Equation d'Hamilton-Jacobi multitemps et théorie d'Aubry-Mather pour hamiltoniens en involution

biblio :

Barles Tourin 2001

Motta Rampazzo 2006

Cardin Viterbo 2008

Maderna 2002

Bernard 2007

Sorrentino 2009

Cui - Li 2009

Z. 2010

problème

Hamilton Jacobi multitemps:

Soit H et G deux hamiltoniens et u_0 une fonction. Existe-t-il une solution de : $u(t_1, t_2, x)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t_1} + H(x, d_x u) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t_2} + G(x, d_x u) = 0 \\ u(0,0,x) = u_0(x) \end{cases} \qquad (MTHJ)$$

Théorie d'A.M. pour hamiltoniens en involution.

Quels sont les liens entre les théories d'A.M pour H et G, deux hamiltoniens qui commutent.

Cadre

M sera une variété lisse, compacte sans bord.

Un hamiltonien $H : T^*M \longrightarrow \mathbb{R}$ est de type Tonelli si il vérifie :

1. H est C^2.
2. stricte convexité :

$$\forall (x,p) \in T^*M, \ \frac{\partial^2 H}{\partial p^2}(x,p) > 0 .$$

3. superlinéarité :

$$\forall k \in \mathbb{R}, \ \exists c(k) \in \mathbb{R}, \ \forall (x,p) \in T^*M, \ H(x,p) \geq k\|p\| + c(k)$$

Les hamiltoniens considérés sont Tonelli.

Cadre symplectique

Forme de Liouville : c'est une 1-forme sur T^*M : $\lambda = p\,dx$ c'est à dire

$$\forall (x,p,X,P) \in TT^*M, \quad \lambda_{(x,p)}(X,P) = p(X).$$

Forme symplectique : $\Omega = -d\lambda$.

Elle est non dégénérée donc on peut définir le

champs de vecteur hamiltonien par

$$\Omega(X_H, \cdot) = -dH.$$

On note Φ_H son flot.

Lagrangien et dualité.

On définit $L_H : TM \to \mathbb{R}$ par

$$L_H(x,v) = \sup_p \; p(v) - H(x,p)$$

L_H est strictement convexe dans les fibres et super-linéaire.

On a : $H\left(x, \frac{\partial L}{\partial v}(x,v)\right) = \frac{\partial L}{\partial v}(x,v)\cdot v - L(x,v)$

Transformée de Legendre :

$$\mathcal{L}_H : TM \to T^*M$$

$$(x,v) \longmapsto \left(x, \frac{\partial L}{\partial v}(x,v)\right)$$

c'est un difféomorphisme.

Flot d'Euler-Lagrange :

$\varphi_H = \mathcal{L}_H^{-1} \circ \Phi_H \circ \mathcal{L}_H$.

C'est le flot des minimiseurs.

Fonctionnelles d'actio et valeur critique

Si $t \geq 0$, on pose $h_H^t(x,y) = \inf\limits_{\substack{\gamma(0)=x \\ \gamma(t)=y}} \int_0^t L_H(\gamma(s),\dot\gamma(s))\,ds$

rem: L'infimum est atteint par une trajectoire de φ_H : $(\gamma(s),\dot\gamma(s)) = \varphi_H^s(x,v) = \mathcal{L}_H^{-1}(\Phi_H^s(x,p))$

et on a alors $h_H^t(x,y) = \int_{s \to \Phi_H^s(x,p)} (\lambda - H) = \int_{s \to \Phi_H^s(x,p)} \lambda \; - tH(x,p)$.

Déf : La constate critique c_H est l'unique constante c telle que la fonction

$$h_H : (x,y) \longmapsto \liminf_{t \to +\infty} h_H^t(x,y) + ct$$

est finie.

La fonction h obtenue est la barrière de Peierls.

On supposera $\boxed{c_H = 0.}$

Semi groupe de Lax-Oleinik propriétés de différentiabilité

Soit $u \in \mathcal{C}^0(M, \mathbb{R})$ et $t > 0$.

On définit $T_H^{-t} u(x) = \inf_y u(y) + h_H^t(y,x)$.

prop : $(T_H^{-t})_{t \geq 0}$ est un semi-groupe.

Si $t \geq 0$, T_H^{-t} est contractant pour $\|\cdot\|_\infty$.

Th : • La fonction h^t_H est loc. semi-concave pour $t > 0$.

Les fonctions $T_H^{-t}(C^0(M, \mathbb{R}))$ sont equi loc. semi-concaves

• Si $\frac{\partial h_H^t}{\partial x}(x,y)$ existe ($\Leftrightarrow \frac{\partial h_H^t}{\partial y}(x,y)$ existe) alors la courbe réalisant l'inf. est, $\forall s \in [0,t]$:

$$(\gamma(s), \dot\gamma(s)) = \mathcal{L}_H^{-1}\left(\Phi_H^{s-t}\left(y, \frac{\partial h_H^t}{\partial y}(x,y)\right)\right) = \mathcal{L}_H^{-1}\left(\Phi_H^{s}\left(x, -\frac{\partial h_H^t}{\partial x}(x,y)\right)\right).$$

• Si $d_x T^{-t} u$ existe, la courbe réalisant l'infimum est : $\forall s \in [0,t]$, $(\gamma(s), \dot\gamma(s)) = \mathcal{L}_H^{-1}\left(\Phi_H^{s-t}\left(x, d_x T^{-t} u\right)\right)$

Crochet de Poisson :

Déf : Soit H et G deux hamiltoniens, on définit

$$\{G, H\} = \Omega(X_G, X_H) = \frac{\partial G}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial p}$$

On dit que H et G commutent ou qu'ils sont en involution si $\{G, H\} \equiv 0$.

prop : • $X_{\{G,H\}} = [X_G, X_H]$. En particulier,

$\{G, H\} \equiv 0 \Longrightarrow \Phi_G$ et Φ_H commutent.

• $\{G, H\} = 0 \Longleftrightarrow -dG \cdot X_H \equiv 0$

$\Longleftrightarrow$ G est cst. sur les trajectoires de Φ_H

$\Longleftrightarrow dH \cdot X_G = 0$

$\Longleftrightarrow$ H est cst. sur les trajectoires de Φ_G.

retour sur l'équation multi temps.

Question : Pour tout $u_0 \in W^{1,\infty}(M, \mathbb{R})$, existe-t-il $u : \mathbb{R}^2 \times M \to \mathbb{R}$ /

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t_1} + G(x, d_x u) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t_2} + H(x, d_x u) = 0 \\ u(0,0,x) = 0. \end{cases}$$

Condition nécessaire : $\{G, H\} = 0$.

Condition suffisante : il faut vérifier que

T_H^- et T_G^- commutent, ie

$$\forall s,t \geq 0, \forall u_0, \forall x, \inf_{z \in M} \inf_{y \in M} u(z) + h_H^t(z,y) + h_G^s(y,x)$$

$$= \inf_{z \in M} \inf_{y \in M} u(z) + h_G^s(z,y) + h_H^t(y,x)$$

Donc il suffit de montrer le

Lemme : $\forall (x,z) \in M^2$, $\inf_{y \in M} h_G^s(x,y) + h_H^t(y,z)$ $(*)$

$$= \inf_{y \in M} h_H^t(x,y) + h_G^s(y,z).$$

preuve 1

Soit y_0 verifiant l'infimum dans $\circledast$

par semi-concavité on a

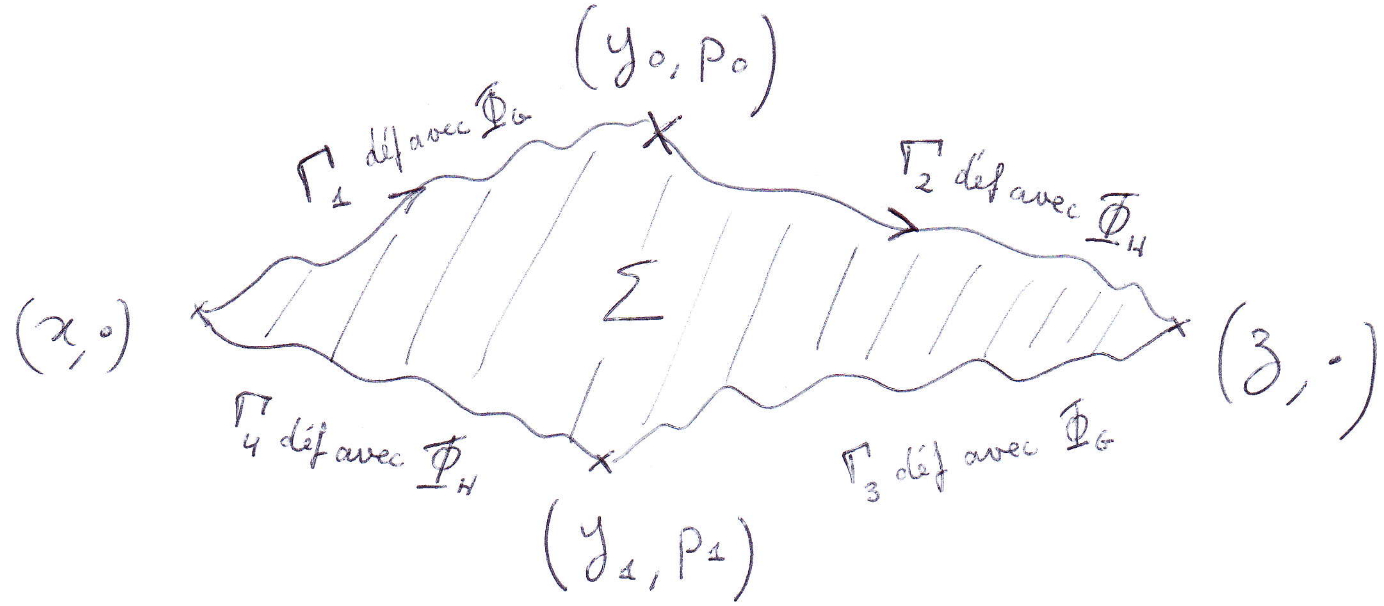
$$\frac{\partial h_G^s}{\partial y}(x, y_0) = - \frac{\partial h_H^t}{\partial x}(y_0, z) = p_0$$

existent et on connaît les courbes réalisant $h_G^s(x, y_0)$ et $h_H^t(y_0, z)$:

pour $h_G^s(x, y_0)$; $\Gamma_1 : \sigma \longmapsto \Phi_G^\sigma(y_0, p_0)$, $\sigma \in [-s, 0]$

pour $h_H^t(y_0, z)$; $\Gamma_2 : \sigma \longmapsto \Phi_H^\sigma(y_0, p_0)$, $\sigma \in [0, t]$

preuve 2



On pose $(y_1, p_1) = \Phi_H^t \circ \Phi_G^{-s}(y_0, p_0)$

$$\Gamma_3 : \sigma \longmapsto \Phi_G^{\sigma}(y_1, p_1), \ \sigma \in [0, s]$$

$$\Gamma_4 : \sigma \longmapsto \Phi_H^{\sigma}(y_1, p_1), \ \sigma \in [-t, 0]$$

$$\Sigma : (\sigma, \sigma') \longmapsto \Phi_G^{\sigma} \circ \Phi_H^{\sigma'}(y_0, p_0),$$

$$(\sigma, \sigma') \in [-s, 0] \times [0, t]$$

On veut calculer

$$\int_{\Gamma_1}(\lambda - G) + \int_{\Gamma_2}(\lambda - H) - \int_{\Gamma_3}(\lambda - G) - \int_{\Gamma_4}(\lambda - H).$$

$$* \int_{\Gamma_1}\lambda + \int_{\Gamma_2}\lambda - \int_{\Gamma_3}\lambda - \int_{\Gamma_4}\lambda = \int_{\Gamma_1 * \Gamma_2 * \overline{\Gamma_3} * \overline{\Gamma_4}} \lambda$$

$$\overset{\text{Stokes}}{=} \int_{\Sigma} -\Omega \overset{\{H,G\}=0}{=} 0$$

$$* \int_{\Gamma_1} G = \int_{\Gamma_3} G = s\, G(y_0, p_0)$$

$$\int_{\Gamma_2} H = \int_{\Gamma_4} H = t\, H(y_0, p_0)$$

Solutions KAM faible

Déf une fonction $u : M \to \mathbb{R}$ est une solution KAM faible pour G si

$\forall t \geq 0, \quad u = T_G^{-t} u.$

On note $\mathcal{S}_G^-$ l'ensemble des solutions KAM faible pour G.

u est une sous-solution si $t \mapsto T_G^{-t} u \nearrow$.

Th : $\mathcal{S}_G^- = \mathcal{S}_H^-$

Plan de preuve.

I Solution commune

$$\mathcal{S}_H^- \cap \mathcal{S}_G^- \neq \emptyset$$

II Soit $u \in \mathcal{S}_H^-$, $x \in \mathcal{M}_H$

$t \longmapsto T_G^{-t} u(x)$ est constante

III $\mathcal{S}_H^- = \mathcal{S}_G^-$.

I

<u>lemme</u> : Si $u \in \mathcal{S}_H^-$ alors $T_G^{-t} u \in \mathcal{S}_H^-$

<u>preuve</u> : $T_H^{-s} T_G^{-t} u = T_G^{-t} T_H^{-s} u = 0$.

<u>Th</u> (Fathi) : Soit $u : M \to \mathbb{R}$ alors $T_G^{-t} u \underset{t \to +\infty}{\rightrightarrows} u_\infty \in \mathcal{S}_G^-$

On part de $u \in \mathcal{S}_H^-$.

Soit $u_\infty = \lim\limits_{t \to +\infty} T_G^{-t} u$.

$u_\infty \in \mathcal{S}_G^-$ et $u_\infty \in \mathcal{S}_H^-$ ($\mathcal{S}_H^-$ est fermé)

I bis.

__lemme__ : Soit u sous-solution pour H alors $T_G^{-t} u$ est sous-solution pour H.

__preuve__ : Monotonie de T_G^{-t}.

__Th__ (De Marr) : Soit B un espace de Banach, $(f_a)_{a \in A}$ une famille de fonctions contractantes qui commutent et qui préservent un compact convexe C. Alors les f_a ont un point fixe commun.

Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des sous-solutions de H.

$\mathcal{H} / \mathbb{R} \mathbb{1}_M \subset C^0(M, \mathbb{R}) / \mathbb{R} \mathbb{1}_M$ est compact, convexe et stable par les semi-groupes T_G^- et T_H^-.

II.

Soit $u_H \in \mathcal{S}^-_H$.

Déf : L'ensemble de Mather

$$\mathcal{M}^*_H = \mathcal{L}_H\left(\bigcup_{\mu} \operatorname{supp}\mu\right)$$

μ minimisant $\int L\, d\mu$ parmi les mesures de proba invariantes par φ_H.

$$\mathcal{M}_H = \pi\, \mathcal{M}^*_H \subset M$$

Th : - $\mathcal{M}^*_H$ est un graphe audessus de $\mathcal{M}_H$.

- si $(x,p) \in \mathcal{M}^*_H$ et $u \in \mathcal{S}^-_H$ alors u est differentiable en x et $d_x u = p$.

- si $u_1, u_2 \in \mathcal{S}^-_H$ et $u_1|_{\mathcal{M}_H} = u_2|_{\mathcal{M}_H}$ alors

$$u_1 = u_2.$$

- (Bernard) $\mathcal{M}^*_H$ est invariant par Φ_G et Φ_H.

Soit $u_0 \in \mathcal{S}_H^- \cap \mathcal{S}_G^-$, $u \in \mathcal{S}_H^-$.

$(x,p) \in \mathcal{M}_H^*$ et on définit

$\forall t \in \mathbb{R}$, $(x(t), p(t)) = \Phi_G^t(x,p) \in \mathcal{M}_H^*$

$\forall s \geq 0$, $\quad v_s = T_G^{-s} u - T_G^{-s} u_0 = T_G^{-s} u - u_0$.

On a $\forall s \geq 0$, $v_s(x) = u(x(-s)) + \int_{-s}^{0} L(x(\sigma), \dot{x}(\sigma))\, d\sigma$

$$- u_0(x(-s)) - \int_{-s}^{0} L(x(\sigma), \dot{x}(\sigma))\, d\sigma$$

$$= u(x(-s)) - u_0(x(-s)) = v_0(x(-s))$$

Comme $x(-s) \in \mathcal{M}_H$, $d_{x(-s)}(u - u_0) = 0$ $\forall s$.

Donc $s \mapsto v_0(x(-s))$ est constante.

Conclusion : $T_G^{-s} u(x) - T^{-s} u_0(x) = u(x) - u_0(x)$.

Donc $T_G^{-s} u(x) = u(x)$.

Fin

Pour tout $s \geq 0$,

$$u,\ T_G^{-s} u \in \mathcal{S}_H^-.$$

$$u_{|\mathcal{B}_H} = T_G^{-s} u_{|\mathcal{B}_H}$$

Donc $u = T_G^{-s} u$

et finalement $u \in \mathcal{S}_G^-$.

On a donc prouvé que $\mathcal{S}_H^- \subset \mathcal{S}_G^-$

et donc $\mathcal{S}_H^- = \mathcal{S}_G^-$.

Quelques résultats pour finir

Les ensembles d'Aubry coïncident : $\mathcal{A}^*_H = \mathcal{A}^*_G$

Les barrières de Peierls coïncident : $h_H = h_G$

(Davini, Z.) Il existe une sous solution commune à H et G, stricte en dehors de $\mathcal{A}^*_H = \mathcal{A}^*_G$ et $C^{1,1}$.