TD4 d'Analyse (DUMI2E)

Continuité des fonctions réelles de la variable réelle

Le symbole ✔ signale les exercices que les étudiants doivent impérativement savoir traiter. Le symbole ✍ signale les exercices qu'il faut faire chez soi,

Définitions et propriétés

Exercice 1. Etudier la continuité des fonctions suivantes dans les points indiqués en utilisant la définition:

a) $f(x) = \ln(1 + x^2)$, $x_0 = 0$;
b) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 2. ✔

Soit f et g deux applications continues de A dans $\mathbb{R}$. Montrer que:

a) $f(x) + g(x)$ et $f(x)g(x)$ sont continues.
b) Si $\forall x \in A, g(x) \neq 0$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ est continue

Exercice 3. Soient $f : A \to B$ et $g : B \to \mathbb{R}$ ($A, B \subset \mathbb{R}$) deux applications et $a \in A$. Si f est continue en a et g est continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a.

Exercice 4. Etudier en tout point la continuité des applications suivantes:

a) ✔ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ si $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = x$ si $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$,
b) ✍$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x - E(x))^2 + E(x)$,
c) ✍ $f(x) = \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$,
d) ✍ $g(x) = x^3$ si $x \geq 0$, $f(x) = 0$ si $x \leq 0$,
e) ✍$f(x) = xE(\frac{1}{x})$ si $x \geq 0$, $f(x) = 1$ si $x = 0$,

Exercice 5. ✔

Trouver un prolongement par continuité à $\mathbb{R}$ tout entier des fonctions suivantes

a) $f : \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3+5x+6}{x^3+1}$
b) $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{(1+x^n)-1}{x}$, $n \in \mathbb{N}$

Exercice 6. ✔ Etudier si les fonctions ci-dessous définies sur $\mathbb{R}$ peuvent se prolonger par continuité en 0.

a) $f(x) = \sin \frac{1}{x}$.
b) $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$.
c) $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$.

Exercice 7. Soit $f :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ une fonction croissante et telle qu'il existe $\alpha > 0$ pour lequel la fonction

$$g : x \to x^{-\alpha} f(x)$$

soit décroissante.

a) Démontrer que les fonctions g et f sont continues sur l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$.
b) Peut-on généraliser ce résultat?

Exercice 8. ✔ Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x - y) = f(x) - f(y).$$

Exercice 9.

- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui vérifie $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x^2) = f(x)$.
  a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(\sqrt{x}) = f(x)$.
  b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ $f(x^{1/2^n}) = f(x)$.
  c) Montrer que f est une fonction constante.
- Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, non constante , telle que:

$$\forall \ \ x \in \mathbb{R},\ f(x^2) = f(x).$$

Exercice 10. ✍ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que:

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x + 1) - f(x)) = l \in \mathbb{R}.$$

Montrer $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = l$.

<u>Fonctions continues sur un intervalle</u>

Exercice 11. ✔

a) Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ continue. Montrer qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = x_0$
b) Soient $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continues, telles que $(f(0) - g(0))(f(1) - g(1)) \leq 0$. Montrer qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$.

Exercice 12. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue, positive, croissante, telle que:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = l < 1.$$

Montrer qu'il existe $x_0 \in [0, +\infty[$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Exercice 13. ✔ Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue; montrer que si l'ensemble $f(I)$ est fini, alors f est constante.

Exercice 14. Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue telle que

$$\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x) - f(y)| \geq a|x - y|.$$

Montrer que f est bijective.

Exercice 15. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application continue,non constante telle que $f(a) = f(b)$, on note $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ et $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$ Montrer que, pour tout $k \in]m, M[$, il existe au moins deux éléments de $[a, b]$, distincts, d'image k par f.

Exercice 16. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une aplication bornée et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue. Montrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bornées.

Exercice 17. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue et périodique. Montrer que f est bornée.

Exercice 18. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une aplication continue telle que $\lim_{-\infty} f = \lim_{+\infty} f = +\infty$. Montrer que f admet, sur $\mathbb{R}$, une borne inférieure, et que celle-ci est atteinte.

Exercice 19. Soient $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une aplication continue telle que $\lim_{+\infty} f = 0$. Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, il existe $b \in [a, \infty[$ tel que la restriction de f à $[a, +\infty[$ atteint son maximum en b.

Exercice 20. Une fonction f transformant un intervalle I en un intervalle $J = f(I)$ est-elle continue?

Exercice 21. ✍ Montrer que l'équation $x^{12} = x^{11} + 1$ d'inconue $x \in \mathbb{R}_+$ admet au moins une solution.

Exercice 22.

a) ✔ Montrer qu'un polynôme à coéfficient réels de degré pair admet un maximum ou un minimum, mais pas les deux.
b) ✍ Montrer que tout polynôme à coéfficient réels de degré impair a au moins une racine réelle

Exercice 23. ✔

a) Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert $]a, b[$. Montrer que si f est strictement croissante et continue sur l'intervalle $]a, b[$, alors on a $f(]a, b[) =]\lim_{a^+} f, \lim_{b^-} f[$
b) Soit I un intervalle réel et une fonction f définie, monotone sur I et telle que $f(I)$ est un intervalle. Montrer que f est continue sur I.
c) Existe-t-il une bijection continue de $\mathbb{R}$ sur $[-1, 1]$?
d) Existe-t-il une fonction monotone de $\mathbb{R}$ sur $[-1, 1]$?

Uniforme continuité

Exercice 24. [Cours] Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f, g : D \to \mathbb{R}$. Montrer que:

a) si f est uniformément continue alors $|f|$ est uniformément continue;
b) si f et g sont u.c. alors $\lambda f + g$ est uniformément continue;
c) si f et g sont u.c. alors $Sup(f, g)$ et $Inf(f, g)$ sont uniformément continues;
d) si f et g sont u.c. alors $g \circ f$ est uniformément continue;

Exercice 25. Les fonctions suivantes sont-elles uniformément continues?

a) $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = \sqrt{x}$;
b) $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^{1/2}-1}{x^{1/3}+1}$;
c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$;
b) $f : [0; \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \tan x$;
b) $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$;
b) $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x)$;

Exercice 26. ✔ Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que f est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de fonctions en escalier sur $[a, b]$.

Exercice 27. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit f_n par

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k (1 - x)^{n-k} f(\frac{k}{n})$$

(On appelle les fonctions f_n polynômes d'approximation de Bernstein).

Montrer que la suite f_n converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

Exercice 28. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une application continue et périodique; montrer que f est uniformément continue sur $[0, +\infty[$.

Exercice 29. Soient I un intervalle borné de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application polynomiale. Montrer, sans recourir à la theoreme de Heine , que f est uniformément continue sur I.

Exercice 30. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, tel que $a < b < c$, et $f :]a, b[$ une application dont les restrictions à $[a, c]$ et à $[c, b]$ sont uniformément continues. Montrer que f est uniformément continue.

Exercice 31. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, tel que $a < b$, et $f :]a, b[$ une application uniformément continue. Montrer que f admet une limite finie à droite en a.

Exercice 32. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, tel que $a < b$, et $f :]a, b[$ une application uniformément continue. Montrer que f est bornée.

Exercice 33. Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x^2)$ est continue, bornée, mais non uniformément continue.

Exercice 34. Donner un exemple de fonction continue sur $\mathbb{R}$ mais non uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Que se passe-t-il si on considère les fonctions continues sur un intervalle fermé borné?

Exercice 35. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une aplication continue telle que $\lim_{-\infty} f = \alpha$, $\lim_{+\infty} = \beta$. Montrer que f est uniformement continue sur $\mathbb{R}$ et bornée.

Fontions lipschitziennes

Exercice 36. [Cours]

Soit f et g deux applications de A dans $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

a) si f est lipschitzienne et g est lipschitzienne, montrer que $f + g$ est lipschitzienne
b) si f est lipschitzienne, montrer que λf est lipschitzienne
c) si f est lipschitzienne et g est lipschitzienne, montrer que $g \circ f$ est lipschitzienne

Exercice 37. [Cours]

Soit f et g deux applications de A dans $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ lipschitziennes. Est ce que fg est lipschitzienne?

Exercice 38. Soient I un intervalle borné de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application polynomiale. Montrer, sans recourir à la theoreme de Heine , que f est lipschitzienne sur I.

Exercice 39. ✔ Soient I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et $f : I \to I$ une application k-contractante, $0 < k < 1$, alors f admet un unique point fixe $x_0 \in I$, $(f(x_0) = x_0)$. De plus la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in I$ et par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \geq 0$, converge vers cet unique point fixe x_0.

Exercice 40. Montrer que toute fonction Lipschtzienne est uiformement continue. Est ce que la reciproque est vrai?

Exercice 41. Soient $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ deux applications bornées, et $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par:

$$\forall \;\; u \in \mathbb{R}, \;\; M(u) = \sup_{x\in[0,1]} (f(x) + ug(x)).$$

Montrer que M est lipschitzienne.

Exercices supplémentaires

Exercice 1. Soit C l'ensemble des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et $T : C \to C$ une application telle que :

i) $\forall (f,g) \in C^2$, $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, $T(\lambda f + \mu g) = \lambda T(f) + \mu T(g)$
ii) $\forall (f,g) \in C^2$, et pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, $f|_I = g|_I$ implique $T(f)|_I = T(g)|_I$

Monter qu'il existe $\psi \in C$ telle que: $\forall f \in C, T(f) = \psi f$.

Exercice 2. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application telle que $f(0) \geq 0$ et $f(1) \leq 0$ on suppose qu'il existe une application continue $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $f + g$ soit croissante. Monter qu'il existe $x_0 \in [0,1] f(x_0) = 0$.

Exercice 3. Soit I in intervalle de $\mathbb{R}$ tel que : $\forall\, x \in I,\ E(x) \in I$, et $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue strictement croissante. Monter que les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

i) $\forall \in I,\ E(f(x)) = E(f(E(x)))$
ii) $\forall \in I,\ f(x) \in \mathbb{Z}$ implique $x \in \mathbb{Z}$.

Exercice 4. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une application telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$; il existe $n \geq 2$ tel que $\forall x \in [0,1]$, $(f \circ ... \circ f)(x) = x$ (n-fois). Monter $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = x$.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application uniformément continue. Monter qu'il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}_+^2$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq \alpha|x| + \beta$.

Exercice 6. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue. Evaluer

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k f(\frac{k}{n}).$$

Exercice 7. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application telle qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall\ (x_1,x_2) \in [a,b]^2, \quad x_1 \neq x_2, |f(x_1) - f(x_2)| < k|x_1^3 - x_2^3|.$$

a) Monter que f est uniformement continue
b) On suppose désormais $\forall\ x \in [a,b], ka^3 \leq f(x) \leq kb^3$.
Soit $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ l'application définie par: $\forall x \in [a,b],\ \psi(x) = f(x) - kx^3$.Monter qu'il existe $\alpha \in [a,b]$, unique tel que $\psi(\alpha) = 0$.
c) Soit (x_n) la suite définie par $x_0 \in [a,b]$ et , pour $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = (\frac{1}{k} f(x_n))^{1/3}$.Monter que la suite définie par $u_n = |x_n^3 - \alpha^3|$ admet une limite β.
d) En déduire qu'il existe une suite extraite de x_n convergean vers $\sqrt[3]{\alpha^3 + \epsilon\beta}$, avec $\epsilon \in \{1,1\}$.
e) Montrer que $f(\sqrt[3]{\alpha^3 + \epsilon\beta}) \in \{k(\alpha^3 - \beta), k(\alpha^3 + \beta)\}$
f) En déduire $\beta = 0$ et que x_n converge vers α.