

De la cellule au refroidissement de BEG

Philippe Thieullen

Université Bordeaux 1, Institut de Mathématiques

octobre 2010

Le plan de l'exposé

- 1 De Hamilton-Jacobi à Frenkel-Kontorova
- 2 De Frenkel-Kontorova aux systèmes dynamiques
- 3 Refroidissement de Blume-Emery-Griffiths

De Hamilton-Jacobi à Frenkel-Kontorova

Equation de la cellule

- Les hypothèses : $H(x, p)$ lisse, périodique en x , strictement convexe en p . Trouver pour tout P , une fonction périodique $u(x)$ et une constante $\bar{H}(P)$ telles que

$$H(x, du(x) + P) = \bar{H}(P), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

- L'approche théorique : l'approximation ergodique ou pénalisée. Trouver pour tout $\delta > 0$, $u_\delta(x)$ périodique telle que

$$\delta u_\delta(x) + H(x, du_\delta(x) + P) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

- Les résultats classiques :

$$\delta_i u_{\delta_i} \implies -\bar{H}(P), \quad u_{\delta_i} \implies u \quad \text{uniformément.}$$

Equation de la cellule

- Les hypothèses : $H(x, p)$ lisse, périodique en x , strictement convexe en p . Trouver pour tout P , une fonction périodique $u(x)$ et une constante $\bar{H}(P)$ telles que

$$H(x, du(x) + P) = \bar{H}(P), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

- L'approche théorique : l'approximation ergodique ou pénalisée. Trouver pour tout $\delta > 0$, $u_\delta(x)$ périodique telle que

$$\delta u_\delta(x) + H(x, du_\delta(x) + P) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

- Les résultats classiques :

$$\delta_i u_{\delta_i} \implies -\bar{H}(P), \quad u_{\delta_i} \implies u \quad \text{uniformément.}$$

Equation de la cellule

- Les hypothèses : $H(x, p)$ lisse, périodique en x , strictement convexe en p . Trouver pour tout P , une fonction périodique $u(x)$ et une constante $\bar{H}(P)$ telles que

$$H(x, du(x) + P) = \bar{H}(P), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

- L'approche théorique : l'approximation ergodique ou pénalisée. Trouver pour tout $\delta > 0$, $u_\delta(x)$ périodique telle que

$$\delta u_\delta(x) + H(x, du_\delta(x) + P) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

- Les résultats classiques :

$$\delta_i u_{\delta_i} \implies -\bar{H}(P), \quad u_{\delta_i} \implies u \quad \text{uniformément.}$$

Equation de la cellule approchée (1)

- La solution de l'approximation pénalisée est donnée par

$$u_\delta(x) := \inf \left\{ \int_{-\infty}^0 [L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) - P \cdot \dot{\gamma}(s)] e^{-\delta|s|} ds : \right. \\ \left. \gamma \in W^{1,\infty}(\] - \infty, 0\]; \mathbb{R}^d), \gamma(0) = x \right\}$$

$$\delta u_\delta + H(x, du_\delta + P) = 0, \quad L(x, v) := \sup_p \{p \cdot v - H(x, p)\}.$$

- Idée : discrétiser la fonction valeur

$$u_\delta^\tau(x) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \tau [L(x_{-k}, v_{-k}) - P \cdot v_{-k}] (1 - \tau\delta)^k : \right. \\ \left. \underline{v} = (v_{-k})_k \text{ bornée, } x_{-k+1} = x_{-k} + \tau v_{-k}, x_0 = x \right\}$$

Equation de la cellule approchée (1)

- La solution de l'approximation pénalisée est donnée par

$$u_\delta(x) := \inf \left\{ \int_{-\infty}^0 [L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) - P \cdot \dot{\gamma}(s)] e^{-\delta|s|} ds : \right. \\ \left. \gamma \in W^{1,\infty}(\] - \infty, 0\]; \mathbb{R}^d), \gamma(0) = x \right\}$$

$$\delta u_\delta + H(x, du_\delta + P) = 0, \quad L(x, v) := \sup_p \{p \cdot v - H(x, p)\}.$$

- Idée : discrétiser la fonction valeur

$$u_\delta^\tau(x) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \tau [L(x_{-k}, v_{-k}) - P \cdot v_{-k}] (1 - \tau\delta)^k : \right. \\ \left. \underline{v} = (v_{-k})_k \text{ bornée, } x_{-k+1} = x_{-k} + \tau v_{-k}, x_0 = x \right\}$$

Equation de la cellule approchée (2)

- Principe de programmation dynamique discret :

$$\delta u_\delta^\tau(x) + \sup_v \left\{ (1 - \tau\delta) \frac{u_\delta^\tau(x) - u_\delta^\tau(x - \tau v)}{\tau} - L(x, v) + P \cdot v \right\} = 0.$$

- Permet d'obtenir une équation discrétisée de la cellule

$$\sup_v \left\{ \frac{u_\delta^\tau(x) - u_\delta^\tau(x - \tau v)}{\tau} - L(x, v) + P \cdot v \right\} = \bar{H}(P).$$

- Exemple : $H(x, p) := \frac{1}{2}|p|^2 + V(x)$, $L(x, v) = \frac{1}{2}|v|^2 - V(x)$,

$$E(x, y) = \tau^2 L\left(x_k, \frac{y - x}{\tau}\right),$$

$$u(y) = \tau u_\delta^\tau(x), \quad \lambda := \tau P, \quad \bar{E}(\lambda) := -\tau^2 \bar{H}(P),$$

$$V(x) := \frac{-1}{(2\pi)^2} \left(1 - \cos(2\pi x)\right)$$

Equation de la cellule approchée (2)

- Principe de programmation dynamique discret :

$$\delta u_\delta^\tau(x) + \sup_v \left\{ (1 - \tau\delta) \frac{u_\delta^\tau(x) - u_\delta^\tau(x - \tau v)}{\tau} - L(x, v) + P \cdot v \right\} = 0.$$

- Permet d'obtenir une équation discrétisée de la cellule

$$\sup_v \left\{ \frac{u_\delta^\tau(x) - u_\delta^\tau(x - \tau v)}{\tau} - L(x, v) + P \cdot v \right\} = \bar{H}(P).$$

- Exemple : $H(x, p) := \frac{1}{2}|p|^2 + V(x)$, $L(x, v) = \frac{1}{2}|v|^2 - V(x)$,

$$E(x, y) = \tau^2 L\left(x_k, \frac{y - x}{\tau}\right),$$

$$u(y) = \tau u_\delta^\tau(x), \quad \lambda := \tau P, \quad \bar{E}(\lambda) := -\tau^2 \bar{H}(P),$$

$$V(x) := \frac{-1}{(2\pi)^2} \left(1 - \cos(2\pi x)\right)$$

Equation de la cellule approchée (2)

- Principe de programmation dynamique discret :

$$\delta u_\delta^\tau(x) + \sup_v \left\{ (1 - \tau\delta) \frac{u_\delta^\tau(x) - u_\delta^\tau(x - \tau v)}{\tau} - L(x, v) + P \cdot v \right\} = 0.$$

- Permet d'obtenir une équation discrétisée de la cellule

$$\sup_v \left\{ \frac{u_\delta^\tau(x) - u_\delta^\tau(x - \tau v)}{\tau} - L(x, v) + P \cdot v \right\} = \bar{H}(P).$$

- Exemple : $H(x, p) := \frac{1}{2}|p|^2 + V(x)$, $L(x, v) = \frac{1}{2}|v|^2 - V(x)$,

$$E(x, y) = \tau^2 L\left(x_k, \frac{y - x}{\tau}\right),$$

$$u(y) = \tau u_\delta^\tau(x), \quad \lambda := \tau P, \quad \bar{E}(\lambda) := -\tau^2 \bar{H}(P),$$

$$V(x) := \frac{-1}{(2\pi)^2} \left(1 - \cos(2\pi x)\right)$$

Equation de la cellule approchée (3)

- Le problème discrétisé de la cellule revient à résoudre

$$\begin{cases} u(y) + \bar{E}(\lambda) = \min_x \{u(x) + E(x, y) - \lambda \cdot (y - x)\}, & \forall y \in \mathbb{R}^d, \\ u(x) \text{ périodique.} \end{cases}$$

- Dans l'exemple précédent

$$E(x, y) - \lambda \cdot (y - x) = \frac{1}{2}|y - x|^2 + \frac{\tau^2}{(2\pi)^2} (1 - \cos(2\pi x)) + \tau P \cdot (y - x).$$

Equation de la cellule approchée (3)

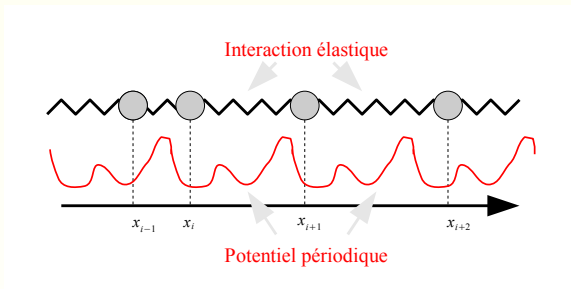
- Le problème discrétisé de la cellule revient à résoudre

$$\begin{cases} u(y) + \bar{E}(\lambda) = \min_x \{u(x) + E(x, y) - \lambda \cdot (y - x)\}, & \forall y \in \mathbb{R}^d, \\ u(x) \text{ périodique.} \end{cases}$$

- Dans l'exemple précédent

$$E(x, y) - \lambda \cdot (y - x) = \frac{1}{2}|y - x|^2 + \frac{\tau^2}{(2\pi)^2} (1 - \cos(2\pi x)) + \tau P \cdot (y - x).$$

Modèle de Frenkel-Kontorova (1)



$$E_0(x, y) = W(x, y) + V(x),$$

$$W(x, y) = \frac{1}{2}|y - x|^2, \quad V(x) = \frac{K}{(2\pi)^2} (1 - \cos(2\pi x))$$

$$E_\lambda(x, y) = E_0(x, y) - \lambda(y - x).$$

Modèle de Frenkel-Kontorova (2)

- Configuration minimisante : $\underline{x} := (\dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k}, \dots)$

$$\begin{cases} E(x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k}) \leq E(y_n, x_{n+1}, \dots, y_{n+k}) \\ \forall \underline{y} \text{ configuration telle que } y_n = x_n \text{ et } y_{n+k} = x_{n+k}. \end{cases}$$

- Configuration calibrée : suppose \underline{x} vérifie

$$\begin{cases} E(x_k, x_{k+1}) = u(x_{k+1}) - u(x_k) + \bar{E}, \\ E(x, y) \geq u(y) - u(x) + \bar{E}, \quad \forall x, y \\ u(x) \text{ est périodique,} \end{cases}$$

alors \underline{x} est fortement minimisante de manière évidente.

Modèle de Frenkel-Kontorova (2)

- Configuration minimisante : $\underline{x} := (\dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k}, \dots)$

$$\begin{cases} E(x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k}) \leq E(y_n, x_{n+1}, \dots, y_{n+k}) \\ \forall \underline{y} \text{ configuration telle que } y_n = x_n \text{ et } y_{n+k} = x_{n+k}. \end{cases}$$

- Configuration calibrée : suppose \underline{x} vérifie

$$\begin{cases} E(x_k, x_{k+1}) = u(x_{k+1}) - u(x_k) + \bar{E}, \\ E(x, y) \geq u(y) - u(x) + \bar{E}, \quad \forall x, y \\ u(x) \text{ est périodique,} \end{cases}$$

alors \underline{x} est fortement minimisante de manière évidente.

Modèle de Frenkel-Kontorova (3)

- On revient au problème : trouver u périodique et \bar{E} tels que

$$\begin{cases} u(y) + \bar{E}(\lambda) = \min_x \{u(x) + E(x, y) - \lambda \cdot (y - x)\}, & \forall y \in \mathbb{R}^d, \\ u(x) \text{ périodique.} \end{cases}$$

- Une théorie d'Aubry-Mather discrete peut être développée dès que

$$E(x, y) \text{ est } C^2,$$

$$E(x + n, y + n) = E(x, y), \forall n \in \mathbb{Z}^d,$$

$$\text{twist : } \frac{\partial^2 E}{\partial x \partial y} < 0,$$

$$E(x, y) \text{ est superlinéaire en } |y - x|.$$

- Questions : forme de l'énergie effective \bar{E} , forme de l'ensemble d'Aubry-Mather ?

Modèle de Frenkel-Kontorova (3)

- On revient au problème : trouver u périodique et \bar{E} tels que

$$\begin{cases} u(y) + \bar{E}(\lambda) = \min_x \{u(x) + E(x, y) - \lambda \cdot (y - x)\}, & \forall y \in \mathbb{R}^d, \\ u(x) \text{ périodique.} \end{cases}$$

- Une théorie d'Aubry-Mather discrete peut être développée dès que

$E(x, y)$ est C^2 ,

$E(x + n, y + n) = E(x, y), \forall n \in \mathbb{Z}^d$,

twist : $\frac{\partial^2 E}{\partial x \partial y} < 0$,

$E(x, y)$ est superlinéaire en $|y - x|$.

- Questions : forme de l'énergie effective \bar{E} , forme de l'ensemble d'Aubry-Mather ?

Modèle de Frenkel-Kontorova (3)

- On revient au problème : trouver u périodique et \bar{E} tels que

$$\begin{cases} u(y) + \bar{E}(\lambda) = \min_x \{u(x) + E(x, y) - \lambda \cdot (y - x)\}, & \forall y \in \mathbb{R}^d, \\ u(x) \text{ périodique.} \end{cases}$$

- Une théorie d'Aubry-Mather discrete peut être développée dès que

$E(x, y)$ est C^2 ,

$E(x + n, y + n) = E(x, y), \forall n \in \mathbb{Z}^d$,

twist : $\frac{\partial^2 E}{\partial x \partial y} < 0$,

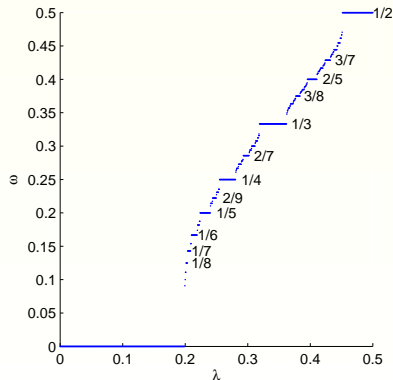
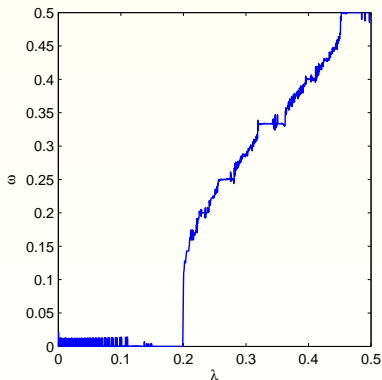
$E(x, y)$ est superlinéaire en $|y - x|$.

- Questions : forme de l'énergie effective \bar{E} , forme de l'ensemble d'Aubry-Mather ?

Frenkel-Kontorova numérique (1)

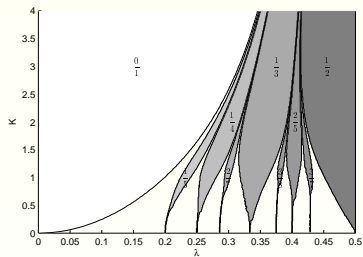
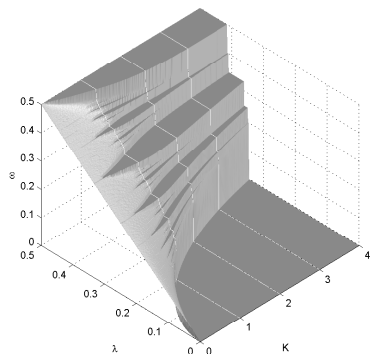
Diagramme de phase de FK selon le nombre de rotation de Aubry-Mather

$$E_{\lambda,K}(x,y) = \frac{1}{2}|y-x|^2 - \lambda(y-x) + \frac{K}{(2\pi)^2}(1 - \cos(2\pi x)).$$



$K = 3$, $\omega = -\frac{\partial E}{\partial \lambda}$, blocage aux nombres de rotation $\omega \in \mathbb{Q}$

Frenkel-Kontorova numérique (2)

Diagramme complet en (λ, K)

Frenkel-Kontorova numérique (3)

- Résoudre l'équation en (u, \bar{E}) revient à chercher un point fixe de Lax-Oleinik discret

$$\begin{cases} T_-[u](y) := \min_x \{u(x) + E(x, y)\}, \\ u + \bar{E} = T_-[u]. \end{cases}$$

- On modifie d'abord T_- par :

$$\tilde{T}_-[u] = T_-[u] - \min T_-[u]$$

- Ishikawa (1976) remarque que : 1) \tilde{T}_- est contractant (au sens large) et 2) \tilde{T}_- préserve un convexe compact dans $C^0(\mathbb{T}^d, \mathbb{R})$. Alors

$$u_{k+1} := \frac{1}{2} \left(u_k + \tilde{T}_-[u_k] \right) \longrightarrow \text{un point fixe de } \tilde{T}_-.$$

- Discrétisation en espace

$$T_{-,N}[u](x_j) := \min_{x_i} \{u(x_i) + E(x_i, x_j)\}, \quad x_i = \frac{i}{N}, \quad i \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^d.$$

Frenkel-Kontorova numérique (3)

- Résoudre l'équation en (u, \bar{E}) revient à chercher un point fixe de Lax-Oleinik discret

$$\begin{cases} T_-[u](y) := \min_x \{u(x) + E(x, y)\}, \\ u + \bar{E} = T_-[u]. \end{cases}$$

- On modifie d'abord T_- par :

$$\tilde{T}_-[u] = T_-[u] - \min T_-[u]$$

- Ishikawa (1976) remarque que : 1) \tilde{T}_- est contractant (au sens large) et 2) \tilde{T}_- préserve un convexe compact dans $C^0(\mathbb{T}^d, \mathbb{R})$. Alors

$$u_{k+1} := \frac{1}{2} \left(u_k + \tilde{T}_-[u_k] \right) \longrightarrow \text{un point fixe de } \tilde{T}_-.$$

- Discrétisation en espace

$$T_{-,N}[u](x_j) := \min_{x_i} \{u(x_i) + E(x_i, x_j)\}, \quad x_i = \frac{i}{N}, \quad i \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^d.$$

Frenkel-Kontorova numérique (3)

- Résoudre l'équation en (u, \bar{E}) revient à chercher un point fixe de Lax-Oleinik discret

$$\begin{cases} T_-[u](y) := \min_x \{u(x) + E(x, y)\}, \\ u + \bar{E} = T_-[u]. \end{cases}$$

- On modifie d'abord T_- par :

$$\tilde{T}_-[u] = T_-[u] - \min T_-[u]$$

- Ishikawa (1976) remarque que : 1) \tilde{T}_- est contractant (au sens large) et 2) \tilde{T}_- préserve un convexe compact dans $C^0(\mathbb{T}^d, \mathbb{R})$. Alors

$$u_{k+1} := \frac{1}{2} \left(u_k + \tilde{T}_-[u_k] \right) \longrightarrow \text{un point fixe de } \tilde{T}_-.$$

- Discrétisation en espace

$$T_{-,N}[u](x_j) := \min_{x_i} \{u(x_i) + E(x_i, x_j)\}, \quad x_i = \frac{i}{N}, \quad i \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^d.$$

Frenkel-Kontorova numérique (3)

- Résoudre l'équation en (u, \bar{E}) revient à chercher un point fixe de Lax-Oleinik discret

$$\begin{cases} T_-[u](y) := \min_x \{u(x) + E(x, y)\}, \\ u + \bar{E} = T_-[u]. \end{cases}$$

- On modifie d'abord T_- par :

$$\tilde{T}_-[u] = T_-[u] - \min T_-[u]$$

- Ishikawa (1976) remarque que : 1) \tilde{T}_- est contractant (au sens large) et 2) \tilde{T}_- préserve un convexe compact dans $C^0(\mathbb{T}^d, \mathbb{R})$. Alors

$$u_{k+1} := \frac{1}{2} \left(u_k + \tilde{T}_-[u_k] \right) \longrightarrow \text{un point fixe de } \tilde{T}_-.$$

- Discrétisation en espace

$$T_{-,N}[u](x_j) := \min_{x_i} \{u(x_i) + E(x_i, x_j)\}, \quad x_i = \frac{i}{N}, \quad i \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^d.$$

De Frenkel-Kontorova aux systèmes dynamiques

Formalisme thermodynamique sur un shift

- La discrétisation de l'équation de la cellule en temps et en espace revient à comprendre le problème

$$\begin{cases} S := \{1, \dots, N\}, & u : S \rightarrow \mathbb{R}, & E : S \times S \rightarrow \mathbb{R}, \\ \bar{E} = \max_u \min_{i,j \in S} \{E(i,j) - u(j) + u(i)\}, & \forall j \in S. \end{cases}$$

- Le problème dual associé

$$\begin{cases} \bar{E} = \min_{\pi} \sum_{i,j} E(i,j) \pi(i,j), \\ \sum_i \pi(i,j) = \sum_i \pi(j,i), \\ \pi(i,j) \geq 0, \quad \sum_{i,j} \pi(i,j) = 1. \end{cases}$$

- On oublie la discrétisation et on introduit :

$\Sigma^+ = S^{\mathbb{N}}$: l'ensemble des suite $x = (x_0, x_1, \dots)$,

$\sigma : \Sigma^+ \rightarrow \Sigma^+$: le décalage à gauche,

$E(x) : \Sigma^+ \rightarrow \mathbb{R}$, ($E(x) = E(x_0, x_1)$ dans le cas précédent).

Formalisme thermodynamique sur un shift

- La discrétisation de l'équation de la cellule en temps et en espace revient à comprendre le problème

$$\begin{cases} S := \{1, \dots, N\}, & u : S \rightarrow \mathbb{R}, & E : S \times S \rightarrow \mathbb{R}, \\ \bar{E} = \max_u \min_{i,j \in S} \{E(i,j) - u(j) + u(i)\}, & \forall j \in S. \end{cases}$$

- Le problème dual associé

$$\begin{cases} \bar{E} = \min_{\pi} \sum_{i,j} E(i,j) \pi(i,j), \\ \sum_i \pi(i,j) = \sum_i \pi(j,i), \\ \pi(i,j) \geq 0, \quad \sum_{i,j} \pi(i,j) = 1. \end{cases}$$

- On oublie la discrétisation et on introduit :

$\Sigma^+ = S^{\mathbb{N}}$: l'ensemble des suite $x = (x_0, x_1, \dots)$,

$\sigma : \Sigma^+ \rightarrow \Sigma^+$: le décalage à gauche,

$E(x) : \Sigma^+ \rightarrow \mathbb{R}$, ($E(x) = E(x_0, x_1)$ dans le cas précédent).

Formalisme thermodynamique sur un shift

- La discrétisation de l'équation de la cellule en temps et en espace revient à comprendre le problème

$$\begin{cases} S := \{1, \dots, N\}, & u : S \rightarrow \mathbb{R}, & E : S \times S \rightarrow \mathbb{R}, \\ \bar{E} = \max_u \min_{i,j \in S} \{E(i,j) - u(j) + u(i)\}, & \forall j \in S. \end{cases}$$

- Le problème dual associé

$$\begin{cases} \bar{E} = \min_{\pi} \sum_{i,j} E(i,j) \pi(i,j), \\ \sum_i \pi(i,j) = \sum_i \pi(j,i), \\ \pi(i,j) \geq 0, \quad \sum_{i,j} \pi(i,j) = 1. \end{cases}$$

- On oublie la discrétisation et on introduit :

$\Sigma^+ = S^{\mathbb{N}}$: l'ensemble des suite $x = (x_0, x_1, \dots)$,

$\sigma : \Sigma^+ \rightarrow \Sigma^+$: le décalage à gauche,

$E(x) : \Sigma^+ \rightarrow \mathbb{R}$, ($E(x) = E(x_0, x_1)$ dans le cas précédent).

Aubry-Mather sur les shift

- $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ un système dynamique, $E : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ Hölder,

$$\bar{E} := \min \left\{ \int E d\mu : \mu \text{ proba invariante par } \sigma \right\},$$

l'énergie effective.

- La barrière de Peierls :

$$h(x, y) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n^\epsilon(x, y),$$

$$S_n^\epsilon(x, y) := \inf_{z, n} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (E - \bar{E}) \circ \sigma^k(z) : d(z, x) < \epsilon \text{ et } d(\sigma^n(z), y) < \epsilon \right\},$$

- L'ensemble d'Aubry

$$\Omega(E) := \{x \in \Sigma : h(x, x) = 0\}.$$

Aubry-Mather sur les shift

- $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ un système dynamique, $E : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ Hölder,

$$\bar{E} := \min \left\{ \int E d\mu : \mu \text{ proba invariante par } \sigma \right\},$$

l'énergie effective.

- La barrière de Peierls :

$$h(x, y) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n^\epsilon(x, y),$$

$$S_n^\epsilon(x, y) := \inf_{z, n} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (E - \bar{E}) \circ \sigma^k(z) : d(z, x) < \epsilon \text{ et } d(\sigma^n(z), y) < \epsilon \right\},$$

- L'ensemble d'Aubry

$$\Omega(E) := \{x \in \Sigma : h(x, x) = 0\}.$$

Aubry-Mather sur les shift

- $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ un système dynamique, $E : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ Hölder,

$$\bar{E} := \min \left\{ \int E d\mu : \mu \text{ proba invariante par } \sigma \right\},$$

l'énergie effective.

- La barrière de Peierls :

$$h(x, y) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n^\epsilon(x, y),$$

$$S_n^\epsilon(x, y) := \inf_{z, n} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (E - \bar{E}) \circ \sigma^k(z) : d(z, x) < \epsilon \text{ et } d(\sigma^n(z), y) < \epsilon \right\},$$

- L'ensemble d'Aubry

$$\Omega(E) := \{x \in \Sigma : h(x, x) = 0\}.$$

Formalisme thermodynamique

- Questions : Comment sélectionner une mesure minimisante ?
- Mesure de Gibbs à température $T = \beta^{-1}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{\beta E}([C_n(x)]) \simeq \exp\left(-\beta \sum_{k=0}^{n-1} E \circ \sigma^k(x) + n \text{Pres}(\beta E)\right), \\ \mu_{\beta E} \text{ est une probabilité } \sigma\text{-invariante,} \\ a_n \simeq b_n \iff \exists C, t.q. C^{-1} \geq a_n/b_n \geq C, \forall n. \end{array} \right.$$

- Résultats simples :

$$\text{Pres}(\beta E) + \beta \bar{E} \rightarrow \text{Ent}(\Omega(E)),$$

Tout point d'accumulation de $\mu_{\beta E}$ est une mesure minimisante d'entropie topologique de $\Omega(E)$ maximale,

A-t-on convergence de $\mu_{\beta E}$?

Formalisme thermodynamique

- Questions : Comment sélectionner une mesure minimisante ?
- Mesure de Gibbs à température $T = \beta^{-1}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{\beta E}([C_n(x)]) \simeq \exp\left(-\beta \sum_{k=0}^{n-1} E \circ \sigma^k(x) + n \text{Pres}(\beta E)\right), \\ \mu_{\beta E} \text{ est une probabilité } \sigma\text{-invariante,} \\ a_n \simeq b_n \iff \exists C, t.q. C^{-1} \geq a_n/b_n \geq C, \forall n. \end{array} \right.$$

- Résultats simples :

$$\text{Pres}(\beta E) + \beta \bar{E} \rightarrow \text{Ent}(\Omega(E)),$$

Tout point d'accumulation de $\mu_{\beta E}$ est une mesure minimisante d'entropie topologique de $\Omega(E)$ maximale,

A-t-on convergence de $\mu_{\beta E}$?

Formalisme thermodynamique

- Questions : Comment sélectionner une mesure minimisante ?
- Mesure de Gibbs à température $T = \beta^{-1}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{\beta E}([C_n(x)]) \simeq \exp\left(-\beta \sum_{k=0}^{n-1} E \circ \sigma^k(x) + n \text{Pres}(\beta E)\right), \\ \mu_{\beta E} \text{ est une probabilité } \sigma\text{-invariante,} \\ a_n \simeq b_n \iff \exists C, t.q. C^{-1} \geq a_n/b_n \geq C, \forall n. \end{array} \right.$$

- Résultats simples :

$$\text{Pres}(\beta E) + \beta \bar{E} \rightarrow \text{Ent}(\Omega(E)),$$

Tout point d'accumulation de $\mu_{\beta E}$ est une mesure minimisante d'entropie topologique de $\Omega(E)$ maximale,

A-t-on convergence de $\mu_{\beta E}$?

Refroidissement d'un système dynamique

- Hypothèse : nombre fini de composantes irréductibles

$$x \sim y \iff h(x, y) + h(y, x) = 0,$$

$$\Omega(E) = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_r,$$

$$\text{Ent}(\Omega_0) > \max_i \text{Ent}(\Omega_i).$$

- L'équation aux valeurs propres de l'opérateur de Ruelle

$$\sum_{x': \sigma(x')=x} e^{-\beta E(x')} \Phi_\beta(x') = e^{\text{Pres}(\beta E)} \Phi_\beta(x), \quad \forall x \in \Sigma^+,$$

$$\Phi_\beta(x) = e^{-\beta u_\beta(x)}, \quad x_0 \in \Omega_0, \quad u_\beta(x_0) = 0,$$

- Théorème :

$$u_\beta(x) \rightarrow u(x) := h(x_0, x), \quad (\text{uniformément en } x),$$

$$u(x) + \bar{E} = \min_{x': \sigma(x')=x} \{u(x') + E(x')\}, \quad \forall x \in \Sigma^+.$$

Refroidissement d'un système dynamique

- Hypothèse : nombre fini de composantes irréductibles

$$x \sim y \iff h(x, y) + h(y, x) = 0,$$

$$\Omega(E) = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_r,$$

$$\text{Ent}(\Omega_0) > \max_i \text{Ent}(\Omega_i).$$

- L'équation aux valeurs propres de l'opérateur de Ruelle

$$\sum_{x': \sigma(x')=x} e^{-\beta E(x')} \Phi_\beta(x') = e^{\text{Pres}(\beta E)} \Phi_\beta(x), \quad \forall x \in \Sigma^+,$$

$$\Phi_\beta(x) = e^{-\beta u_\beta(x)}, \quad x_0 \in \Omega_0, \quad u_\beta(x_0) = 0,$$

- Théorème :

$$u_\beta(x) \rightarrow u(x) := h(x_0, x), \quad (\text{uniformément en } x),$$

$$u(x) + \bar{E} = \min_{x': \sigma(x')=x} \{u(x') + E(x')\}, \quad \forall x \in \Sigma^+.$$

Refroidissement d'un système dynamique

- Hypothèse : nombre fini de composantes irréductibles

$$x \sim y \iff h(x, y) + h(y, x) = 0,$$

$$\Omega(E) = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_r,$$

$$\text{Ent}(\Omega_0) > \max_i \text{Ent}(\Omega_i).$$

- L'équation aux valeurs propres de l'opérateur de Ruelle

$$\sum_{x': \sigma(x')=x} e^{-\beta E(x')} \Phi_\beta(x') = e^{\text{Pres}(\beta E)} \Phi_\beta(x), \quad \forall x \in \Sigma^+,$$

$$\Phi_\beta(x) = e^{-\beta u_\beta(x)}, \quad x_0 \in \Omega_0, \quad u_\beta(x_0) = 0,$$

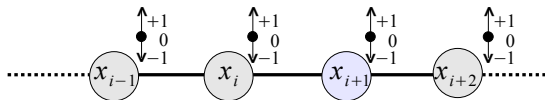
- Théorème :

$$u_\beta(x) \rightarrow u(x) := h(x_0, x), \quad (\text{uniformément en } x),$$

$$u(x) + \bar{E} = \min_{x': \sigma(x')=x} \{u(x') + E(x')\}, \quad \forall x \in \Sigma^+.$$

Refroidissement de Blume-Emery-Griffiths

Le modèle de BEG



- L'énergie d'interaction : $S := \{-1, 0, +1\}$,

$$E(x) = -J \sum_{\langle i,j \rangle} x_i x_j - K \sum_{\langle i,j \rangle} x_i^2 x_j^2 + \Delta \sum_i x_i^2$$

(Les états ± 1 représentent l'atome He^4 , l'état 0 représente He^3 , $J > 0$ pour le cas ferromagnétique).

Mesure de Gibbs de BEG

- Equation de Ruelle :

$$\epsilon = e^{-\beta}, M_\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon^{-J-K+\Delta} & \epsilon^{\frac{1}{2}\Delta} & \epsilon^{J-K+\Delta} \\ \epsilon^{\frac{1}{2}\Delta} & 1 & \epsilon^{\frac{1}{2}\Delta} \\ \epsilon^{J-K+\Delta} & \epsilon^{\frac{1}{2}\Delta} & \epsilon^{-J-K+\Delta} \end{bmatrix}, M_\epsilon R_\epsilon = \lambda_\epsilon R_\epsilon.$$

- Graphe des interactions et cycles minimisants

Moyenne de E le long des cycles simples :

cycles d'ordre 1	$0, (-J - K + \Delta)$
cycles d'ordre 2	$\frac{1}{2}\Delta, (J - K + \Delta)$
cycles d'ordre 3	$\frac{1}{3}(J - K + 2\Delta)$

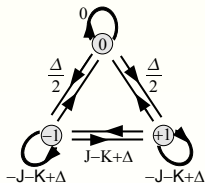
- Une mesure minimisante = mesure invariante supportée par un cycle minimisant.

Mesure de Gibbs de BEG

- Equation de Ruelle :

$$\epsilon = e^{-\beta}, \quad M_\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon^{-J-K+\Delta} & \epsilon^{\frac{1}{2}\Delta} & \epsilon^{J-K+\Delta} \\ \epsilon^{\frac{1}{2}\Delta} & 1 & \epsilon^{\frac{1}{2}\Delta} \\ \epsilon^{J-K+\Delta} & \epsilon^{\frac{1}{2}\Delta} & \epsilon^{-J-K+\Delta} \end{bmatrix}, \quad M_\epsilon R_\epsilon = \lambda_\epsilon R_\epsilon.$$

- Graphe des interactions et cycles minimisants



Moyenne de E le long des cycles simples :

cycles d'ordre 1	$0, (-J - K + \Delta)$
cycles d'ordre 2	$\frac{1}{2}\Delta, (J - K + \Delta)$
cycles d'ordre 3	$\frac{1}{3}(J - K + 2\Delta)$

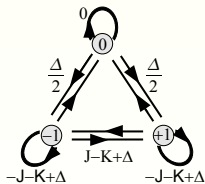
- Une mesure minimisante = mesure invariante supportée par un cycle minimisant.

Mesure de Gibbs de BEG

- Equation de Ruelle :

$$\epsilon = e^{-\beta}, \quad M_\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon^{-J-K+\Delta} & \epsilon^{\frac{1}{2}\Delta} & \epsilon^{J-K+\Delta} \\ \epsilon^{\frac{1}{2}\Delta} & 1 & \epsilon^{\frac{1}{2}\Delta} \\ \epsilon^{J-K+\Delta} & \epsilon^{\frac{1}{2}\Delta} & \epsilon^{-J-K+\Delta} \end{bmatrix}, \quad M_\epsilon R_\epsilon = \lambda_\epsilon R_\epsilon.$$

- Graphe des interactions et cycles minimisants



Moyenne de E le long des cycles simples :

cycles d'ordre 1	$0, (-J - K + \Delta)$
cycles d'ordre 2	$\frac{1}{2}\Delta, (J - K + \Delta)$
cycles d'ordre 3	$\frac{1}{3}(J - K + 2\Delta)$

- Une mesure minimisante = mesure invariante supportée par un cycle minimisant.

Refroidissement de BGE

- Théorème : (Brémont (2003),
Leplaideur (2005), Chazottes-Gambaudo-Ugalde (2010))

$$M_\epsilon R_\epsilon = \lambda_\epsilon R_\epsilon, \quad L_\epsilon M_\epsilon = \lambda_\epsilon L_\epsilon, \quad \sim_i L_\epsilon(i) R_\epsilon(i) = 1,$$

$$\pi_\epsilon(i) = L_\epsilon(i) R_\epsilon(i), \quad Q_\epsilon(i, j) = M_\epsilon(i, j) R_\epsilon(j) / \lambda_\epsilon R_\epsilon(i),$$

mesure de Gibbs $\mu_{\beta E} =$ chaîne de Markov $(\pi_\epsilon, Q_\epsilon)$,

- alors

$$\pi_\epsilon \rightarrow \pi_\infty, \quad Q_\epsilon \rightarrow Q_\infty,$$

$$\mu_{\beta E} \rightarrow \mu_\infty \text{ chaîne de Markov } (\pi_\infty, Q_\infty),$$

il n'y a pas en général unicité des mesures minimisantes

Refroidissement de BGE

- Théorème : (Brémont (2003),
Lepplaideur (2005), Chazottes-Gambaudo-Ugalde (2010))

$$M_\epsilon R_\epsilon = \lambda_\epsilon R_\epsilon, \quad L_\epsilon M_\epsilon = \lambda_\epsilon L_\epsilon, \quad \sim_i L_\epsilon(i) R_\epsilon(i) = 1,$$

$$\pi_\epsilon(i) = L_\epsilon(i) R_\epsilon(i), \quad Q_\epsilon(i, j) = M_\epsilon(i, j) R_\epsilon(j) / \lambda_\epsilon R_\epsilon(i),$$

mesure de Gibbs $\mu_{\beta E} =$ chaîne de Markov $(\pi_\epsilon, Q_\epsilon)$,

- alors

$$\pi_\epsilon \rightarrow \pi_\infty, \quad Q_\epsilon \rightarrow Q_\infty,$$

$$\mu_{\beta E} \rightarrow \mu_\infty \text{ chaîne de Markov } (\pi_\infty, Q_\infty),$$

il n'y a pas en général unicité des mesures minimisantes

Diagramme de phase de BEG à $T = 0$ 