

Examen M2-EDPMAD
Contrôle Optimal

1 EXERCICE DE CULTURE GÉNÉRALE

Soit (X, d) un espace métrique compact. Montrer que la distance est bornée, c'est à dire qu'il existe une constante C telle que $d(x, y) \leq C$ pour tous x et y dans X .

2 EXEMPLE DE PROBLÈME DE CONTRÔLE

Dans une termitière, la reine pond des oeufs, qui peuvent être des oeufs de reines, ou des oeufs d'ouvrières. On note $r(t)$ le nombre de reines (mais c'est un nombre réel) et $w(t)$ le nombre d'ouvrières. Le but est, à la fin de la saison, c'est à dire au temps T , qu'il y ait le nombre maximum de reines. Les équations d'évolution sont

$$\dot{r}(t) = au(t) - f(w(t))r(t)$$

$$\dot{w}(t) = b(1 - u(t)),$$

où a et b sont des paramètres réels positifs, $f : [0, \infty) \rightarrow]0, \infty)$ est une fonction lisse décroissante, et $u(t) \in [0, 1]$ est le paramètre de contrôle. Le terme $f(w(t))r(t)$ modélise le fait que les reines ont besoin d'ouvrières pour survivre, et qu'elles disparaissent à un rythme d'autant plus élevé qu'il y a moins d'ouvrières. Le paramètre $u(t)$ décrit la répartition à l'instant t entre la création de reines et la création d'ouvrières. Lorsque $u = 0$, seules des ouvrières sont créées, et lorsque $u = 1$ seules des reines.

On cherche à déterminer le choix de $u(t)$ qui maximise le nombre final de reines $r(0)$. On suppose qu'il n'y a initialement, ni reines (sauf celle qui pond) ni ouvrières, c'est à dire que $r(-T) = w(-T) = 0$.

On utilisera, pour les questions qui suivent, le principe du maximum.

2.1 Soit $(u(t), r(t), w(t))$ une courbe optimale. Montrer qu'il existe $(W(t), R(t)) : [-T, 0] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tel que

$$R(0) = 1, W(0) = 0,$$

$$\dot{R}(t) = f(w(t))R(t); \quad \dot{W}(t) = f'(w(t))R(t)r(t),$$

et que $u(t) = 0$ lorsque $aR < bW$, et $u(t) = 1$ lorsque $aR > bW$.

2.2 Sans calculs explicites, montrer qu'il existe un temps intermédiaire $-\tau \in [-T, 0]$ tel que $u = 1$ sur $]-\tau, 0]$ et $u = 0$ sur $[-T, -\tau[$.

2.3 Montrer que $w(-\tau) = b(T - \tau)$ et que $r(-\tau) = 0$.

2.4 Calculer les fonctions $r(t), w(t), R(t), W(t)$ sur $[-\tau, 0]$, en déduire que τ vérifie l'équation :

$$e^{-f(b(T-\tau)\tau)} = b \frac{f'(b(T-\tau))}{f(b(T-\tau))} \left(\frac{e^{-f(b(T-\tau)\tau)} - 1}{f(b(T-\tau))} - \tau e^{-f(b(T-\tau)\tau)} \right)$$

2.5 En utilisant la méthode des fonctions de vérification, montrer que la valeur (c'est à dire la valeur de $-r(0)$) associée à une condition initiale (s, r, w) vérifiant

$$b \left(\frac{af'(w)}{f^2(w)} (1 - e^{-f(w)s}) + (r - a/f(w))f'(w)s \right) < a$$

est

$$V(s, r, w) = -\frac{a}{f(w)} + \left(\frac{a}{f(w)} - r \right) e^{f(w)s}$$

et que la strategie optimale est $u \equiv 1$ sur $[s, 0]$.