TD1 d'Analyse
Ensemble des réels
DUMI2E.

Le signe ♠ signale les exercices qu'il faut absolument savoir faire.

Exercice 1 ♠: Relations d'ordre.

1. Montrer que la relation $<$ est antisymétrique, transitive mais pas réflexive. En déduire que ce n'est pas une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.
2. Soit E un ensemble non vide. Montrer que la relation $\subset$ est une relation d'ordre sur les sous-ensembles de E.

Exercice 2 ♠: Ordre lexicographique.
On note $E = [-1,1]^2$, et on définit sur E la relation :

$$(x,y) \preceq (x',y') \iff \Big((x < x') \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y')\Big) \qquad (\textit{ordre lexicographique}).$$

1. Pour $(a,b) \in E$, représenter graphiquement l'ensemble des majorants de (a,b).
2. Soit A une partie non vide de E. Montrer que A admet une borne supérieure.

Exercice 3 : Ordre sur les fonctions. Soit X un ensemble et $E = \mathbb{R}^X$. On ordonne E par : $f \leq g \iff \forall\, x \in X,\ f(x) \leq g(x)$.

1. Vérifier que c'est une relation d'ordre.
2. L'ordre est-il total ?
3. Que signifie l'énoncé : *"f est majorée"* ? Quelle différence y a-t-il avec la notion usuelle ?
4. Soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille majorée de fonctions de E. Montrer qu'elle admet une borne supérieure.

Exercice 4 ♠: On munit l'ensemble $\mathbb{N}^*$ de la relation $|$ définie de la façon suivante :

$$\forall p,q \in \mathbb{N}^*, \quad p|q \Leftrightarrow p \text{ divise } q.$$

1. Montrer que $(\mathbb{N}^*, |)$ est un ensemble ordonné.
2. Cet ensemble est-il totalement ordonné ?

Soient $p,q \in \mathbb{N}^*$. On considère le sous-ensemble $A = \{p;q\}$ de $\mathbb{N}^*$.

3. Donner un majorant de A.
4. Calculer $\inf(p,q)$ et $\sup(p,q)$.

4) Parties adjacentes.

Soient $A, B \subset \mathbb{R}$ vérifiant : $\begin{cases} \forall\, a \in A,\ \forall\, b \in B,\ a \leq b, \\ \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, a \in A,\ \exists\, b \in B \text{ tq } b - a \leq \epsilon. \end{cases}$

(on dit que A et B sont *adjacentes*). Montrer que $\sup(A) = \inf(B)$.

Exercice 5 ♠: Bornes supérieures sur $\mathbb{Q}$.
On considère l'ensemble ordonné $(\mathbb{Q}, \leq)$. Montrer que l'ensemble $A = \{x \in \mathbb{Q}; x^2 < 2\}$ est borné mais n'admet pas de borne supérieure.

Exercice 6 : Borne supérieure $\Rightarrow$ borne inférieure.
Soit E ordonné tel que toute partie non vide et majorée admet une borne supérieure. Montrer que toute partie non vide et minorée admet une borne inférieure.

Exercice 7 : Borne supérieure parmi les intervalles.
Soit E l'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$ (y compris l'ensemble vide) ordonné par l'inclusion. Soient I, J deux intervalles. Qu'est-ce que $\inf(I, J)$? $\sup(I, J)$?

Exercice 8 ♠: Propriétés des réels et inégalités.

1. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, montrer $2\max(x, y) = x + y + |x - y|$ et $2\min(x, y) = x + y - |x - y|$.
2. Pour $x, y \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$, montrer : $2xy \leq \frac{x^2}{\lambda} + \lambda y^2$.
3. Montrer : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a + b < 2 + a^2 + b^2$ et $a + b < (1 + a^2)(1 + b^2)$.
4. Montrer que pour tout $(x, y, z) \in (\mathbb{R}_+)^3$, on a $(x^2 + 1)(y^2 + 1)(z^2 + 1) \geq 8xyz$.
5. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, \ldots, x_n) \in [0, 1]^n$. Montrer que l'un au moins des produits $\prod_{i=1}^n x_i$, $\prod_{i=1}^n (1 - x_i)$ est inférieur ou égal à 2^{-n}.
6. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \ldots, x_n \in [0, 1]$; montrer $\prod_{i=1}^n (1 - x_i) \geq 1 - \sum_{i=1}^n x_i$.
7. Montrer : $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2, \forall \lambda \in [0; 1]$, $\sqrt{\lambda a + (1 - \lambda)b} + \sqrt{(1 - \lambda)a + \lambda b} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Exercice 9 ♠: Exercice sur les majorants, minorants.
Pour chacun des ensembles suivants, dire s'il est majoré, minoré, borné. Trouver, sous réserve d'existence, le plus petit élément, le plus grand élément, la borne inférieure, la borne supérieure.

1. $A = \{e^n; n \text{ entier naturel}\}$.
2. $B = \{x^2 + 3x + 1; x \in]0, 1[\}$.
3. $C = \{\frac{1}{n} + (-1)^n; n \in \mathbb{N}^*\}$.
4. $I = \{x \in \mathbb{R}; -2 < x + (2x)^{-1} \leq 2\}$. Montrer également que I est la réunion de 2 intervalles.

Exercice 10 : Exercices sur les bornes supérieures et inférieures.

1. Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que $\forall (a, b) \in A \times B$, $a \leq b$. Montrer que $\mathrm{Sup}(A)$ et $\mathrm{Inf}(B)$ existent et que $\mathrm{Sup}(A) \leq \mathrm{Inf}(B)$.
2. Soit A une partie bornée non vide de $\mathbb{R}$. Montrer $\sup_{(x,y) \in A^2} |x - y| = \mathrm{Sup}(A) - \mathrm{Inf}(A)$.
3. Soit A une partie de $\mathbb{R}$ telle qu'il existe $a, b > 0$ tels que $A \subset [a, b]$. Montrer que la partie B de $\mathbb{R}$ formée des inverses des éléments de A est bornée, et exprimer ses bornes inférieure et supérieure en fonction de celles de A.

Exercice 11 : **Partie entière**. Les 4 questions sont indépendants.

1. Montrer : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad E(x)+E(y) \leq E(x+y) \leq E(x)+E(y)+1$.
2. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \quad E\Big(\frac{E(nx)}{n}\Big) = E(x)$.
3. Calculer $E(\sqrt{n^2+n+1})$ pour tout entier naturel n.
4. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$: montrer $E\Big(\dfrac{1}{a}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\Big) \geq \displaystyle\sum_{i=1}^{n} E\Big(\dfrac{x_i}{a}\Big)$.

Exercice 12 : **Partie entière.**

a) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ E(x)+E(-x) = \begin{cases} -1 \text{ si } x \in \mathbb{R}-\mathbb{Z}, \\ 0 \text{ si } x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

b) En déduire que si p, q sont deux entiers naturels non nuls premiers entre eux, alors

$$\sum_{k=1}^{q-1} E\big(k\frac{p}{q}\big) = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$$

13) Intervalles de $\mathbb{R}$ (*).

1. Montrer qu'un sous-ensemble I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad x \leq y \Rightarrow [x,y] \subset I.$$

2. Si I est un intervalle ouvert, montrer que : $\forall a \in I$, $\exists \epsilon > 0$ tel que $]a-\epsilon, a+\epsilon[\subset I$.

14) Parties denses.

Soit $A \subset \mathbb{R}$ vérifiant : $\begin{cases} \forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, a, b \in A \text{ tq } a < x < b, \\ \forall\, a, b \in A,\ \dfrac{a+b}{2} \in A. \end{cases}$.

Montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$.

15) Coefficients du binôme (*).

a) Montrer que pour $n, p \geq 1$, $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$.

b) Pour $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, établir la relation $(x+y)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}$.

c) En déduire la valeur des sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k, \quad \sum_{k=0}^{n} kC_n^k, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1}, \quad \sum_{0 \leq 2k \leq n} C_n^{2k}, \quad \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} C_n^{2k+1}.$$