

TD3 d'Analyse (DUMI2E)

Fonctions réelles

Le symbole \clubsuit signale les exercices que les étudiants doivent impérativement savoir traiter. Le symbole \heartsuit signale les exercices qu'il faut faire chez soi, ils sont relativement faciles. \mathcal{D}_f notera toujours le domaine de définition d'une fonction f .

Exercices type Cours

Exercice 1. \heartsuit [Cours] On se donne une fonction f et un réel $c > 0$

1. Qu'entend on, mathématiquement parlant, par *représentation graphique de la fonction f* ?
2. Comment obtenir les représentations graphiques des fonctions suivantes à partir de celle de f

$$f(x) + c, f(x) - c, f(x - c), f(x + c)$$

et

$$cf(x), \frac{1}{c}f(x), f(cx), f\left(\frac{x}{c}\right), -f(x), f(-x), |f(x)|$$

2. Comment obtenir la représentation graphique de la fonction réciproque f^{-1} , si elle existe, à partir de celle de f .

Exercice 2. \heartsuit [Cours] Soient f et g deux fonctions définies sur un domaine commun \mathcal{D} .

1. Discuter la monotonie des fonction $f + g$ et $f \circ g$, si elle existe, en fonction de celles de f et g .
2. Discuter la monotonie de la fonction fg en fonction des signes et des monotonies de f et de g .
3. Montrer que toute fonction périodique et non constante n'admet pas de limite en $+\infty$.
4. Montrer que toute fonction croissante et majorée admet une limite en $+\infty$.

Exercice 3. \heartsuit [Cours]

1. Etudier la parité des fonctions fg et $f \circ g$, si elle existe, selon la parité de f et celle de g .
2. Soit f la fonction valeur absolue, montrer que

$$f(x + y) \leq f(x) + f(y) \quad \text{et que} \quad f(f(x) - f(y)) \leq f(x - y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

3. Soit f la fonction partie entière, montrer que la fonction $x - f(x)$ est périodique et préciser sa période.

Exercice 4. \clubsuit [Cours]

1. Montrer que si une fonction admet une limite, alors cette limite est unique.
2. Montrer que si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l'$, alors $\lim_{x \rightarrow x_0} fg(x) = ll'$ et que si de plus $l' \neq 0$, alors $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g}(x) = \frac{l}{l'}$.
3. Soit f une fonction qui admet une limite en $x_0 \in \mathcal{D}_f$. Montrer qu'il existe un réel α tel que f est bornée sur l'ensemble $\{x \in \mathcal{D}_f \mid x \neq x_0 \text{ et } |x - x_0| < \alpha\}$.

Exercice 5. \clubsuit [Cours] Soit l un nombre réel et f, g et h des fonctions. Montrer que

1. si $f \leq g \leq h$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$, alors $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$.
2. si $f \leq g$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$.

Application du Cours**Exercice 6.** \heartsuit Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes

$$\frac{x^3+3x+2}{x^2-2x-3} \quad \sqrt{x^3-1} \quad \sqrt[3]{1-x^2} \quad \sqrt{x^2+x-2}$$

$$\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \quad \sqrt{-x} + (2-x)^{-\frac{1}{2}} \quad (x-|x|)^{-\frac{1}{2}} \quad \sqrt{\frac{1-|x|}{2-|x|}}$$

$$\sqrt{\sqrt{x-2} - \sqrt{x-2}} \quad \log \frac{2+x}{2-x} \quad \log \frac{x^2-3x+2}{x+1}$$

Exercice 7. \heartsuit Déterminer la parité des fonctions suivantes sur leurs domaines de définition

$$\sqrt{1-|x|} \quad \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2} \quad |x^2-x| \quad |x+1| - |x-1|$$

$$\frac{x-\frac{1}{x}}{x+\frac{1}{x}} \quad \log \frac{1+x}{1-x} \quad \frac{1+x^{x-1}}{(1-x)^{x+1}}$$

Exercice 8. \heartsuit Déterminer les réciproque des fonctions suivantes

$$\sqrt[3]{1-x^3}, \quad \log \frac{x-1}{x+1}, \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Exercice 9. \heartsuit

1. Déterminer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$$

2. Soient $m, n \in \mathbb{R}_+$, déterminer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^n}}{x^n}$$

3. Déterminer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - 1}{x}$$

Exercice 10.

1. \clubsuit Montrer que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on a

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

2. En déduire

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{x^{n+1} - \alpha^{n+1}}{x^n - \alpha^n}.$$

3. Calculer, lorsqu'elles existent, les limites suivantes en fonction du réel α

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{1 + x^\alpha \sin^2 x}, & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin x (\cos 2x - \cos x)}, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}}, & \quad \lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{\alpha} - \sqrt{x - \alpha}}{\sqrt{x^2 - \alpha^2}}, \\ \lim_{x \rightarrow 0} x E\left(\frac{1}{x}\right), & \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x - e^2}{x^2 + x - 6}, \end{aligned}$$

Exercice 11. \clubsuit Déterminer les limites suivantes pour $a, b \in \mathbb{R}_+$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{a} E\left(\frac{b}{x}\right), \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{b}{x} E\left(\frac{x}{a}\right).$$

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f \circ f$ est croissante et $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante. Montrer que f est strictement décroissante.

Exercice 13. \clubsuit Quelles sont les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ périodiques telles que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}.$$

Exercice 14. \clubsuit Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = +\infty$. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 15. \clubsuit Montrer que toute fonction strictement croissante ou strictement décroissante $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est injective. Que dire de la réciproque?

Exercice 16.

1. ∇ Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ croissantes telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x + y) = f(x) + f(y).$$

2. Soient deux fonctions f et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}, (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) = 0.$$

Montrer que f ou g est constante.

3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0, \quad \text{et} \quad f(x) = f(x + 1)f(x - 1).$$

Montrer que f est périodique.

Exercice 17.

1. Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \sin \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1} = 0.$$

2. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{x^2 \sin x}{x^2 + 1}$ n'admet pas de limite en $+\infty$.

3. On définit une fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x) = x \sin(\frac{1}{x})$.

a. Montrer que f admet une limite en 0.

b. Montrer que f n'est monotone sur aucun voisinage de 0.

Exercice 18. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une application croissante telle que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}.$$

Soit $g :]a; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. On suppose que g est croissante. Montrer que f est constante.

Exercice 19. Soit $f :] - a, a[\setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction vérifiant $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + \frac{1}{f(x)}) = 2$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

Exercice 20. ∇ Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante, où I est un segment de \mathbb{R} .

- Montrer que f admet en tout point $a \in I$ des limites à gauche et à droite. Ces limites seront notées $f_-(a)$ et $f_+(a)$.
- Montrer qu'on a $f_-(a) \leq f(a) \leq f_+(a)$ en tout point $a \in I$ où ces objets sont définis.
- Montrer que les fonctions $x \mapsto f_+(x)$ et $x \mapsto f_-(x)$ sont croissantes.
- On dit que f admet un saut à droite (resp. à gauche) en a si $f_-(a) < f(a)$ (resp. $f(a) < f_+(a)$). On note $D_k = \{a \in I; f_+(a) - f(a) > 1/k\}$ pour $k \geq 1$. Montrer que D_k ne peut contenir qu'un nombre fini d'éléments.
- En déduire que l'ensemble des sauts à droite d'une fonction croissante est au plus dénombrable. Idem pour les sauts à gauche.

Exercice 21. Soit $I =]a, b[$ un intervalle de \mathbb{R} et f une fonction bornée définie sur I . Soient $S : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ les fonctions définies par

$$S(x) = \sup_{x < u < b} f(u) \quad \text{et} \quad s(x) = \inf_{x < u < b} f(u).$$

1. Montrer que S est décroissante et s croissante.
2. En déduire que $\lim_{x \rightarrow b} S(x)$ et $\lim_{x \rightarrow b} s(x)$ existent et sont finies. Elles seront notées respectivement $\limsup_{x \rightarrow b} f$ et $\liminf_{x \rightarrow b} f$.
3. Montrer que l'on a $\liminf_{x \rightarrow b} f \leq \limsup_{x \rightarrow b} f$.
4. Montrer que f admet une limite en b si et seulement si $\liminf_{x \rightarrow b} f = \limsup_{x \rightarrow b} f$.
5. Soient f et g deux fonctions bornées définies sur I . Montrer que l'on a :

$$\begin{aligned} \limsup_{x \rightarrow b} (f + g) &\leq \limsup_{x \rightarrow b} f + \limsup_{x \rightarrow b} g \\ \liminf_{x \rightarrow b} (f + g) &\geq \liminf_{x \rightarrow b} f(x) + \liminf_{x \rightarrow b} g \end{aligned}$$

6. Soient f et g deux fonctions bornées définies sur I . On suppose que g admet une limite en b . Montrer :

$$\begin{aligned} \limsup_{x \rightarrow b} (f + g) &= \limsup_{x \rightarrow b} f + \lim_{x \rightarrow b} g \\ \liminf_{x \rightarrow b} (f + g) &= \liminf_{x \rightarrow b} f(x) + \lim_{x \rightarrow b} g \end{aligned}$$