \frac{1}{2} |\partial_t g_t(x)|^2 \, dx \, dt$$

est *mal posée* :

- ils existent f, h telles que l'inf soit $+\infty$;
- ils existent f, h telles que l'inf n'est pas un min.

Remède : relaxer le modèle.

Motivation (2)

On peut alors chercher des solutions aux équations des fluides incompressibles en minimisant l'énergie cinétique des chemins dans $\mathrm{SDiff}(D)$.

Problème : il se trouve que, pour $f, h \in \mathrm{SDiff}(D)$, la minimisation à extrêmes fixés

$$\inf_{\substack{t \mapsto g_t \in \mathrm{SDiff(D)} \\ g_0 = f, g_T = h}} \int_0^T \int_D \frac{1}{2} |\partial_t g_t(x)|^2 \, dx \, dt$$

est *mal posée* :

- ils existent f, h telles que l'inf soit $+\infty$;
- ils existent f, h telles que l'inf n'est pas un min.

Remède : relaxer le modèle.

Motivation (3)

Modèle relaxé : à la place des chemins dans $\mathrm{SDiff}(D)$, on considère les *flots généralisés incompressibles* qui joignent f à h :

$$\left\{\eta \in \mathcal{P}(C([0,T];D)) : (e_t)_{\#}\eta = \mathcal{L}^d_{\lfloor D}, (e_0, e_T)_{\#}\eta = (f,h)_{\#}\mathcal{L}^d_{\lfloor D}\right\}$$

et on minimise, dans cet ensemble, l'énergie

$$\int_{C([0,T];D)} \int_0^T \frac{1}{2}|\dot{\gamma}(t)|^2 \, dt \, d\eta(\gamma).$$

Les problèmes mentionnés disparaissent : l'inf est $< +\infty$, et il est atteint par une $\bar{\eta}$.

Motivation (3)

Modèle relaxé : à la place des chemins dans $\mathrm{SDiff}(D)$, on considère les *flots généralisés incompressibles* qui joignent f à h :

$$\left\{\eta \in \mathcal{P}(C([0,T];D)) : (e_t)_\# \eta = \mathcal{L}^d_{\lfloor D}, (e_0, e_T)_\# \eta = (f,h)_\# \mathcal{L}^d_{\lfloor D}\right\}$$

et on minimise, dans cet ensemble, l'énergie

$$\int_{C([0,T];D)} \int_0^T \frac{1}{2} |\dot{\gamma}(t)|^2 \, dt \, d\eta(\gamma).$$

Les problèmes mentionnés disparaissent : l'inf est $< +\infty$, et il est atteint par une $\bar{\eta}$.

Motivation (4)

Si l'on relaxe aussi la condition d'incompressibilité, la *pression* $p(x,t)$ apparaît comme un multiplicateur de Lagrange : on a

$$\int_{C([0,T];D)} \int_0^T \left(\frac{1}{2} |\dot{\gamma}(t)|^2 - p(\gamma(t),t) \right) dt \, d\overline{\eta}$$

$$= \min_{\substack{\eta \in \mathcal{P}_T^{\leq}(D) \\ (e_0, e_T)_\# \eta = (f,h)_\# \mathcal{L}^d_{\lfloor D}}} \int_{C([0,T];D)} \int_0^T \left(\frac{1}{2} |\dot{\gamma}(t)|^2 - p(\gamma(t),t) \right) dt \, d\eta$$

Motivation (5)

On est donc interessés à minimizer l'action du Lagrangien $L(x, v, t) = |v|^2/2 - p(x, t)$.

En général on a que $p \in L^2_{\mathrm{loc}}((0, T); BV(D))$ n'est pas lisse !

d'où l'intêret pour les Lagrangiens non régulières.

Dans ce qui suit, on ne s'interêsse pas à questions d'existence des minimums.

Motivation (5)

On est donc interessés à minimizer l'action du Lagrangien $L(x, v, t) = |v|^2/2 - p(x, t)$.

En général on a que $p \in L^2_{\mathrm{loc}}((0, T); BV(D))$ n'est pas lisse !

d'où l'intêret pour les Lagrangiens non régulières.

Dans ce qui suit, on ne s'interêsse pas à questions d'existence des minimums.

Motivation (5)

On est donc interessés à minimizer l'action du Lagrangien $L(x, v, t) = |v|^2/2 - p(x, t)$.

En général on a que $p \in L^2_{\mathrm{loc}}((0, T); BV(D))$ n'est pas lisse !

d'où l'intêret pour les Lagrangiens non régulières.

Dans ce qui suit, on ne s'interêsse pas à questions d'existence des minimums.

Deux rappels

$$\mathcal{P}_T^{<}(D) = \Big\{ \eta \in \mathcal{P}\big(C([0,T];\bar{D})\big) : \\ \exists\, C > 0 \text{ t.q. } (e_t)_\# \eta \leq C\mathcal{L}^d \ \forall\, t \in [0,T] \Big\}$$

$\eta \in \mathcal{P}_T^{<}(D)$ minimise l'action à extremes fixés (dans $\mathcal{P}_T^{<}(D)$) si

$$A(\eta) = \min\Big\{ A(\nu) : \nu \in \mathcal{P}_T^{<}(D), (e_0, e_T)_\# \nu = (e_0, e_T)_\# \eta \Big\}$$

Question : qu'est-ce qu'on peut dire sur une η minimisante ? Est-ce qu'il y a un analogue des équations d'Euler-Lagrange ?

Deux rappels

$$\mathcal{P}_T^{\leq}(D) = \Big\{\eta \in \mathcal{P}\big(C([0,T];\bar{D})\big) : \\ \exists\, C > 0 \text{ t.q. } (e_t)_\# \eta \leq C\mathcal{L}^d \;\forall\, t \in [0,T]\Big\}$$

$\eta \in \mathcal{P}_T^{\leq}(D)$ minimise l'action à extremes fixés (dans $\mathcal{P}_T^{\leq}(D)$) si

$$A(\eta) \;=\; \min\Big\{A(\nu) \;:\; \nu \;\in\; \mathcal{P}_T^{\leq}(D), (e_0, e_T)_\#\nu \;=\; (e_0, e_T)_\#\eta\Big\}$$

Question : qu'est-ce qu'on peut dire sur une η minimisante ? Est-ce qu'il y a un analogue des équations d'Euler-Lagrange ?

Deux rappels

$$\mathcal{P}_T^{\leq}(D) = \Big\{\eta \in \mathcal{P}\big(C([0,T];\bar{D})\big) : \\ \exists\, C > 0 \text{ t.q. } (e_t)_\# \eta \leq C\mathcal{L}^d \ \forall\, t \in [0,T]\Big\}$$

$\eta \in \mathcal{P}_T^{\leq}(D)$ minimise l'action à extremes fixés (dans $\mathcal{P}_T^{\leq}(D)$) si

$$A(\eta) \ = \ \min\Big\{A(\nu) \ : \ \nu \ \in \ \mathcal{P}_T^{\leq}(D), (e_0, e_T)_\# \nu \ = \ (e_0, e_T)_\# \eta\Big\}$$

Question : qu'est-ce qu'on peut dire sur une η minimisante ? Est-ce qu'il y a un analogue des équations d'Euler-Lagrange ?

Théoreme

- *D ouvert convexe borné et à bord régulier dans $\mathbb{R}^d$, ou bien $D = \mathbb{T}^d$;*
- *$V \in L^1\big([0,T]; W^{1,p}(D)\big)$, $1 \leq p \leq +\infty$;*
- *η minimiseur pour l'action à extremes fixés dans $\mathcal{P}_T^{\leq}(D)$.*

Alors, pour η-presque toute γ :

(i) *$\nabla_x V(\gamma(t), t)$ est bien défini pour presque tout t ;*

(ii) *$\gamma \in W^{2,p}\big((0,T); \bar{D}\big)$.*
En particulier, grâce aux plongements de Sobolev, $\gamma \in C^{1,1/q}$, où q est l'exposante conjugué de p ;

(iii) *$\ddot{\gamma}(t) = -\nabla_x V(\gamma(t), t)$ presque partout dans $[0,T]$.*

Équations d'Euler-Lagrange — cas Sobolev

Théoreme

- *D ouvert convexe borné et à bord régulier dans $\mathbb{R}^d$, ou bien $D = \mathbb{T}^d$;*
- $V \in L^1\big([0,T]; W^{1,p}(D)\big)$, $1 \le p \le +\infty$;
- *η minimiseur pour l'action à extremes fixés dans $\mathcal{P}_T^{\le}(D)$.*

Alors, pour η-presque toute γ :

(i) *$\nabla_x V(\gamma(t), t)$ est bien défini pour presque tout t ;*

(ii) *$\gamma \in W^{2,p}\big((0,T); \bar{D}\big)$.*
En particulier, grâce aux plongements de Sobolev, $\gamma \in C^{1,1/q}$, où q est l'exposante conjugué de p ;

(iii) *$\ddot{\gamma}(t) = -\nabla_x V(\gamma(t), t)$ presque partout dans $[0,T]$.*

Équations d'Euler-Lagrange — cas Sobolev

Théoreme

- *D ouvert convexe borné et à bord régulier dans $\mathbb{R}^d$, ou bien $D = \mathbb{T}^d$;*
- *$V \in L^1([0,T]; W^{1,p}(D))$, $1 \leq p \leq +\infty$;*
- *η minimiseur pour l'action à extremes fixés dans $\mathcal{P}_T^{\leq}(D)$.*

Alors, pour η-presque toute γ :

(i) *$\nabla_x V(\gamma(t), t)$ est bien défini pour presque tout t ;*

(ii) *$\gamma \in W^{2,p}((0,T); \bar{D})$.*
En particulier, grâce aux plongements de Sobolev, $\gamma \in C^{1,1/q}$, où q est l'exposante conjugué de p ;

(iii) *$\ddot{\gamma}(t) = -\nabla_x V(\gamma(t), t)$ presque partout dans $[0,T]$.*

Théoreme

- *D ouvert convexe borné et à bord régulier dans $\mathbb{R}^d$, ou bien $D = \mathbb{T}^d$;*
- *$V \in L^1([0,T]; W^{1,p}(D))$, $1 \leq p \leq +\infty$;*
- *η minimiseur pour l'action à extremes fixés dans $\mathcal{P}_T^{\leq}(D)$.*

Alors, pour η-presque toute γ :

(i) *$\nabla_x V(\gamma(t), t)$ est bien défini pour presque tout t ;*

(ii) *$\gamma \in W^{2,p}((0,T); \bar{D})$.*
En particulier, grâce aux plongements de Sobolev, $\gamma \in C^{1,1/q}$, où q est l'exposante conjugué de p ;

(iii) *$\ddot{\gamma}(t) = -\nabla_x V(\gamma(t), t)$ presque partout dans $[0,T]$.*

Théoreme

- *D ouvert convexe borné et à bord régulier dans $\mathbb{R}^d$, ou bien $D = \mathbb{T}^d$;*
- *$V \in L^1\big([0,T]; W^{1,p}(D)\big)$, $1 \leq p \leq +\infty$;*
- *η minimiseur pour l'action à extremes fixés dans $\mathcal{P}_T^{\leq}(D)$.*

Alors, pour η-presque toute γ :

(i) *$\nabla_x V(\gamma(t), t)$ est bien défini pour presque tout t ;*

(ii) *$\gamma \in W^{2,p}\big((0,T); \bar{D}\big)$.*
En particulier, grâce aux plongements de Sobolev, $\gamma \in C^{1,1/q}$, où q est l'exposante conjugué de p ;

(iii) *$\ddot{\gamma}(t) = -\nabla_x V(\gamma(t), t)$ presque partout dans $[0,T]$.*

Idée de la preuve

(i) est une conséquence de η à compression bornée + $\nabla_x V$ défini $\mathcal{L}^{d+1}$-presque partout.

Soit maintenant η minimiseur à extremes fixés. On calcule les variations de la façon suivante. Soient

$$\varphi \in C_c^\infty([0,T];\mathbb{R}^d), \quad S \subset C([0,T];\bar{D}), \quad |\varepsilon| \text{ petit;}$$

On considère la mesure $(F_{\varepsilon,\varphi,S})_\# \eta$ où

$$F_{\varepsilon,\varphi,S}(\gamma) = \begin{cases} \gamma + \varepsilon\varphi & si\ \gamma \in S \\ \gamma & si\ \gamma \notin S \end{cases}$$

(on oublie pour l'instant le bord de D)

Idée de la preuve

(i) est une conséquence de η à compression bornée + $\nabla_x V$ défini $\mathcal{L}^{d+1}$-presque partout.

Soit maintenant η minimiseur à extremes fixés. On calcule les variations de la façon suivante. Soient

$$\varphi \in C_c^\infty([0,T];\mathbb{R}^d), \quad S \subset C([0,T];\bar{D}), \quad |\varepsilon| \text{ petit;}$$

On considère la mesure $(F_{\varepsilon,\varphi,S})_\# \eta$ où

$$F_{\varepsilon,\varphi,S}(\gamma) = \begin{cases} \gamma + \varepsilon\varphi & si\ \gamma \in S \\ \gamma & si\ \gamma \notin S \end{cases}$$

(on oublie pour l'instant le bord de D)

Idée de la preuve

(i) est une conséquence de η à compression bornée + $\nabla_x V$ défini $\mathcal{L}^{d+1}$-presque partout.

Soit maintenant η minimiseur à extremes fixés. On calcule les variations de la façon suivante. Soient

$$\varphi \in C_c^\infty([0,T];\mathbb{R}^d), \quad S \subset C([0,T];\bar{D}), \quad |\varepsilon| \text{ petit;}$$

On considère la mesure $(F_{\varepsilon,\varphi,S})_\# \eta$ où

$$F_{\varepsilon,\varphi,S}(\gamma) = \begin{cases} \gamma + \varepsilon\varphi & si\ \gamma \in S \\ \gamma & si\ \gamma \notin S \end{cases}$$

(on oublie pour l'instant le bord de D)

Idée de la preuve

(i) est une conséquence de η à compression bornée + $\nabla_x V$ défini $\mathcal{L}^{d+1}$-presque partout.

Soit maintenant η minimiseur à extremes fixés. On calcule les variations de la façon suivante. Soient

$$\varphi \in C_c^\infty([0,T];\mathbb{R}^d), \quad S \subset C([0,T];\bar{D}), \quad |\varepsilon| \text{ petit;}$$

On considère la mesure $(F_{\varepsilon,\varphi,S})_\# \eta$ où

$$F_{\varepsilon,\varphi,S}(\gamma) = \begin{cases} \gamma + \varepsilon\varphi & si\ \gamma \in S \\ \gamma & si\ \gamma \notin S \end{cases}$$

(on oublie pour l'instant le bord de D)

Idée de la preuve (2)

- $(F_{\varepsilon,\varphi,s})_\# \eta$ est encore à compression bornée : on a
$$(e_t)_\#(F_{\varepsilon,\varphi,s})_\#\eta \leq 2(e_t)_\#\eta \leq 2C\mathcal{L}^d \qquad \text{pour } t \in [0,T],$$
- $(F_{\varepsilon,\varphi,s})_\# \eta$ a encore les mêmes extrêmes conjointes de η car φ est à support compact.

On a alors par minimalité de η

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon}_{|\varepsilon=0} A\big((F_{\varepsilon,\varphi,s})_\#\eta\big)$$

Idée de la preuve (2)

- $(F_{\varepsilon,\varphi,s})_{\#}\eta$ est encore à compression bornée : on a

$$(e_t)_{\#}(F_{\varepsilon,\varphi,s})_{\#}\eta \leq 2(e_t)_{\#}\eta \leq 2C\mathcal{L}^d \qquad \text{pour } t \in [0,T],$$

- $(F_{\varepsilon,\varphi,s})_{\#}\eta$ a encore les mêmes extrêmes conjointes de η car φ est à support compact.

On a alors par minimalité de η

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon}_{|\varepsilon=0} A\big((F_{\varepsilon,\varphi,s})_{\#}\eta\big)$$

Idée de la preuve (3)

Donc

$$
\begin{aligned}
0 &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{A\big((F_{\varepsilon,\varphi,S})_{\#}\eta\big) - A(\eta)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{C([0,T];\bar{D})} \Big(A\big(F_{\varepsilon,\varphi,S}(\gamma)\big) - A(\gamma)\Big)\, d\eta \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_S \int_0^T \Bigg(\frac{|\dot\gamma(t) + \varepsilon\dot\varphi(t)|^2 - |\dot\gamma(t)|^2}{2\varepsilon} \\
&\qquad\qquad - \frac{V(\gamma(t)+\varepsilon\varphi(t),t) - V(\gamma(t),t)}{\varepsilon}\Bigg)\, dt\, d\eta \\
&= \int_S \int_0^T \Big(\dot\gamma(t)\cdot\dot\varphi(t) - \nabla_x V(\gamma(t),t)\cdot\varphi(t)\Big)\, dt\, d\eta
\end{aligned}
$$

Idée de la preuve (4)

Pour la partie du potentiel on a utilisé que :

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0}\int_S\int_0^T \frac{V(\gamma(t)+\varepsilon\varphi(t),t)-V(\gamma(t),t)}{\varepsilon}\,dt\,d\eta \\
&=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T\int_S \frac{V(\gamma(t)+\varepsilon\varphi(t),t)-V(\gamma(t),t)}{\varepsilon}\,d\eta\,dt \\
&=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T\int_D \frac{V(x+\varepsilon\varphi(t),t)-V(x,t)}{\varepsilon}\rho_{t,S}(x)\,dx\,dt \\
&=\int_0^T\int_D \nabla_x V(x,t)\cdot\varphi(t)\rho_{t,S}(x)\,dx\,dt \\
&=\int_0^T\int_S \nabla_x V(\gamma(t),t)\cdot\varphi(t)\,d\eta\,dt
\end{aligned}$$

Idée de la preuve (5)

Pour deriver sous le signe d'intégrale, on a utilisé une version de la propriété suivante des fonctions Sobolev :

Soient f une fonction Sobolev et $v \in \mathbb{R}^d$. Alors

$$\frac{f(x+\varepsilon v) - f(x)}{\varepsilon} \underset{L^1_{loc}}{\longrightarrow} \nabla_x f(x) \cdot v \qquad \text{as } \varepsilon \to 0$$

Idée de la preuve (6)

On a donc obtenu

$$\int_S \int_0^T \Big(\dot\gamma(t) \cdot \dot\varphi(t) - \nabla_x V(\gamma(t), t) \cdot \varphi(t) \Big) \, dt \, d\eta = 0$$

$\forall \, \varphi \in C_c^\infty([0, T]; \mathbb{R}^d), \; S \subset C([0, T]; \bar{D})$.

Ce n'est pas difficile de montrer que alors, *pour η-presque toute γ*,

$$\int_0^T \Big(\dot\gamma(t) \cdot \dot\varphi(t) - \nabla_x V(\gamma(t), t) \cdot \varphi(t) \Big) \, dt = 0 \qquad \forall \, \varphi \in C_c^\infty.$$

Maintenant, comme dans le cas lisse : cette relation dit que, pour η-presque toute γ,

$$\ddot\gamma(t) = -\nabla_x V(\gamma(t), t) \qquad \text{au sens distributionnel.}$$

(*iii*) est prouvé.

Idée de la preuve (6)

On a donc obtenu

$$\int_S \int_0^T \Big(\dot\gamma(t) \cdot \dot\varphi(t) - \nabla_x V(\gamma(t), t) \cdot \varphi(t) \Big)\, dt\, d\eta = 0$$

$\forall\, \varphi \in C_c^\infty([0, T]; \mathbb{R}^d),\ S \subset C([0, T]; \bar{D})$.

Ce n'est pas difficile de montrer que alors, *pour η-presque toute γ*,

$$\int_0^T \Big(\dot\gamma(t) \cdot \dot\varphi(t) - \nabla_x V(\gamma(t), t) \cdot \varphi(t) \Big)\, dt = 0 \qquad \forall\, \varphi \in C_c^\infty.$$

Maintenant, comme dans le cas lisse : cette relation dit que, pour η-presque toute γ,

$$\ddot\gamma(t) = -\nabla_x V(\gamma(t), t) \qquad\qquad \text{au sens distributionnel.}$$

(iii) est prouvé.

Idée de la preuve (6)

On a donc obtenu

$$\int_S \int_0^T \Big(\dot\gamma(t) \cdot \dot\varphi(t) - \nabla_x V(\gamma(t), t) \cdot \varphi(t) \Big) \, dt \, d\eta = 0$$

$\forall \, \varphi \in C_c^\infty([0,T];\mathbb{R}^d), \; S \subset C([0,T];\bar D)$.

Ce n'est pas difficile de montrer que alors, *pour η-presque toute γ*,

$$\int_0^T \Big(\dot\gamma(t) \cdot \dot\varphi(t) - \nabla_x V(\gamma(t), t) \cdot \varphi(t) \Big) \, dt = 0 \qquad \forall \, \varphi \in C_c^\infty.$$

Maintenant, comme dans le cas lisse : cette relation dit que, pour η-presque toute γ,

$$\ddot\gamma(t) = -\nabla_x V(\gamma(t), t) \qquad \text{au sens distributionnel.}$$

(*iii*) est prouvé.

Idée de la preuve (7)

(ii) est facile :

$$\int \int |\ddot{\gamma}(t)|^p \, dt \, d\eta = \int \int |\nabla_x V(x,t)| \, \rho_t(x) \, dx \, dt < +\infty$$

$\Rightarrow$ η-presque toute γ est dans $W^{2,p}$.

La preuve est complète dans le cas sans bord (i.e. $D = \mathbb{T}^d$).

Idée de la preuve (7)

(ii) est facile :

$$\int\int |\ddot{\gamma}(t)|^p \, dt \, d\eta = \int\int |\nabla_x V(x,t)| \, \rho_t(x) \, dx \, dt < +\infty$$

$\Rightarrow$ η-presque toute γ est dans $W^{2,p}$.

La preuve est complète dans le cas sans bord (i.e. $D = \mathbb{T}^d$).

Idée de la preuve (8)

Pour le cas avec bord, il faut un peu plus de travail : $\gamma + \varepsilon\varphi$ pourrait tomber à l'exterieur de D même pour ε petit. On obtient seulement inégalités du type

$$\int_0^T \Big(\dot{\gamma}(t) \cdot \dot{\varphi}(t) - \nabla_x V(\gamma(t), t) \cdot \varphi(t)\Big)\, dt \geq 0.$$

mais on peut s'en sortir à partir de

"une distribution avec signe est une mesure"

plus un petit peu de théorie de la mesure.

Idée de la preuve (8)

Pour le cas avec bord, il faut un peu plus de travail : $\gamma + \varepsilon\varphi$ pourrait tomber à l'exterieur de D même pour ε petit. On obtient seulement inégalités du type

$$\int_0^T \Big(\dot\gamma(t)\cdot\dot\varphi(t) - \nabla_x V(\gamma(t),t)\cdot\varphi(t)\Big)\,dt \geq 0.$$

mais on peut s'en sortir à partir de

"une distribution avec signe est une mesure"

plus un petit peu de théorie de la mesure.

Fonction valeur

On va maintenant analyser les propriétés de la fonction valeur

$$u(x,t) = \inf_{\substack{\gamma \in C([0,t];\bar{D}) \\ \gamma(t)=x}} \Big\{ u_0(\gamma(0)) + A(\gamma) \Big\}.$$

- $V : \bar{D} \times [0,T] \to \mathbb{R}$ et $u_0 : \bar{D} \to \mathbb{R}$ définis *partout*.

Nous disons que $\gamma \in C([0,T];\bar{D})$ est un *minimiseur pour le problème evolutive* si

$$u(\gamma(T),T) = u_0(\gamma(0)) + A(\gamma).$$

Il nous faudra un autre espace de mesures, notamment

$$\mathcal{P}_T^{\lessapprox}(D) = \Big\{ \eta \in \mathcal{P}_T^{\leq}(D) : \mathcal{L}^d \leq C(e_T)_{\#}\eta,\ \exists\, C > 0 \Big\}$$

"compression bornée + dilatation bornée au temps T"

Fonction valeur

On va maintenant analyser les propriétés de la fonction valeur

$$u(x,t) = \inf_{\substack{\gamma \in C([0,t];\bar{D}) \\ \gamma(t)=x}} \Big\{ u_0(\gamma(0)) + A(\gamma) \Big\}.$$

- $V : \bar{D} \times [0,T] \to \mathbb{R}$ et $u_0 : \bar{D} \to \mathbb{R}$ définis *partout*.

Nous disons que $\gamma \in C([0,T];\bar{D})$ est un *minimiseur pour le problème evolutive* si

$$u(\gamma(T),T) = u_0(\gamma(0)) + A(\gamma).$$

Il nous faudra un autre espace de mesures, notamment

$$\mathcal{P}_T^{\lesssim}(D) = \Big\{ \eta \in \mathcal{P}_T^{\leq}(D) : \mathcal{L}^d \leq C(e_T)_{\#}\eta,\ \exists\, C > 0 \Big\}$$

"compression bornée + dilatation bornée au temps T"

Fonction valeur

On va maintenant analyser les propriétés de la fonction valeur

$$u(x,t) = \inf_{\substack{\gamma \in C([0,t];\bar{D}) \\ \gamma(t)=x}} \Big\{ u_0(\gamma(0)) + A(\gamma) \Big\}.$$

- $V : \bar{D} \times [0,T] \to \mathbb{R}$ et $u_0 : \bar{D} \to \mathbb{R}$ définis *partout*.

Nous disons que $\gamma \in C([0,T];\bar{D})$ est un *minimiseur pour le problème evolutive* si

$$u(\gamma(T),T) = u_0(\gamma(0)) + A(\gamma).$$

Il nous faudra un autre espace de mesures, notamment

$$\mathcal{P}_T^{\lesssim}(D) = \Big\{ \eta \in \mathcal{P}_T^{\leq}(D) : \mathcal{L}^d \leq C(e_T)_{\#}\eta,\ \exists\, C > 0 \Big\}$$

“compression bornée + dilatation bornée au temps T”

Fonction valeur

On va maintenant analyser les propriétés de la fonction valeur

$$u(x,t) = \inf_{\substack{\gamma \in C([0,t];\bar{D}) \\ \gamma(t)=x}} \Big\{ u_0(\gamma(0)) + A(\gamma) \Big\}.$$

- $V : \bar{D} \times [0,T] \to \mathbb{R}$ et $u_0 : \bar{D} \to \mathbb{R}$ définis *partout*.

Nous disons que $\gamma \in C([0,T];\bar{D})$ est un *minimiseur pour le problème evolutive* si

$$u(\gamma(T),T) = u_0(\gamma(0)) + A(\gamma).$$

Il nous faudra un autre espace de mesures, notamment

$$\mathcal{P}_T^{\lesssim}(D) = \Big\{ \eta \in \mathcal{P}_T^{\leq}(D) : \mathcal{L}^d \leq C(e_T)_{\#}\eta,\ \exists\, C > 0 \Big\}$$

"compression bornée + dilatation bornée au temps T"

Differentiabilité au prémier ordre

Théoreme

- *D ouvert convexe borné à bord régulier dans $\mathbb{R}^d$ ou bien $D = \mathbb{T}^d$;*
- *u_0 borné inférieurement, V borné supérieurement, $V \in L^p\big([0,T]; W^{1,p}(D)\big), 1 \leq p \leq +\infty$;*
- *il existe $\eta \in \mathcal{P}_T^{\lesssim}(D)$ concentrée sur des minimiseurs pour le problème evolutive.*

Alors,

(i) $\nabla_x u(\cdot, T) \in L^p(D)$ au sens distributionnel. En particulier, si $p > d$, alors $u(\cdot, T)$ est continue grâce aux plongements de Sobolev.

(ii)
$$\nabla_x u(\cdot, T) = \int_{\{\gamma:\gamma(T)=x\}} \dot{\gamma}(T)\, d\eta_{T,x} \qquad \text{pour p.t. } x \in D$$
où $\eta_{T,x}$ est la désintégration de η à travers l'application e_T :
$$\eta = \int_D \eta_{T,x}\, d(e_T)_{\#}\eta(x).$$

Alors,

(i) $\nabla_x u(\cdot, T) \in L^p(D)$ au sens distributionnel. En particulier, si $p > d$, alors $u(\cdot, T)$ est continue grâce aux plongements de Sobolev.

(ii)

$$\nabla_x u(\cdot, T) = \int_{\{\gamma : \gamma(T) = x\}} \dot{\gamma}(T)\, d\eta_{T,x} \qquad \text{pour p.t. } x \in D$$

où $\eta_{T,x}$ est la désintégration de η à travers l'application e_T :

$$\eta = \int_D \eta_{T,x}\, d(e_T)_{\#}\eta(x).$$

Idée de la preuve (1)

Étapes de la preuve (partie (*ii*) seulement)

- $\langle \partial_v u(\cdot, T), \varphi \rangle = -\int u(\cdot, T) \partial_v \varphi \, dx$ pour $v \in \mathbb{R}^d$;
- écrire cela comme une limite de rapports incrementaux de $u(\cdot, T)$;
- passer à un integral en $d\eta$ grâce au fait que $\eta \in \mathcal{P}_T^{\lessapprox}$;
- estimer les rapports incrementaux grâce à

$$u(\gamma(T) + \varepsilon v, T) \leq u_0(\gamma(0)) + A\left(\gamma(\cdot) + \left(\frac{\cdot}{T}\right) \varepsilon v\right) ;$$

  (parce que η est concentrée sur des minimiseurs) ce qui donne un intégrale en $dt \, d\eta$;
- passer à un intégrale en $dt \, dx$ grâce au fait que $\eta \in \mathcal{P}_T^{\lessapprox}$;
- dériver sous le signe d'intégrale grâce aux propriétés des fonctions Sobolev ;
- utiliser $-\nabla_x V = \ddot{\gamma}$ du théorème précédant et intégrer par partie.

Idée de la preuve (1)

Étapes de la preuve (partie (*ii*) seulement)

- $\langle \partial_v u(\cdot, T), \varphi \rangle = -\int u(\cdot, T) \partial_v \varphi \, dx$ pour $v \in \mathbb{R}^d$;
- écrire cela comme une limite de rapports incrementaux de $u(\cdot, T)$;
- passer à un integral en $d\eta$ grâce au fait que $\eta \in \mathcal{P}_T^{\lesssim}$;
- estimer les rapports incrementaux grâce à

$$u(\gamma(T) + \varepsilon v, T) \leq u_0(\gamma(0)) + A\left(\gamma(\cdot) + \left(\frac{\cdot}{T}\right) \varepsilon v\right);$$

  (parce que η est concentrée sur des minimiseurs) ce qui donne un intégrale en $dt \, d\eta$;
- passer à un intégrale en $dt \, dx$ grâce au fait que $\eta \in \mathcal{P}_T^{\lesssim}$;
- dériver sous le signe d'intégrale grâce aux propriétés des fonctions Sobolev ;
- utiliser $-\nabla_x V = \ddot{\gamma}$ du théorème précédant et intégrer par partie.

Idée de la preuve (1)

Étapes de la preuve (partie (ii) seulement)

- $\langle \partial_v u(\cdot, T), \varphi \rangle = -\int u(\cdot, T) \partial_v \varphi \, dx$ pour $v \in \mathbb{R}^d$;
- écrire cela comme une limite de rapports incrementaux de $u(\cdot, T)$;
- passer à un integral en $d\eta$ grâce au fait que $\eta \in \mathcal{P}_T^{\lesssim}$;
- estimer les rapports incrementaux grâce à

$$u(\gamma(T) + \varepsilon v, T) \leq u_0(\gamma(0)) + A\left(\gamma(\cdot) + \left(\frac{\cdot}{T}\right) \varepsilon v\right) ;$$

  (parce que η est concentrée sur des minimiseurs) ce qui donne un intégrale en $dt \, d\eta$;
- passer à un intégrale en $dt \, dx$ grâce au fait que $\eta \in \mathcal{P}_T^{\lesssim}$;
- dériver sous le signe d'intégrale grâce aux propriétés des fonctions Sobolev ;
- utiliser $-\nabla_x V = \ddot{\gamma}$ du théorème précédant et intégrer par partie.

Idée de la preuve (1)

Étapes de la preuve (partie (*ii*) seulement)

- $\langle \partial_v u(\cdot, T), \varphi \rangle = -\int u(\cdot, T) \partial_v \varphi \, dx$ pour $v \in \mathbb{R}^d$;
- écrire cela comme une limite de rapports incrementaux de $u(\cdot, T)$;
- passer à un integral en $d\eta$ grâce au fait que $\eta \in \mathcal{P}_T^{\lesssim}$;
- estimer les rapports incrementaux grâce à

$$u(\gamma(T) + \varepsilon v, T) \leq u_0(\gamma(0)) + A\left(\gamma(\cdot) + \left(\frac{\cdot}{T}\right) \varepsilon v\right);$$

  (parce que η est concentrée sur des minimiseurs) ce qui donne un intégrale en $dt \, d\eta$;
- passer à un intégrale en $dt \, dx$ grâce au fait que $\eta \in \mathcal{P}_T^{\lesssim}$;
- dériver sous le signe d'intégrale grâce aux propriétés des fonctions Sobolev ;
- utiliser $-\nabla_x V = \ddot{\gamma}$ du théorème précédant et intégrer par partie.

Idée de la preuve (1)

Étapes de la preuve (partie (*ii*) seulement)

- $\langle \partial_v u(\cdot, T), \varphi \rangle = -\int u(\cdot, T) \partial_v \varphi \, dx$ pour $v \in \mathbb{R}^d$;
- écrire cela comme une limite de rapports incrementaux de $u(\cdot, T)$;
- passer à un integral en $d\eta$ grâce au fait que $\eta \in \mathcal{P}_T^{\lesssim}$;
- estimer les rapports incrementaux grâce à

$$u(\gamma(T) + \varepsilon v, T) \leq u_0(\gamma(0)) + A\left(\gamma(\cdot) + \left(\frac{\cdot}{T}\right)\varepsilon v\right);$$

  (parce que η est concentrée sur des minimiseurs) ce qui donne un intégrale en $dt \, d\eta$;
- passer à un intégrale en $dt \, dx$ grâce au fait que $\eta \in \mathcal{P}_T^{\lesssim}$;
- dériver sous le signe d'intégrale grâce aux propriétés des fonctions Sobolev ;
- utiliser $-\nabla_x V = \ddot{\gamma}$ du théorème précédant et intégrer par partie.

Idée de la preuve (1)

Étapes de la preuve (partie (*ii*) seulement)

- $\langle \partial_v u(\cdot, T), \varphi \rangle = -\int u(\cdot, T)\partial_v \varphi \, dx$ pour $v \in \mathbb{R}^d$;
- écrire cela comme une limite de rapports incrementaux de $u(\cdot, T)$;
- passer à un integral en $d\eta$ grâce au fait que $\eta \in \mathcal{P}_T^{\lesssim}$;
- estimer les rapports incrementaux grâce à

$$u(\gamma(T) + \varepsilon v, T) \leq u_0(\gamma(0)) + A\left(\gamma(\cdot) + \left(\frac{\cdot}{T}\right)\varepsilon v\right) ;$$

  (parce que η est concentrée sur des minimiseurs) ce qui donne un intégrale en $dt\, d\eta$;
- passer à un intégrale en $dt\, dx$ grâce au fait que $\eta \in \mathcal{P}_T^{\lesssim}$;
- dériver sous le signe d'intégrale grâce aux propriétés des fonctions Sobolev ;
- utiliser $-\nabla_x V = \ddot{\gamma}$ du théorème précédant et intégrer par partie.

Idée de la preuve (1)

Étapes de la preuve (partie (*ii*) seulement)

- $\langle \partial_v u(\cdot, T), \varphi \rangle = -\int u(\cdot, T)\partial_v \varphi \, dx$ pour $v \in \mathbb{R}^d$;
- écrire cela comme une limite de rapports incrementaux de $u(\cdot, T)$;
- passer à un integral en $d\eta$ grâce au fait que $\eta \in \mathcal{P}_T^{\lesssim}$;
- estimer les rapports incrementaux grâce à

$$u(\gamma(T) + \varepsilon v, T) \leq u_0(\gamma(0)) + A\left(\gamma(\cdot) + \left(\frac{\cdot}{T}\right)\varepsilon v\right);$$

  (parce que η est concentrée sur des minimiseurs) ce qui donne un intégrale en $dt \, d\eta$;
- passer à un intégrale en $dt \, dx$ grâce au fait que $\eta \in \mathcal{P}_T^{\lesssim}$;
- dériver sous le signe d'intégrale grâce aux propriétés des fonctions Sobolev ;
- utiliser $-\nabla_x V = \ddot{\gamma}$ du théorème précédant et intégrer par partie.

Idée de la preuve (2)

Après avoir changé v en $-v$, on obtient

$$\langle \partial_v u(\cdot, T), \varphi \rangle = \int \rho_T^{-1}(\gamma(T))\varphi(\gamma(T))\ v \cdot \dot{\gamma}(T)\, d\eta.$$

En desintegrant η à travers e_T, on obtient (ii).

Idée de la preuve (2)

Après avoir changé v en $-v$, on obtient

$$\langle \partial_v u(\cdot, T), \varphi \rangle = \int \rho_T^{-1}(\gamma(T))\varphi(\gamma(T))\; v \cdot \dot{\gamma}(T)\, d\eta.$$

En desintegrant η à travers e_T, on obtient (ii).

Differentiabilité au déuxième ordre

Théoreme

- *D, V, u_0 et η comme dans le théorème précédent ;*
- *$V \in L^p([0,T]; W^{2,p}(D))$, $1 \le p \le +\infty$; Alors, pour chaque $v \in \mathbb{R}^d$, $|v| = 1$, la dérivée distributionnelle seconde $\partial_{vv} u(\cdot, T)$ est une mesure avec partie positive dans L^p.*

Preuve : mêmes idées que pour le résultat précédant.

Les rapports incrementaux pour v et $-v$ au deuxième ordre sont les mêmes $\Rightarrow$ juste inegalité, et juste pour la partie positive.

Differentiabilité au déuxième ordre

Théoreme

- *D, V, u_0 et η comme dans le théorème précédent ;*
- *$V \in L^p([0,T]; W^{2,p}(D))$, $1 \le p \le +\infty$; Alors, pour chaque $v \in \mathbb{R}^d$, $|v| = 1$, la dérivée distributionnelle seconde $\partial_{vv} u(\cdot, T)$ est une mesure avec partie positive dans L^p.*

Preuve : mêmes idées que pour le résultat précédant.

Les rapports incrementaux pour v et $-v$ au deuxième ordre sont les mêmes $\Rightarrow$ juste inegalité, et juste pour la partie positive.

Differentiabilité au déuxième ordre

Théoreme

- *D, V, u_0 et η comme dans le théorème précédent ;*
- *$V \in L^p([0, T]; W^{2,p}(D))$, $1 \leq p \leq +\infty$; Alors, pour chaque $v \in \mathbb{R}^d$, $|v| = 1$, la dérivée distributionnelle seconde $\partial_{vv} u(\cdot, T)$ est une mesure avec partie positive dans L^p.*

Preuve : mêmes idées que pour le résultat précédant.

Les rapports incrementaux pour v et $-v$ au deuxième ordre sont les mêmes $\Rightarrow$ juste inegalité, et juste pour la partie positive.

Solution de viscosité de HJ

Théoreme

- *D, V, u_0 comme dans le théorème précédent ;*
- *u_0 et V continues ;*
- $V \in L^p([0,T]; W^{1,p}(D))$, $p > d$;
- *il existe $\eta \in \mathcal{P}_T^{\approxeq}(D)$ concentrée sur des minimiseurs pour le problème evolutive.*

Ici,

$$\mathcal{P}_T^{\approxeq}(D) = \left\{\eta \in \mathcal{P}_T^{\leq}(D) : \mathcal{L}^d \leq C(e_t)_{\#}\eta \ \forall\, t \in [0,T]\right\}$$

Alors,

(i) *$u(x,t)$ est continue ;*

(ii) *u est sous-solution de viscosité de Hamilton-Jacobi ;*

(iii) *u est super-solution de viscosité de Hamilton-Jacobi $\mathcal{L}^{d+1}$-presque partout.*

Solution de viscosité de HJ

Théoreme

- *D, V, u_0 comme dans le théorème précédent ;*
- *u_0 et V continues ;*
- $V \in L^p([0,T]; W^{1,p}(D))$, $p > d$;
- *il existe $\eta \in \mathcal{P}_T^{\approxeq}(D)$ concentrée sur des minimiseurs pour le problème evolutive.*

Ici,

$$\mathcal{P}_T^{\approxeq}(D) = \left\{ \eta \in \mathcal{P}_T^{\leq}(D) : \mathcal{L}^d \leq C(e_t)_\# \eta \ \forall\, t \in [0,T] \right\}$$

Alors,

(i) *$u(x,t)$ est continue ;*

(ii) *u est sous-solution de viscosité de Hamilton-Jacobi ;*

(iii) *u est super-solution de viscosité de Hamilton-Jacobi $\mathcal{L}^{d+1}$-presque partout.*

Solution de viscosité de HJ

Théoreme

- *D, V, u_0 comme dans le théorème précédent ;*
- *u_0 et V continues ;*
- $V \in L^p([0,T]; W^{1,p}(D))$, $p > d$;
- *il existe $\eta \in \mathcal{P}_T^{\approxeq}(D)$ concentrée sur des minimiseurs pour le problème evolutive.*

Ici,

$$\mathcal{P}_T^{\approxeq}(D) = \left\{ \eta \in \mathcal{P}_T^{\leq}(D) : \mathcal{L}^d \leq C (e_t)_{\#}\eta \ \forall\, t \in [0,T] \right\}$$

Alors,

(i) *$u(x,t)$ est continue ;*

(ii) *u est sous-solution de viscosité de Hamilton-Jacobi ;*

(iii) *u est super-solution de viscosité de Hamilton-Jacobi $\mathcal{L}^{d+1}$-presque partout.*

Solution de viscosité de HJ

Théoreme

- *D, V, u_0 comme dans le théorème précédent ;*
- *u_0 et V continues ;*
- $V \in L^p([0,T]; W^{1,p}(D))$, $p > d$;
- *il existe $\eta \in \mathcal{P}_T^{\approxeq}(D)$ concentrée sur des minimiseurs pour le problème evolutive.*

Ici,

$$\mathcal{P}_T^{\approxeq}(D) = \left\{ \eta \in \mathcal{P}_T^{\leq}(D) : \mathcal{L}^d \leq C(e_t)_{\#}\eta \;\forall\, t \in [0,T] \right\}$$

Alors,

(i) *$u(x,t)$ est continue ;*

(ii) *u est sous-solution de viscosité de Hamilton-Jacobi ;*

(iii) *u est super-solution de viscosité de Hamilton-Jacobi $\mathcal{L}^{d+1}$-presque partout.*

Solution de viscosité de HJ

Théoreme

- *D, V, u_0 comme dans le théorème précédent ;*
- *u_0 et V continues ;*
- $V \in L^p([0,T]; W^{1,p}(D))$, $p > d$;
- *il existe $\eta \in \mathcal{P}_T^{\approx}(D)$ concentrée sur des minimiseurs pour le problème evolutive.*

Ici,

$$\mathcal{P}_T^{\approx}(D) = \left\{ \eta \in \mathcal{P}_T^{\leq}(D) : \mathcal{L}^d \leq C(e_t)_{\#}\eta \ \forall\, t \in [0,T] \right\}$$

Alors,

(i) *$u(x,t)$ est continue ;*

(ii) *u est sous-solution de viscosité de Hamilton-Jacobi ;*

(iii) *u est super-solution de viscosité de Hamilton-Jacobi $\mathcal{L}^{d+1}$-presque partout.*

Idée de la preuve : presque la même que dans le cas lisse.

Pour la partie de super-solution, il faut des courbes minimiseurs C^1 pour $u(x, t)$, mais à priori (d'après le premier résultat sur les équations d'Euler-Lagrange) ceci n'est vrai que pour presque tout (x, t).