

RÉCUPÉRATION D'UN COEFFICIENT DU SYSTÈME DE LA VISCOÉLASTICITÉ. APPLICATION EN IMAGERIE MÉDICALE.

Maya de Buhan

Laboratoire Jacques-Louis Lions
Université Pierre et Marie Curie, Paris, France

Departamento de Ingeniería Matemática
Universidad de Chile, Santiago, Chili

ABSTRACT

Nous considérons le système de la viscoélasticité linéaire. Nous démontrons un résultat de stabilité pour le problème inverse de récupération d'un coefficient viscoélastique à partir d'une unique mesure interne. Nous proposons une méthode pour résoudre le problème numériquement et présentons une application possible à la détection de tumeurs cérébrales.

1. PROBLEMES DIRECT ET INVERSE

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^3 de frontière lipschitzienne $\partial\Omega$. Nous considérons le système suivant, muni de conditions initiales et aux bords adéquates :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{P}u(x, t) = f(x, t), & \forall (x, t) \in \Omega \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = \bar{u}_0(x), & \forall x \in \Omega, \\ \partial_t u(x, 0) = \bar{u}_1(x), & \forall x \in \Omega, \\ u(x, t) = 0, & \forall (x, t) \in \partial\Omega \times (0, +\infty), \end{array} \right.$$

où \mathcal{P} est l'opérateur hyperbolique intégro-différentiel suivant :

$$\mathcal{P}u = \partial_t^2 u - \nabla \cdot (\mu(\nabla u + \nabla u^T) + \lambda(\nabla \cdot u)I) + \int_0^t \nabla \cdot (\tilde{\mu}(t-s)(\nabla u(s) + \nabla u(s)^T) + \tilde{\lambda}(t-s)(\nabla \cdot u(s)I)) ds.$$

Ce système modélise la dynamique d'un matériau viscoélastique soumis à un chargement extérieur f , u étant le vecteur déplacement, (λ, μ) les coefficients de Lamé et $(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$ les coefficients de viscosité. Nous supposons que le coefficient $\tilde{\mu}$ peut se décomposer en

$$\tilde{\mu}(x, t) = p(x)h(t), \quad \forall (x, t) \in \Omega \times (0, +\infty).$$

Alors, connaissant $(\lambda, \mu, \tilde{\lambda}, h, \bar{u}_0, \bar{u}_1, f)$, nous souhaitons récupérer $p(x)$, $\forall x \in \Omega$, à partir de mesures de

$$u(x, t), \quad \forall (x, t) \in \omega \times (0, T),$$

où ω est une partie Ω et $T > 0$.

2. ESTIMATION DE STABILITÉ [1]

En s'inspirant de méthodes proposées par [3] et [4], nous démontrons une inégalité de Carleman pour l'opérateur \mathcal{P} . Nous utilisons cette inégalité pour obtenir une estimation de stabilité höldérienne pour le problème inverse de récupération d'un coefficient viscoélastique à partir d'une unique mesure interne.

3. MÉTHODE NUMÉRIQUE [2]

Pour résoudre le problème numériquement, nous proposons une fonctionnelle non quadratique que nous minimisons par un algorithme BFGS. Nous cherchons le coefficient inconnu dans une base spectrale que nous adaptons en fréquence à la solution. Cette idée, combinée à une adaptation de maillage, permet de diminuer l'erreur.

4. APPLICATION EN IMAGERIE MÉDICALE

Nous illustrons la méthode par un exemple biomédical. En effet, le système de la viscoélasticité modélise, d'une manière simplifiée, le comportement mécanique des tissus mous tels que le tissu cérébral. La résolution numérique permet de retrouver le coefficient en chaque point du domaine. En particulier, elle permettrait de récupérer la position d'une tumeur.

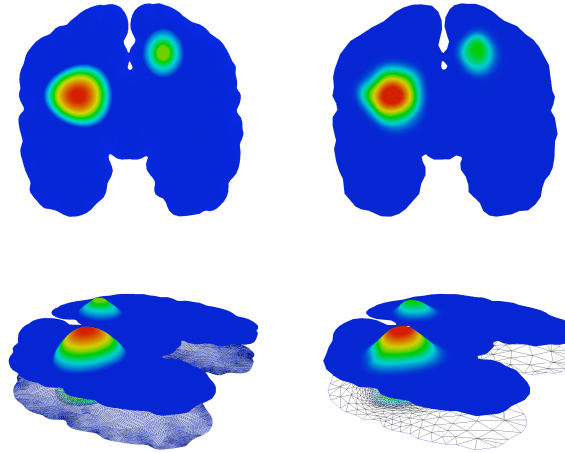


Fig 5. Coefficient exact (à gauche). Coefficient récupéré (à droite).

5. REFERENCES

- [1] M. DE BUHAN, A. OSSES: *Un résultat de stabilité pour la récupération d'un paramètre du système de la viscoélasticité 3D*. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347, pp. 1373-1378, (2009).
- [2] M. DE BUHAN, A. OSSES: *Logarithmic stability in determination of a 3D viscoelastic coefficient and a numerical example*. Inverse Problems, vol. 26, 095006 (2010).
- [3] M. BELLASSOUED, O. IMANUVILOV, M. YAMAMOTO: *Inverse problem of determining the density and the Lamé coefficients by boundary data*. SIAM J. Math. Anal., vol. 40, pp. 238-265, (2008).
- [4] A. LORENZI, F. MESSINA, V.G. ROMANOV: *Recovering a Lamé kernel in a viscoelastic system*. Applicable Analysis, vol. 86:11, pp. 1375-1395, (2007).