

Imagerie par onde transitoire en vue limitée

H. Ammari, M. Asch, L. Guadarrama Bustos, V. Jugnon,
H. Kang



27 septembre 2010

Plan

- 1 Onde transitoire en imagerie médicale
- 2 Une approche utilisant le contrôle géométrique
 - Motivation
 - Hilbert Uniqueness Method
 - Considérations numériques
- 3 Quelques résultats numériques
- 4 Conclusion

- développement de l'imagerie multi-physique.
- génération d'ondes acoustiques par une onde auxiliaire (photo-acoustique, magneto-acoustique, force de radiation).
- combinaison de la résolution liée à la nature acoustique des ondes et du contraste lié à l'onde auxiliaire.

Equation des ondes scalaires sur un domaine borné
 $(\Omega \subset \mathbb{R}^d) \times (0, T)$:

$$\frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(x, t) - \Delta p(x, t) = 0$$

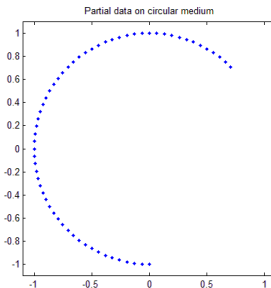
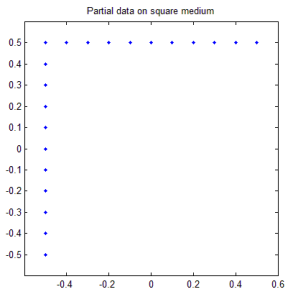
avec les conditions initiales :

$$p(x, 0) = p_0(x) \quad \frac{\partial p}{\partial t}(x, 0) = p_1(x)$$

dépendant de l'interaction du milieu avec la première onde.
 p_0, p_1 contiennent l'information.

- dans l'espace libre homogène avec vue complète, on peut relier les mesures au bord et les C.I. par des transformations explicites exactes.
- prise en compte :
 - de conditions au bord.
 - de limitation dans l'acquisition des données.

Dans certaines expériences, on ne peut obtenir les mesures que sur une partie du bord $\Gamma_c \subset \partial\Omega$.



Le problème inverse

On considère l'équation des ondes :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(x, t) - c^2 \Delta p(x, t) = 0 \\ p(x, 0) = p_0(x) \quad \frac{\partial p}{\partial t}(x, 0) = p_1(x) \\ p(x, 0) = 0 \quad x \in \partial\Omega \end{cases}$$

On veut reconstruire p_0, p_1 à partir des mesures :

$$\frac{\partial p}{\partial \nu}(x, t) \quad x \in \Gamma_c.$$

Intérêt pour l'imagerie d'obtenir des données du type :

$$M(v_0, v_1) = \int_{\Omega} p_0(x)v_1(x) - p_1(x)v_0(x)dx$$

à partir des mesures pour v_0, v_1 choisis.

Intérêt pour l'imagerie d'obtenir des données du type :

$$M(v_0, v_1) = \int_{\Omega} \rho_0(x)v_1(x) - \rho_1(x)v_0(x)dx$$

à partir des mesures pour v_0, v_1 choisis.

- possibilité d'obtenir les transformations intégrales de ρ_0, ρ_1 .
- possibilité de "simuler" à partir des données des expériences en vue complète.

Formulation du problème de contrôle

Si on peut trouver g_{v_0, v_1} tel que v solution de :

$$\begin{cases} \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x, t) - \Delta v(x, t) = 0 \\ v(x, 0) = v_0(x), \quad \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = v_1(x) \\ v(y, t) = 0 \quad y \in \partial\Omega \setminus \Gamma_c \\ v(y, t) = g_{v_0, v_1}(y, t) \quad y \in \Gamma_c \end{cases} \quad (1)$$

s'annule au temps T :

$$v(x, T) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t}(x, T) = 0$$

Formulation du problème de contrôle

Si on peut trouver g_{v_0, v_1} tel que v solution de :

$$\begin{cases} \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x, t) - \Delta v(x, t) = 0 \\ v(x, 0) = v_0(x), \quad \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = v_1(x) \\ v(y, t) = 0 \quad y \in \partial\Omega \setminus \Gamma_c \\ v(y, t) = g_{v_0, v_1}(y, t) \quad y \in \Gamma_c \end{cases} \quad (1)$$

s'annule au temps T :

$$v(x, T) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t}(x, T) = 0$$

alors on a accès à l'information recherchée :

$$\int_0^T \int_{\Gamma_c} g_{v_0, v_1}(y, t) \frac{\partial p}{\partial \nu}(y, t) d\sigma(y) dt = M(v_0, v_1)$$

Un tel contrôle existe :

Théorème J.L. Lions

Si T et Γ_c sont "suffisamment grands", quelques soient $(v_0, v_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, il existe un contrôle g_{v_0, v_1} solution du problème précédent.

+ preuve constructive.

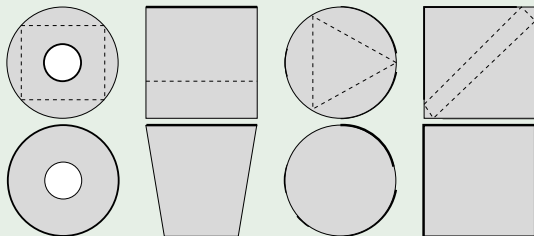
”Suffisamment grands” ?

Théoreme Bardos, Lebeau, Rauch

Tout rayon de l’optique géométrique, partant d’un point $x \in \Omega$, au temps $t = 0$, doit atteindre Γ_c avant le temps T .

⇒ Pas de rayons piégés.

Géométries incontrôlables et contrôlables



Soient $(e_0, e_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. On résout :

$$\begin{cases} \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(x, t) - \Delta \phi(x, t) = 0 \\ \phi(x, 0) = e_0(x), \quad \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, 0) = e_1(x) \\ \phi(y, t) = 0 \quad y \in \partial\Omega \end{cases}$$

Soient $(e_0, e_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. On résout :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(x, t) - \Delta \phi(x, t) = 0 \\ \phi(x, 0) = e_0(x), \quad \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, 0) = e_1(x) \\ \phi(y, t) = 0 \quad y \in \partial\Omega \end{array} \right.$$

puis en retournant dans le temps :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(x, t) - \Delta \psi(x, t) = 0 \\ \psi(x, T) = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, T) = 0 \\ \psi(y, t) = \begin{cases} 0 & y \in \partial\Omega \setminus \Gamma_c \\ \frac{\partial \phi}{\partial \nu} & y \in \Gamma_c \end{cases} \end{array} \right.$$

On définit :

$$\Lambda(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1) = \left(\psi(\mathbf{x}, 0), \frac{\partial \psi}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) \right)$$

On définit :

$$\Lambda(e_0, e_1) = \left(\psi(x, 0), \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, 0) \right)$$

L'opérateur Λ est linéaire.

Sous les conditions de contrôlabilité, c'est un isomorphisme de $(H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega))$ dans $(L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega))$.

On définit :

$$\Lambda(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1) = \left(\psi(x, 0), \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, 0) \right)$$

L'opérateur Λ est linéaire.

Sous les conditions de contrôlabilité, c'est un isomorphisme de $(H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega))$ dans $(L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega))$.

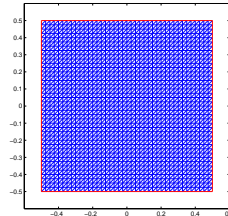
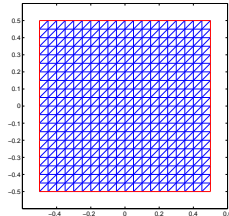
Trouver g_{v_0, v_1} revient à inverser :

$$\Lambda(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1) = (v_0, v_1)$$

Alors, $\psi \equiv v$ et $g_{v_0, v_1} = \psi|_{\Gamma_c} = \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_c}$

- Numériquement, la méthode produit un problème mal posé
- Diverses solutions :
 - régularisation type Tykhonov.
 - éléments finis mixtes.
 - **filtrage bi-grille.**
 - schémas uniformément contrôlables.
 - approche spectrale.

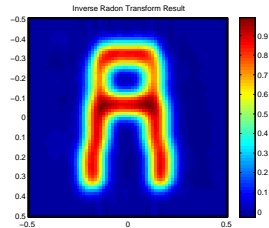
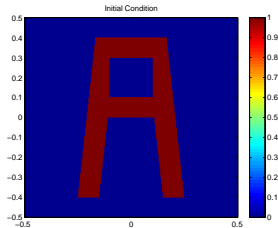
- Inversion de Λ utilisant un gradient conjugué.
- projection des résidus et calcul des paramètres d'itération sur un maillage plus grossier.



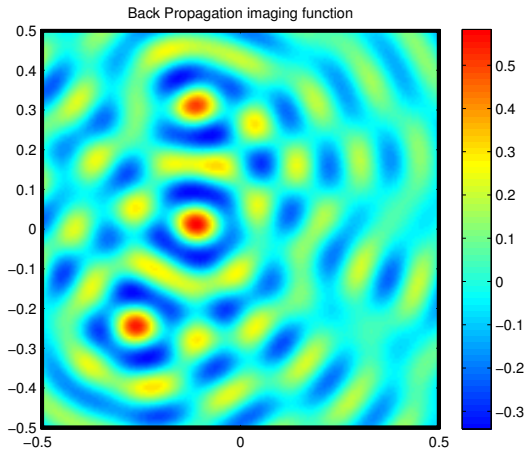
En considérant :

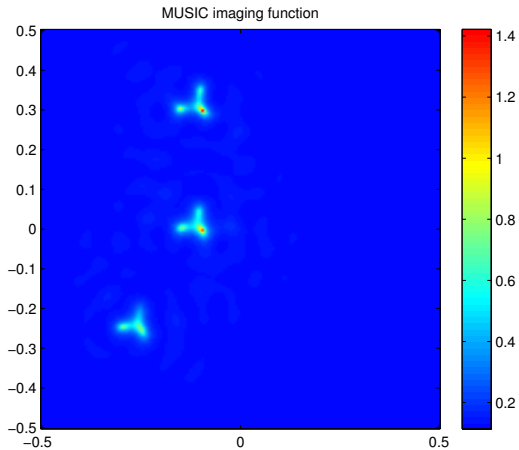
$$M(0, \delta(x.\theta - s)) = R[\rho_0](s, \theta)$$

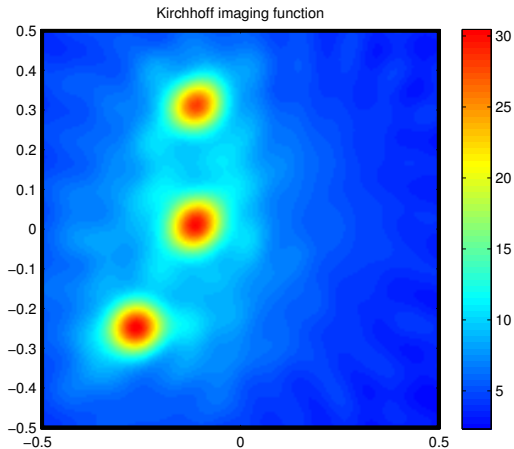
on peut reconstruire ρ_0 par transformée de Radon inverse.



- condition initiale ponctuelle : $p_0(x) = \delta_z(x) \Rightarrow$ accès à $v_1(z)$.
- en choisissant bien v_1 , on se ramène à des expériences et algorithmes classiques.
- avec $v_1(x) = e^{i\omega(\theta_i - \theta_j) \cdot x}$, on obtient la matrice de réponse à des illuminations planes (MUSIC, Back-propagation, Kirchhoff).
- fonctionne aussi avec illumination sphérique.







Compromis au niveau de la complexité :

- limitation des données \Rightarrow contrôle géométrique (calculs longs).
- conditions ponctuelles \Rightarrow algorithmes nécessitant peu de contrôles.

L'approche fonctionne pour des conditions initiales étendues mais devient très lourde ($\mathcal{O}(n_x^{2d+1})$).

La méthode fonctionne dans un cadre idéal :

- pas d'atténuation
- vitesse du son constante (connue)
- connaissance de la géométrie et des conditions de bord, même sur la partie non contrôlée.



H. Ammari, et al.

Transient wave imaging with limited view datas

Submitted to SIAM Journal on Imaging Sciences



E.Zuazua and L.Ignat

Convergence of a two-grid algorithm for the control of the wave equation

To appear in Journal of the European Mathematical Society



J.L. Lions

Contrôlabilité exacte des systèmes distribués.