Mini-projet d'analyse numérique du cours MAP 431

Equations intégrales et problème de la radiosité

Sujet proposé par Gabriel Peyré

Pour calculer les images de synthèse dans les films d'animation, il y a deux techniques principales :

- le *lancé de rayons*, qui permet de rendre compte des réflexions (miroirs, etc.) avec des ombres « tirées au couteau »,
- la *radiosité*, qui retranscrit les surfaces diffuses avec des ombres plus « naturelles » (voir fig. 1).

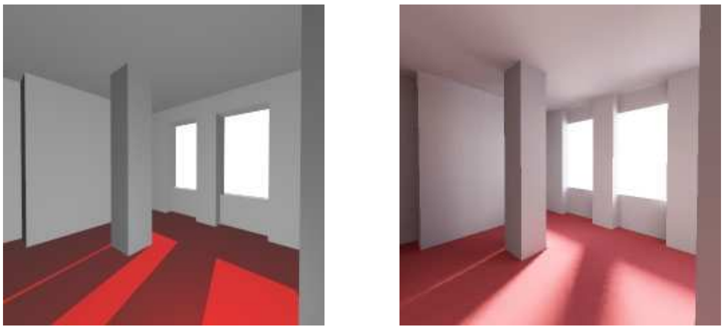

Figure 1: Ombres tirées au couteau (gauche) et solution de la radiosité (droite)

Dans ce projet, nous allons aborder la deuxième méthode, mais pour que les calculs soient faisables en Scilab, nous allons nous restreindre à des objets 2D, c'est-à-dire que la pièce que l'on souhaite éclairer sera délimitée par une courbe plane. Dans la première partie, nous allons faire l'étude théorique de l'équation et du schéma de résolution dans le cas d'une courbe lisse. L'étude numérique de la deuxième partie se fera sur une pièce carrée, donc avec des « coins ».

On suppose donnée une courbe fermée $\mathcal{S}$ (le bord de la pièce), et l'on cherche la fonction de *luminance* $u : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^+$ (c'est-à-dire l'intensité lumineuse en chaque point des murs de la pièce) qui vérifie

$$\boxed{\forall P \in \mathcal{S}, \quad u(P) - \frac{\rho(P)}{2} \int_{\mathcal{S}} u(Q) G(P, Q) \mathrm{d}s_Q = E(P)} \qquad (*)$$

avec $$G(P, Q) = \frac{\cos(\theta_P)\cos(\theta_Q)}{|P-Q|} = \frac{\left(\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{n_P}\right)\left(\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{n_Q}\right)}{\|\overrightarrow{PQ}\|^3} \qquad \text{(voir fig. 2).}$$

Cette équation traduit la conservation du flux lumineux au point P. $E(P)$ est la quantité de lumière émise à un point P ($E(P) > 0$ signifie que le point P agit comme une ampoule). $G(P, Q)$ caractérise l'interaction entre deux points (G est maximal quand les éléments de courbes sont parallèles et proches). $0 \leq \rho(P) \leq 1$ est la *réflectance*, c'est-à-dire la quantité de lumière réfléchie par le point P.

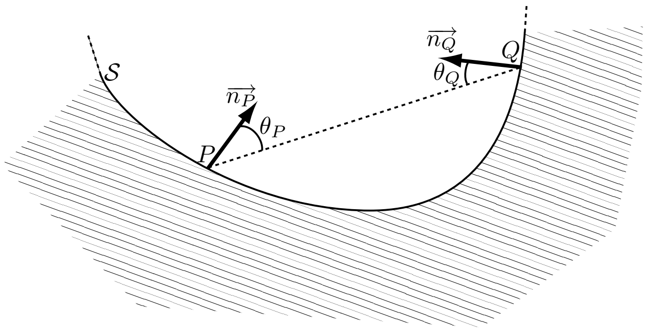

Figure 2: Notations

Partie 1 : questions théoriques. On suppose que $\mathcal{S}$ est une courbe lisse, convexe, fermée, paramétrée par $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$. On suppose aussi que l'on a $\rho(P) \leq c < 1$.

Question 1 : On se place dans l'espace fonctionnel $L^\infty(\mathcal{S})$ que l'on identifie à $L^\infty([0, 1])$ grâce à la paramétrisation γ, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et on considère l'opérateur

$$\mathcal{K}\colon \begin{cases} L^\infty(\mathcal{S}) \longrightarrow L^\infty(\mathcal{S}) \\ \quad v \quad \longmapsto \mathcal{K}(v) \end{cases} \qquad \text{avec} \quad \mathcal{K}(v)(P) = \frac{\rho(P)}{2} \int_{\mathcal{S}} u(Q)G(P, Q)\mathrm{d}s_Q.$$

Montrer que $(*)$ s'écrit $(\mathrm{Id} - \mathcal{K})u = E$. Montrer ensuite que $\int_{\mathcal{S}} G(P, Q)\mathrm{d}s_Q = 1$ (on fera un changement de variable pour intégrer sur un angle parcourant un demi-cercle). En déduire qu'on a $\|\mathcal{K}\| < 1$, où $\|\mathcal{K}\|$ est la norme d'opérateur. Montrer enfin que $\mathrm{Id} - \mathcal{K}$ est inversible avec $\|(\mathrm{Id} - \mathcal{K})^{-1}\| < (1 - c)^{-1}$. Conclure que pour $E \in L^\infty$, $(*)$ admet une solution unique $u \in L^\infty$.

Question 2 : Soit $n > 0$; on subdivise $\mathcal{S}$ en $\mathcal{S} = \cup_{k=1}^n \gamma(\Delta_k)$, où l'on a noté $\Delta_k = [(k-1)/n,\, k/n[$. On note $P_k = \gamma((k - 1/2)/n)$ le « milieu » de Δ_k (fig. 3, gauche). On note $\mathcal{F}_n$ le sous-espace fermé de $L^\infty(\mathcal{S})$ des fonctions constantes sur chaque Δ_k, et $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ l'espace des fonctions continues. On définit une application $\mathcal{P}_n : \mathcal{C}(\mathcal{S}) \to \mathcal{F}_n$, qui à f continue associe la fonction $\mathcal{P}_n f$ constante égale à $f(P_k)$ sur chaque Δ_k. Montrer que la norme de $\mathcal{P}_n$ est $\|\mathcal{P}_n\| = 1$. On admet

que l'on peut étendre $\mathcal{P}_n$ à $L^\infty(\mathcal{S})$ tout entier, et que l'on a encore $\|\mathcal{P}_n\| = 1$.
On cherche à résoudre le problème simplifié suivant :

$$\text{trouver } u_n \in \mathcal{F}_n \text{ tel que } (\mathrm{Id} - \mathcal{P}_n\mathcal{K})u_n = \mathcal{P}_n E. \qquad (**)$$

Montrer que ce problème admet une solution unique, et que l'on a la majoration $\|(\mathrm{Id} - \mathcal{P}_n\mathcal{K})^{-1}\| \leq (1-c)^{-1}$.
En utilisant la relation $u - u_n = (\mathrm{Id} - \mathcal{P}_n\mathcal{K})^{-1}(u - \mathcal{P}_n u)$, en déduire que sous l'hypothèse que u est de classe continue, on a $\|u - u_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

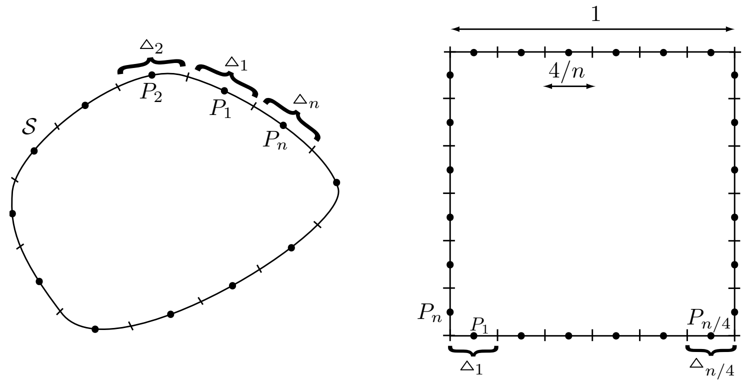

Figure 3: Discrétisation de la courbe et du carré

Partie 2 : questions numériques en Scilab On suppose que $\mathcal{S}$ est un carré, que l'on discrétise comme celà est montré à la figure 3 (droite).

Ecrire les fonctions Scilab `position(k,n)`, `normale(k,n)` et `G(k1,k2,n)` qui renvoient respectivement P_k, $\overrightarrow{n_{P_k}}$ et $G(P_{k_1}, P_{k_2})$.

Question 3 : On note $\widetilde{u}_i = u_n(P_i)$ et $\widetilde{E}_i = E(P_i)$ (qui sont des vecteurs de taille n). Montrer que $(**)$ revient à résoudre un certain système linéaire $(\mathrm{Id}_n - K)\widetilde{u} = \widetilde{E}$. Quelles sont les entrées de la matrice K ? Montrer qu'on peut la remplacer de façon approchée par la matrice $\widetilde{K}$ telle que

$$\widetilde{K}_{i,j} = \frac{2}{n}\rho(P_k)G(P_{k_i}, P_{k_j}).$$

Question 4 : On suppose que $\rho = 0.8$ est constant, $n = 80$, et que E vaut 1 sur $\Delta_6, \ldots, \Delta_{15}$ et $E = 0$ ailleurs (seule une portion du mur du bas éclaire). Ecrire un programme Scilab qui calcule $\widetilde{K}$, $\widetilde{E}$ et résoud le système linéaire. Afficher la solution, comme ceci est fait à la figure 4 (on a représenté seulement les murs gauche/haut/droite).

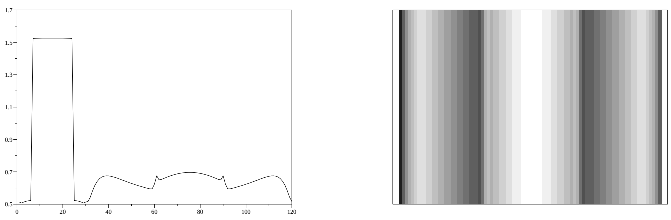

Figure 4: Solution sous forme de courbe et niveaux de gris

Question 5 : On considère le schéma itératif $u_0 = E$ et $u_{k+1} = \widetilde{K} u_k + E$. Justifier pourquoi $u_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} \widetilde{u}$. Etudier avec Scilab la vitesse de convergence, et comparer-la avec la décroissance théorique.

Question bonus : Résoudre l'équation de la radiosité avec une autre fonction E, ainsi qu'avec un ρ qui varie.
Pour prendre en compte les ombres projetées (par exemple si $\mathcal{S}$ n'est pas convexe), il faut modifier l'équation de la radiosité comme suit

$$\forall P \in \mathcal{S}, \quad u(P) - \frac{\rho(P)}{2} \int_{\mathcal{S}} u(Q) G(P, Q) V(P, Q) \mathrm{d}s_Q = E(P),$$

où V est la fonction de visibilité : $V(P, Q) = 1$ si P et Q « se voient », et $V(P, Q) = 0$ sinon.
On place un objet circulaire de rayon r au milieu de la pièce, qui absorbe la lumière. Ecrire la fonction Scilab `V(k1,k2,n)` qui renvoie $V(P_{k_1}, P_{k_2})$ (on pourra penser à calculer la distance d de la droite $(P_{k_1} P_{k_2})$ au centre du carré, et la condition de visibilité $d \geq r$). Résoudre l'équation de la radiosité et représenter la solution.