

# TD5 d'Analyse (DUMI2E)

## Dérivabilité

Le symbole  $\clubsuit$  signale les exercices que les étudiants doivent impérativement savoir traiter. Le symbole  $\heartsuit$  signale les exercices qu'il faut faire chez soi, ils sont relativement faciles .

### Exercices type Cours

#### Exercice 1. [Cours]

- $\clubsuit$  1. Montrer que toute fonction dérivable en  $x_0$  est continue en  $x_0$ .
- $\heartsuit$  2. Montrer que toute fonction dérivable à droite en  $x_0$  est continue à droite en  $x_0$ .
- $\heartsuit$  3. Montrer que toute fonction dérivable à gauche en  $x_0$  est continue à gauche en  $x_0$ .
- $\heartsuit$  4. Montrer que toute fonction dérivable à gauche et à droite en  $x_0$  telle que  $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$  est dérivable en  $x_0$ .
- $\heartsuit$  5. Donner un exemple de fonction dérivable à gauche et à droite en  $x_0$  mais qui n'est pas dérivable en  $x_0$ .

**Exercice 2.** [Cours] Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions dérivables en  $x_0$ . Montrer que leur somme et produit sont dérivables en  $x_0$ . Montrer que si de plus  $g(x_0) \neq 0$ , alors le quotient  $\frac{f}{g}$  est dérivable en  $x_0$ . Enfin, en supposant que la composée  $g \circ f$  est bien définie et que de plus  $g$  est dérivable en  $f(x_0)$ , montrer que  $g \circ f$  est bien dérivable en  $x_0$ .

**Exercice 3.**  $\heartsuit$  [Cours] Montrer que la somme et le produit de fonctions  $C^\infty$  sont encore  $C^\infty$ .

**Exercice 4.** [Cours] Soient  $I$  un intervalle ouvert et  $f$  une fonction dérivable et strictement monotone sur  $I$ . Posons  $J = f(I)$  et notons  $g : J \rightarrow I$  la bijection réciproque de l'application bijection  $I \rightarrow J$  définie par  $f$ . Montrer que si l'on a  $f'(x) \neq 0$  pour tout  $x \in I$ , alors  $g$  est dérivable sur  $J$  et donner son expression en fonction de la composée  $f' \circ g$  pour tout  $x \in J$ .

**Exercice 5.** [Cours] Enoncer et démontrer les Théorème de Rolle et de Darboux.

### Application du Cours

#### Exercice 6. $\clubsuit$

1. la fonction  $x \mapsto |x|$  est elle dérivable sur  $\mathbb{R}$  ? La fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  est elle dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  ?

2. la fonction  $x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  si  $x \neq 0$  et  $0 \mapsto 0$  est elle dérivable en 0?

**Exercice 7.** Calculer la limite en  $+\infty$  de la fonction

$$x \mapsto \ln(x+1)^{\frac{1}{3}} - \ln(x)^{\frac{1}{3}}.$$

**Exercice 8.** Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = x^2 \cos \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0, f_1(0) = 0, \quad f_2(x) = \sin x \sin \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0, f_2(0) = 0$$

$$f_3(x) = \frac{|x|\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1} \text{ si } x \neq 1, f_3(1) = 1.$$

**Exercice 9.** Déterminer  $a, b \in \mathbb{R}$  de manière à ce que la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par :

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \text{ et } f(x) = ax^2 + bx + 1 \text{ sinon}$$

soit dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

**Exercice 10.**

1. Que peut-on dire de  $f'$  si on sait que  $f$  est paire ? impaire ? périodique ?
2. Que peut-on dire de  $f$  si on sait que  $f'$  est paire ? impaire ? périodique ?
3. Montrer que si  $f'$  est  $T$ -périodique et  $f(T) \neq f(0)$ , alors  $f$  n'a pas de période (on étudiera  $f(nT)$  pour  $n \in \mathbb{N}$ ).

**Exercice 11.**

1. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable. Montrer que  $|f|$  admet en tout point une dérivée à droite et une dérivée à gauche.
2. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable telle que  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \neq 0$ . Montrer que  $|f|$  est dérivable.

**Exercice 12.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable et  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $f'(a) \neq 0$ .

1. Montrer qu'il existe un voisinage  $V$  de  $a$  tel que  $\forall x \in V \setminus \{a\}, f(x) \neq f(a)$ .
2. Si  $f'$  est continue au point  $a$ , montrer qu'il existe un voisinage  $V$  de  $a$  tel que  $f|_V$  soit injective.

**Exercice 13.** Soit  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ . Montrer que  $f$  est prolongeable par continuité en 0 ; on note encore  $f$  la fonction prolongée. Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  mais que  $f'$  n'est pas continue en 0.

**Exercice 14.** Montrer que le polynôme  $P_n$  défini par

$$P_n(t) = [(1 - t^2)^n]^{(n)}$$

est un polynôme de degré  $n$  dont les racines sont réelles, simples et appartiennent à  $[-1, 1]$ .

**Exercice 15.** Soit  $f$  une fonction  $n$  fois dérivable sur  $]a, b[$  s'annulant en  $n + 1$  points de  $]a, b[$ . Montrer que si  $f^{(n)}$  est continue, il existe un point  $x_0$  de  $]a, b[$  tel que  $f^{(n)}(x_0) = 0$ .

**Exercice 16.** Par application du théorème des accroissements finis à  $f(x) = \ln x$  sur  $[n, n + 1]$  montrer que

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

tend vers l'infini quand  $n$  tend vers l'infini.

**Exercice 17.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue en 0. Montrer que  $f$  est dérivable en 0, et  $f'(0) = l$  si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tq } \forall h, k \in ]0, \delta[, \left| \frac{f(h) - f(-k)}{h + k} - l \right| \leq \varepsilon.$$

**Exercice 18.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable telle que  $f(a) = f(b) = 0$ , et  $f'(a) > 0$ ,  $f'(b) > 0$ . Montrer qu'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f(c) = 0$ , et  $f'(c) \leq 0$ .

**Exercice 19.** Soit  $f$  une fonction dérivable sur l'intervalle  $[a, +\infty[$  telle que  $f(a) = 0$  et  $\lim_{+\infty} f = 0$ . Montrer qu'il existe un réel  $c > a$  vérifiant  $f'(c) = 0$ .

**Exercice 20.** Déterminer en fonction du réel  $a$  le nombre de solutions de l'équation  $e^x = ax$ .

**Exercice 21.** Soit  $f$  une fonction de classe  $C^1$  sur  $[a, b]$  avec  $a < b$ . On suppose que  $f(a) = 0$  et que  $f(b)f'(b) < 0$ . Montrer qu'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f'(c) = 0$ .

**Exercice 22.** Soit  $f$  deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}^+$ , bornée et telle que  $f'' \geq 0$ . Montrer que  $f$  est décroissante sur  $\mathbb{R}^+$ .

**Exercice 23.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable, telle que  $f(a) = f(b) = 0$ . Montrer que pour tout  $d \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$ , il existe une tangente au graphe de  $f$  passant par le point  $(d, 0)$ .

**Exercice 24.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable. On suppose que :  $\forall x \in [a, b], f'(x) \neq 0$ . Montrer que  $f'$  est de signe constant.

**Exercice 25.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable telle que  $f(x) \rightarrow f(a)$  quand  $x \rightarrow +\infty$ . Montrer qu'il existe  $x \in ]a, +\infty[$  tel que  $f'(x) = 0$ .

**Exercice 26.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable et bornée telle que  $f'(x)$  tende vers  $l$  quand  $x \rightarrow +\infty$ . Montrer que  $l = 0$ .

**Exercice 27.**

1. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable telle que  $f'(x)$  tende vers  $l$  quand  $x \rightarrow +\infty$ . Montrer que  $\frac{f(x)}{x} \rightarrow l$  quand  $x \rightarrow +\infty$ .
2. Chercher un contreexemple pour la réciproque.

**Exercice 28.**  $\triangleleft$  [Règle de l'Hospital] Soient  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables avec  $\forall x \in ]a, b[, g'(x) \neq 0$ .

1. Montrer qu'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que :

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

(Appliquer le théorème de Rolle à  $f - \lambda g$ , où  $\lambda$  est un réel bien choisi).

2. En déduire que si

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \rightarrow l, \quad \text{quand } x \rightarrow a^+,$$

alors (règle de l'Hospital)

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \rightarrow l, \quad \text{quand } x \rightarrow a^+.$$

3. Application : déterminer

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - e^x}{(x+1)e^x - 1}.$$

**Exercice 29.** A l'aide du TAF, déterminer

$$\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\ln(\sin x) - \ln(\cos x)}{\sin x - \cos x}.$$

**Exercice 30.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ . Démontrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x, y \in [a, b], \text{ si } 0 < |x - y| < \delta, \text{ alors } \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} - f'(x) \right| \leq \varepsilon.$$

**Exercice 31.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$ .

1. On suppose que  $f(a) = f(b) = 0$ . Soit  $c \in ]a, b[$ . Montrer qu'il existe  $d \in ]a, b[$  tel que :

$$f(c) = -\frac{(c-a)(b-c)}{2} f''(d).$$

(Considérer  $g(t) = f(t) + \lambda(t-a)(b-t)$  où  $\lambda$  est choisi de sorte que  $g(c) = 0$ )

2. Cas général : Soit  $c \in ]a, b[$ . Montrer qu'il existe  $d \in ]a, b[$  tel que :

$$f(c) = \frac{b-c}{b-a}f(a) + \frac{c-a}{b-a}f(b) - \frac{(c-a)(b-c)}{2}f''(d).$$

**Exercice 32.** [Dérivées n-ièmes]

1. Etablir une formule de récurrence pour les dérivées successives de la fonction  $x \mapsto e^{x^3}$ .
2. Calculer la dérivée n-ième de  $x \mapsto (x^3 + 2x^2 - 5)e^{-x}$ .
3. Calculer la dérivée n-ième de  $x \mapsto \sin x$ ,  $x \mapsto \sin^2 x$  et  $x \mapsto h(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$ .

**Exercice 33.** Etant donné  $f$  et  $g$  deux fonctions dérivables à l'ordre  $n$  sur un intervalle  $I$ , montrer par récurrence que la dérivée d'ordre  $n$  du produit  $fg$  sur cet intervalle est

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

En déduire les dérivées successives des fonctions  $x \mapsto x^2 e^x$ ,  $x \mapsto x^2(1+x)^n$ ,  $x \mapsto \frac{x^2+1}{(x+1)^2}$  et  $x \mapsto x^{n-1} \ln(x)$ .

**Exercice 34.** Soient  $a$  et  $b$  deux réels et  $f(x) = (x-a)^n(x-b)^n$ . Calculer  $f^{(n)}$  et en déduire  $\sum_{k=0}^n (C_n^k)^2$ .

**Exercice 35.** Soit  $f(x) = \exp(-\frac{1}{x^2})$  si  $x \neq 0$  et  $f(0) = 0$ . Montrer que  $f$  est  $C^\infty$  et que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a  $f^{(n)}(0) = 0$ .

**Exercice 36.** Soit  $n \geq 2$  un entier fixé et  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$f(x) = (1+x^n)(1+x)^{-n}$$

- 1.a. Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^+$  et calculer  $f'(x)$  pour tout  $x \geq 0$ .
- 1.b. En étudiant le signe de  $f'(x)$  sur  $\mathbb{R}^+$ , montrer que  $f$  atteint un minimum sur  $\mathbb{R}^+$  que l'on déterminera.
- 2.a. En déduire que

$$(1+x)^n \leq 2^{n-1}(1+x^n), \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

- 2.b. Montrer que si  $x \in \mathbb{R}^+$  et  $y \in \mathbb{R}^+$  alors on a

$$(y+x)^n \leq 2^{n-1}(y^n + x^n), \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

**Exercice 37.** Pour tout  $n \geq 2$ , on définit sur  $\mathbb{R}$  la fonction

$$f_n : x \mapsto x - \cos\left(\frac{x}{n}\right).$$

1. Montrer que pour tout  $n \geq 2$ , il existe un unique réel  $x_n \in ]0, 1[$  vérifiant

$$x_n = \cos\left(\frac{x_n}{n}\right)$$

2. Montrer que pour tout  $x \in ]0, 1[$  et tout  $n \geq 2$ , on a l'inégalité

$$f_n(x) > f_{n+1}(x).$$

En déduire que la suite  $(x_n)_{n \geq 2}$  est croissante.

3. Etudier la convergence de la suite  $(x_n)_{n \geq 2}$ .

**Exercice 38.** On considère la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(t) = e^{\frac{1}{t}}$  si  $t < 0$  et 0 sinon.

1. Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et en particulier en 0.
2. Etudier l'existence de  $f''(0)$ .
3. On cherche à montrer que pour  $t < 0$ , la dérivée  $n$ -ième de  $f$  s'écrit

$$f^{(n)}(t) = e^{\frac{1}{t}} t^{-2n} P_n(t)$$

où  $P_n$  est une fonction polynomiale.

3.a. Trouver  $P_1$  et  $P_2$ .

3.b. Trouver une relation de récurrence entre  $P_{n+1}$ ,  $P_n$  et  $P'_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

4. Montrer que  $f$  est de classe  $C^\infty$ .

**Exercice 39.** Soit  $\alpha \geq 0$ . On considère la suite

$$s_n(\alpha) = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha}$$

1. Montrer que l'on a  $s_{2n}(1) - s_n(1) \geq \frac{1}{2}$ . En déduire que la suite  $(s_n(1))_n$  est divergente.
2. En déduire que la suite  $(s_n(1))_n$  diverge pour tout  $\alpha \in [0, 1]$ .
3. Montrer que pour tout  $x > 0$

$$\alpha (x+1)^{-(\alpha+1)} \leq x^{-\alpha} - (x+1)^{-\alpha} \leq \alpha x^{-(\alpha+1)}.$$

**Exercice 40.** Soient  $a$  un nombre réel strictement positif et  $g : ]-a, a[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^\infty$  telle que  $g(0) = 0$ . Soit  $f : ]-a, a[ \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{g(x)}{x}$ .

1. Montrer que  $f$  se prolonge par continuité en 0.
2. Montrer que  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $] - a, a[ \setminus \{0\}$  et exprimer  $f^{(n)}(x)$  en fonction des dérivées de  $g$ .
3. Montrer que pour tout  $x \in ] - a, a[$ , il existe  $\theta \in ]0, 1[$  tel que l'on ait
 
$$-g(x) + \frac{x}{1!}g'(x) - \frac{x^2}{2!}g''(x) + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n!}g^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}g^{(n+1)}(\theta x)$$
4. En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la limite  $\lim_{x \rightarrow 0} f^{(n)}(x)$  existe.
5. Montrer que  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $] - a, a[$ .

**Exercice 41.** Soit  $f : I = [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction impair de classe  $C^4$ . On suppose que la dérivée  $f^{(5)}$  existe sur  $I$ . On pose  $\alpha = \frac{1}{3}f'(1) + \frac{2}{3}f'(0) - f(1)$  et on considère la fonction  $g$  définie sur  $I$  comme suit

$$g(x) = f(x) - \frac{x}{3}(f'(x) + 2f'(0)) + \alpha x^5.$$

1. Montrer que  $g$  est de classe  $C^3$ . Exprimer  $g, g'$  et  $g^{(3)}$  en fonction des dérivées de  $f$ .
2. Calculer  $g(0), g'(0)$  et  $g''(0)$ .
3. Montrer qu'il existe  $\beta \in I$  tel que l'on ait  $g^{(3)}(\beta) = 0$ .
4. Montrer qu'il existe  $\gamma \in I$  tel que l'on ait

$$f(1) = \frac{1}{3}f'(1) + \frac{2}{3}f'(0) - \frac{1}{180}f^{(5)}(\gamma).$$

**Exercice 42.** Soit  $g : ]-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $g(x) = e^x - x$  et soit  $h : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $h(x) = e^x - x$ .

1. Montrer que  $g$  et  $h$  sont des bijections de  $] - \infty, 0]$  sur  $[1, +\infty[$  et de  $[0, +\infty[$  sur  $[1, +\infty[$  respectivement. Tracer leurs graphes sur un même dessin.
2. Pour tout  $x, y$  appartenant à  $\mathbb{R}$ , on pose  $\Phi(x, y) = \frac{e^x - e^y}{x - y}$  si l'on a  $x \neq y$  et  $\Phi(x, x) = e^x$ . Montrer qu'il existe une unique application  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on ait  $\Phi(x, \phi(x)) = 1$ .
3. Montrer que  $\phi$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et exprimer  $\phi'(x)$  en fonction de  $x$  et  $\phi(x)$ .

4. Montrer que  $\phi$  est dérivable en 0 et que l'on a  $\phi'(0) = -1$ .

**Exercice 43.** Trouver les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables en 0 telles que

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^+ \setminus \{-1\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(\lambda x) = \lambda f(x).$$