DEVELOPPEMENTS POUR L'AGREGATION

25 septembre 2006

Table des matières

Chapitre 1

Algèbre

1.1 Caractérisation : $n \wedge \varphi(n) = 1$

Le but de ce développement est de montrer que si n est un entier tel que $n \wedge \varphi(n) = 1$ alors tout groupe G d'ordre n est cyclique. A savoir : la réciproque est vrai. Si n est un entier tel que pour tout groupe G d'ordre n, G est cyclique alors n vérifie $n \wedge \varphi(n) = 1$. On peut démontrer ceci en remarquant que si $n \wedge \varphi(n) \neq 1$ alors il existe un produit semi-direct non trivial de la forme $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times_\psi \mathbb{Z}/\frac{n}{p}\mathbb{Z}$.

On démontre ce résultat en plusieurs étapes.

1.1.1 Les entiers concernés

Si n vérifie $n \wedge \varphi(n) = 1$, on écrit $n = p_1^{\alpha_1} \times \cdots \times p_s^{\alpha_s}$ la décomposition en facteurs premiers de n. Comme

$$\varphi(n) = p_1^{\alpha_1 - 1}(p_1 - 1) \times \cdots \times p_s^{\alpha_s - 1}(p_s - 1)$$

alors nécessairement on a pour tout $i = 1, \ldots, s$, $\alpha_i = 1$ et $\forall i \neq j, p_i \not| p_j - 1$.

Réciproquement, si $\forall i \in \{1, \ldots, s\}, \alpha_i = 1$ et $\forall i \neq j, p_i \not| p_j - 1$ et si d est un diviseur premier commun à n et $\varphi(n)$, alors

$$d | p_1 \times \ldots p_s \Rightarrow \exists i \in \{1, \ldots, s\}, d | p_i$$

mais aussi

$$d | (p_1 - 1) \times \ldots (p_s - 1) \Rightarrow \exists j \in \{1, \ldots, s\}, d | p_j - 1$$

et donc $d = 1$ car $p_i \wedge p_j - 1 = 1$.

Remarque 1.1.2. *Il découle de ce qui précède que si n vérifie $n \wedge \varphi(n) = 1$ alors pour tout diviseur d de n on a aussi $d \wedge \varphi(d) = 1$. De plus on a $d \wedge \frac{n}{d} = 1$ vu que n est le produit de nombres premiers deux à deux distincts.*

1.1.3 Remarques préliminaires

La démonstration va se faire par l'absurde. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \wedge \varphi(n) = 1$ et un groupe G d'ordre n non cyclique. Par la suite on supposera n minimal pour cette propriété. Il résulte alors de la remarque 1.1.2 que tout sous-groupe propre de G est cyclique et que pour tout sous-groupe distingué H non trivial de G le groupe quotient $\frac{G}{H}$ est cyclique et $\mathrm{Card}(H) \wedge \mathrm{Card}\left(\frac{G}{H}\right) = 1$.

1.1.4 Le groupe G est simple

La démonstration se fait aussi par l'absurde. Soit H un sous-groupe distingué de G non trivial. Alors H est $\frac{G}{H}$ sont cycliques. Soit $y \in G$ tel que $\overline{y}$ soit un générateur de $\frac{G}{H}$. On note q le cardinal de $\frac{G}{H}$ et e l'ordre de y dans G. Comme

$$\overline{y}^e = \overline{y^e} = 1_{\frac{G}{H}}$$

on a $q|e$ et donc il existe r tel que $e = qr$. Alors y^r est d'ordre q car $ord(y^r) = \frac{ord(y)}{ord(y) \wedge r}$.

On va montrer que G est isomorphe au produit semi-direct interne de H et de $\langle y^r \rangle$. Il suffit pour cela de vérifier les trois points suivants (cours) :

1. H est disingué dans G : Vrai par hypothèse.
2. $H \cap \langle y^r \rangle = \{1\}$: en effet soit x dans cette intersection. Son ordre divise alors le cardinal de H et celui de $\frac{G}{H}$ donc il vaut 1.
3. $\langle H, y^r \rangle = G$: en effet on a H et $\langle y^r \rangle$ sous-groupes de $\langle H, y^r \rangle$ donc son cardinal est divisible par $\mathrm{Card}(H)$ et $\mathrm{Card}\left(\frac{G}{H}\right)$ donc par le produit qui vaut n car ces deux nombres sont premiers entre eux.

Ceci nous donne alors que G est bien isomorphe au produit semi-direct interne de H par $\langle y^r \rangle$. On obtient donc un morphisme (donné par la conjugaison) $\psi\colon \langle y^r \rangle \to \mathrm{Aut}(H)$. Or H étant cyclique, on a $\mathrm{Card}(\mathrm{Aut}(H)) = \varphi(\mathrm{Card}(H))$ et donc $\mathrm{Card}(\mathrm{Aut}(H))$ divise $\varphi(n)$ qui est premier avec n. Donc

$$\mathrm{Card}(\mathrm{Aut}(H)) \wedge \mathrm{Card}\left(\frac{G}{H}\right) = 1$$

et notre morphisme est forcément trivial. Ceci implique que le produit semi-direct est en fait un produit direct et donc que

$$G \simeq H \times \langle y^r \rangle \simeq \mathbb{Z}/(n/q)\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

le dernier isomorphisme résultant du lemme chinois. Or ceci est en contradiction avec le fait que G n'est pas cyclique : impossible. Donc G est un groupe simple.

1.1.5 Il existe une unique classe de conjugaison de sous-groupes maximaux

On énumère pour commencer un certain nombre de remarques plus ou poins triviales. Soit H un sous-groupe maximal de G et K un sous-groupe propre de G.

Notations : On note $N_G(H)$ le normalisateur de H dans G et R_H une famille de représentants des classes à gauches de G modulo H.

- $N_G(H) = H$ car G est simple.
- Si $K \not\subset H$ alors $\langle H, K \rangle = G$ car H est maximal.
- Si $K \not\subset H$ alors $N_G(H \cap K) = G$ car le normalisateur contient H et K (H et K sont abéliens car cycliques) donc $\langle H, K \rangle = G$.

– On a $k \subset H$ ou $H \cap K = \{1\}$ vu le point précédent et le fait que G est simple.

Supposons par l'absurde qu'il y ait au moins deux classes de conjugaison de sous-groupes maximaux. Soit ainsi H et K deux sous-groupes maximaux non conjugués.

– $N_G(H) = H$ car G est simple.
– Pour $g, k \in G$: $gHg^{-1} = kHk^{-1} \Leftrightarrow k^{-1}g \in H$ vu le point précédent.
– $\bigcup_{g \in G} (gHg^{-1} - \{1\}) = \coprod_{g \in R_H} (gHg^{-1} - \{1\})$ vu le point précédent.
– $\left(\coprod_{g \in R_H} (gHg^{-1} - \{1\}) \right) \cap \left(\coprod_{x \in R_K} (xKx^{-1} - \{1\}) \right) = \emptyset$ car H et K sont non conjugués et le fait que l'on a déjà montré $gHg^{-1} \cap xKx^{-1} = \{1\}$ ou $gHg^{-1} = xKx^{-1}$.

On en déduit alors que

$$\mathrm{Card}(G) \geq \mathrm{Card}\left(\left(\coprod_{g \in R_H} (gHg^{-1} - \{1\}) \right) \cup \left(\coprod_{x \in R_K} (xKx^{-1} - \{1\}) \right) \cup \{1\} \right)$$

et tous ces ensembles étant disjoints, on a

$$\mathrm{Card}(G) \geq \mathrm{Card}\left(\frac{G}{H} \right) (\mathrm{Card}(H) - 1) + \mathrm{Card}\left(\frac{G}{K} \right) (\mathrm{Card}(K) - 1) + 1$$

soit encore

$$\mathrm{Card}(G) \geq \mathrm{Card}(G) + \overbrace{\left(\mathrm{Card}(G) - \mathrm{Card}\left(\frac{G}{H} \right) - \mathrm{Card}\left(\frac{G}{K} \right) \right)}^{\geq 0} + 1$$

et ceci est une contradiction donc il existe une unique classe de conjugaison de sous-groupe maximaux.

1.1.6 Conclusion

On écrit $n = p_1 \times \cdots \times p_r$ la décomposition de n en facteurs premiers. Pour $i = 1, \ldots, r$ on se donne un p_i sous-groupe de Sylow de G que l'on note S_i. Chaque S_i est inclus dans un sous-groupe maximal de G que l'on note H_i.

On a $S_1 \subset H_1$ donc p_1 divise $\mathrm{Card}(H_1)$ et pour $i \in \{2, \ldots, r\}$ on a montré qu'il existe $g_i \in G$ tel que $g_i H_i g_i^{-1} = H_1$ donc

$$g_i S_i g_i^{-1} \subset H_1$$

et donc p_i divise aussi $\mathrm{Card}(H_1)$. Ceci nous donne alors que $n = p_1 \times \cdots \times p_r$ divise $\mathrm{Card}(H_1)$ donc $H_1 = G$ et ceci est une contradiction car un sous-groupe maximal est toujours un sous-groupe propre de G, d'où le résultat final.

1.2 Théorème de Burnside

On va maintenant montrer (un des) le théorème de Burnside : toutes les parties génératrices minimales des p-groupes ont même cardinal.

Lemme 1.2.1. *Soit G un p-groupe et H un sous-groupe propre de G. Alors H est strictement contenu dans son normalisateur.*

Preuve :
Pour voir cela on considère l'action par translation de H sur l'ensemble des classes à gauche de G modulo H, c'est à dire

$$\begin{array}{rccc} A: & H \times \frac{G}{H} & \longrightarrow & \frac{G}{H} \\ & (h, gH) & \longmapsto & hgH \end{array}$$

En écrivant l'équation aux classes on a :

$$\left|\frac{G}{H}\right| = \sum_{\substack{\omega \text{ orbite} \\ |\omega|=1}} 1 + \sum_{\substack{\omega \text{ orbite} \\ |\omega|>1}} |\omega|$$

Or si ω est une orbite de cardinal > 1, comme H est aussi un p-groupe, le cardinal de ω est forcément un multiple de p.
D'autre part, on pour $g \in G$:

$$\begin{aligned} |\mathrm{orb}(gH)| = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \forall h \in H, hgH = gH \\ &\Leftrightarrow \quad \forall h \in H, g^{-1}hgH = H \\ &\Leftrightarrow \quad \forall h \in H, g^{-1}hg \in H \\ &\Leftrightarrow \quad g \in N_G(H) \\ &\Leftrightarrow \quad gH \in \frac{N_G(H)}{H} \end{aligned}$$

Donc l'équation aux classes devient :

$$\left|\frac{G}{H}\right| = \left|\frac{N_G(H)}{H}\right| + kp$$

et comme $\left|\frac{G}{H}\right|$ est aussi un multiple de p, $\left|\frac{N_G(H)}{H}\right|$ est divisible par p. En particulier H est strictement inclus dans son normalisateur.

Lemme 1.2.2. *Soit H un sous-groupe de G. On a l'équivalence :*

$$H \triangleleft G \text{ et } \left|\frac{G}{H}\right| = p \Leftrightarrow H \text{ est maximal}$$

Preuve :
$\Leftarrow$: Si H est maximal, vu qu'il est strictement inclus dans son normalisateur, on a $N_G(H) = G$ donc $H \triangleleft G$. Puis H maximal est distingué $\Rightarrow \left|\frac{G}{H}\right| = p$ (voir [Cal],ce n'est pas dur).

Pour la réciproque voir [Cal].

Par la suite on note $\Phi(G)$ le sous-groupe de Frattini de G, c'est à dire l'intersection des sous-groupes maximaux de G.

Lemme 1.2.3. *$\frac{G}{\Phi(G)}$ est un $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-espace vectoriel de dimension finie.*

Preuve :
Notons $H_1, \ldots, H_n$ les sous-groupes maximaux de G et considérons l'application suivante

$$\varphi\colon \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \frac{G}{H_1} \times \cdots \times \frac{G}{H_n} \\ g & \longmapsto & (gH_1, \ldots, gH_n) \end{array}$$

Son noyau est $\Phi(G)$ donc par le théorème d'isomorphisme, on a que $\frac{G}{\Phi(G)}$ est isomorphe à un sous-groupe de $\frac{G}{H_1} \times \cdots \times \frac{G}{H_n}$. Or on a d'après le lemme précédent

$$\frac{G}{H_1} \times \cdots \times \frac{G}{H_n} \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

qui est un $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-espace vectoriel de dimension n et tout sous-groupe peut aussi être considéré comme un sous-espace vectoriel d'où le résultat.

On peut maintenant passer au théorème.

Théorème 1.2.4. Théorème de Burnside
Pour un p-groupe toutes les parties génératrices minimales ont même cardinal.

Preuve : Il suffit pour cela de montrer que :

$(x_1, \ldots, x_r)$ est génératrice et minimale dans $G \Leftrightarrow (x_1\Phi(G), \ldots, x_r\Phi(G))$ est génératrice et minimale dans $\dfrac{G}{\Phi(G)}$

car les parties génératrices et minimales de $\frac{G}{\Phi(G)}$ correspondent aux bases du $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-espace vectoriel $\frac{G}{\Phi(G)}$. Et pour cela il suffit de montrer que :

- $(x_1, \ldots, x_r)$ est génératrice dans $G \Rightarrow (x_1\Phi(G), \ldots, x_r\Phi(G))$ est génératrice dans $\frac{G}{\Phi(G)}$
- $(x_1, \ldots, x_r)$ est non génératrice dans $G \Rightarrow (x_1\Phi(G), \ldots, x_r\Phi(G))$ est non génératrice dans $\frac{G}{\Phi(G)}$

Le premier point est trivial à démontrer. Pour le second, si $(x_1, \ldots, x_r)$ est non génératrice alors il existe un sous-groupe maximal H de G tel que $\langle x_1, \ldots, x_r\rangle \subseteq H$. Si $\pi\colon G \to \frac{G}{\Phi(G)}$ désigne la projection canonique, on a alors

$$\pi(\langle x_1, \ldots, x_r\rangle) \subseteq \pi(H)$$

qui est un sous-groupe propre de $\frac{G}{\Phi(G)}$. En effet si $x \notin H, \pi(x) \notin \pi(H)$ car le contraire signifierait que $x \in H\Phi(G) = H$ car $\Phi(G) \subseteq H$ et c'est une contradiction.

On a donc bien démontré le résultat.

1.3 Théorème de Weber

Voici maintenant un théorème sur les zéros des polynômes à coefficients entiers. Au fait j'ai attribué ce théorème à Weber suite à la réalisation d'une variable aléatoire uniforme sur l'ensemble $\{\mathrm{Kronecker}; \mathrm{Weber}\}$! !

Théorème 1.3.1. Théorème de Weber *Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme unitaire à coefficients entiers tel que toutes ses racines complexes soient de module inférieur ou égal à 1. Alors celles-ci sont soit 0 soit des racines de l'unité.*

Preuve :

• Posons

$$A_N = \left\{ \begin{array}{ccc} Q \in \mathbb{Z}[X] & \text{unitaire} & \text{; les racines de } Q \text{ dans } \mathbb{C} \\ & \mathrm{Deg}(Q) = N & \text{sont en module inférieur à } 1 \end{array} \right\}$$

On va donner une borne pour le cardinal de A_N. Soit $Q \in A_N$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ ses racines dans $\mathbb{C}$ et $\sigma_1, \ldots, \sigma_N$ les fonctions symétriques élémentaires des racines. On a

$$Q = \prod_{i=1}^{N} (X - \lambda_i) = \sum_{i=0}^{N} (-1)^{N-i} \sigma_{N-i} X^i$$

donc le coefficient q_k de X^k dans Q est $(-1)^{N-k}\sigma_{N-k}$ et on a donc

$$|q_k| = \left| \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{N-k} \leq N} \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_{N-k}} \right| \leq \left| \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{N-k} \leq N} 1 \right| \leq \mathrm{C}_N^{N-k}.$$

Comme de plus $q_k \in \mathbb{Z}$ ceci nous laisse $2\mathrm{C}_N^{N-k} + 1$ choix pour q_k. Au final on a

$$\sharp A_N \leq \prod_{k=0}^{N} (2\mathrm{C}_N^{N-k} + 1) < \infty.$$

Donc **le cardinal de A_n est fini**.

• Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ donné par les hypothèses et soit N son degré et $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ ses racines. Soit $a_0, \ldots, a_N \in \mathbb{Z}$ tels que

$$P(X) = \sum_{i=0}^{N} a_i X^i.$$

Pour $k \in \mathbb{N}$ on pose

$$P^{(k)} = \prod_{i=1}^{N} (X - \lambda_i^k) = \sum_{i=0}^{N} a_i^{(k)} X^i.$$

Il est clair que les racines de $P^{(k)}$ sont en module inférieur à 1 et on va maintenant montrer que $P^{(k)} \in \mathbb{Z}[X]$ et ceci nous donnera : $P^{(k)} \in A_N$.

Pour cela, posons pour $r = 1, \dots, N$ (Σ_i désign le i-ème polynôme symétrique élémentaire de $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_N]$),

$$\Sigma_r^{(k)}(X_1, \dots, X_N) = \Sigma_r(X_1^k, \dots, X_N^k) \in \mathbb{Z}^\sigma[X_1, \dots, X_N].$$

D'après le théorème de structure de polynômes symétriques, il existe $R_r^{(k)} \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_N]$ tel que

$$\Sigma_r^{(k)}(X_1, \dots, X_N) = R_r^{(k)}(\Sigma_1, \dots, \Sigma_N)$$

Nous avons alors

$$\begin{array}{rcl} a_i^{(k)} & = & (-1)^{N-i}\Sigma_i^{(k)}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \\ & = & (-1)^{N-i}R_i^{(k)}(-a_{N-1}, \dots, (-1)^N a_0) \\ & \in & \mathbb{Z} \text{ car } R_i^{(k)} \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_N] \text{ et } a_0, \dots, a_N \in \mathbb{Z} \end{array}$$

On a donc bien $P^{(k)} \in A_N$.

• Comme $\forall k \in \mathbb{N}, P^{(k)} \in A_N$ et que A_N est fini, il existe donc $k \neq k'$ tels que $P^{(k)} = P^{(k')}$. Il existe donc une permutation σ de l'ensemble $\{1 \dots, N\}$ telle que

$$(\lambda_1^k, \dots, \lambda_N^k) = (\lambda_1^{k'}, \dots, \lambda_N^{k'})$$

Montrons maintenant que $\forall i, \lambda_i$ est soit 0 soit une racine de l'unité.
Soit donc $i \in \{1, \dots, N\}$ tel que λ_i ne soit pas nul et r le cardinal de l'orbite de i sous l'action de σ. On a

$$\lambda_i = (\lambda_i^k)^{\frac{1}{k}} = (\lambda_{\sigma(i)}^{k'})^{\frac{1}{k}}$$

et en procédant de la même manière on montre par récurrence que

$$\forall n, \lambda_i = \lambda_{\sigma^n(i)}^{\left(\frac{k'}{k}\right)^n}$$

En choisissant $n = r$ on a

$$\lambda_i = \lambda_i^{\left(\frac{k'}{k}\right)^r}$$

et comme λ_i n'est pas nul

$$\lambda_i^{k^r - k'^r} = 1$$

et ceci montre que λ_i est bien une racine r-ième de l'unité.

Remarque 1.3.2. *Il est important que P soit unitaire comme le montre le contre-exemple trivial $3X - 1$.*

Ce théorème montre aussi que P est alors un produit de polynômes cyclotomiques et d'un facteur X^n. Ceci assure que les seuls polynômes irréductilbles unitaires de $\mathbb{Z}[X]$ ayant toutes leurs racines dans le disque unité sont les polynômes cyclotomiques et le polynôme X.

En raison de l'utilisation des polynômes symétriques et du dernier petit calcul, ce développement passe très bien dans la leçon sur les **permutations**. *Tu peux aussi bien sûr l'utiliser pour celle des* **polynômes symétriques** *et tout ce qui concerne* **l'algèbre des polynômes à n indéterminées** *et vu le peu de développement intéressant au programme sur ces leçons, il est pour cela assez intéressant. Ensuite, vu le sujet du développement je l'avais aussi placé dans les leçons des* **racines des polynômes**, **nombres complexes de module 1** *et vu la première partie de la démonstration je l'avais aussi placé dans les* **méthodes combinatoires et dénombrements**...

1.4 Groupe simple d'ordre 60

Théorème 1.4.1. *Tout groupe simple d'ordre 60 est isomorphe à $\mathcal{A}_5$.*

Preuve : Soit G un groupe simple d'ordre 60 et a_5 le nombre de 5-Sylow de G. D'après les théorèmes de Sylow on a $a_5 \equiv 1\,[5]$ et $a_5|12$. Donc $a_5 \in \{1, 6\}$ et comme G est simple on a $a_5 = 6$.

Considérons alors l'action de G sur l'ensemble de ses 5-Sylow $\mathcal{S}_5$. Celle-ci nous donne un morphisme de G dans l'ensemble des permutations de $\mathcal{S}_5$, et $\mathcal{S}_5$ étant de cardinal 6, on obtient ainsi un morphisme

$$\varphi\colon G \to S_6.$$

Comme G est simple on a φ est injectif ou trivial. Or les théorèmes de Sylow assurent que l'action décrite ci-dessus est transitive donc φ ne peut être trivial et φ est injectif.

Soit $\varepsilon\colon S_6 \to \{-1, 1\}$ la signature. Pour les mêmes raisons que précédemment $\varepsilon \circ \varphi$ est injectif ou trivial. Or pour des raisons de cardinal évidentes il ne peut être injectif et il est donc trivial d'où

$$\varepsilon(\varphi(G)) = \{1\}$$

ce qui assure que

$$\varphi(G) \subset \mathcal{A}_6.$$

On a $\#\mathcal{A}_6 = 360$ et $\#\varphi(G) = 6$. Il reste alors juste à montrer qu'un sous-groupe simple de $\mathcal{A}_6$ d'indice 6 est isomorphe à $\mathcal{A}_5$. Un raisonnement quasi-similaire est fait dans [Tau2] à la page 45.

Soit H un sous-groupe de $\mathcal{A}_6$ d'indice 6. Faisons opérer H par translations à gauche sur le quotient $\frac{\mathcal{A}_6}{H}$ qui est une ensemble de cardinal 6. Comme l'action est non triviale et que H est simple ceci nous donne un morphisme injectif θ de H dans S_6 et par un raisonnement identique à celui fait plus haut avec les signatures, $\theta(H) \subset \mathcal{A}_6$. D'autre part $\forall h \in H$ on a $\theta(h)(H) = H$ et donc tous les éléments de $\theta(H)$ ont un point fixe, ie $\theta(H)$ est le stabilisateur de la classe H dans $\frac{\mathcal{A}_6}{H}$. Donc

$$H \sim \theta(H) \sim \mathcal{A}_5.$$

Remarque 1.4.2. *Ce théorème est particulièrement intéressant pour la classification des groupes simples de cardinal ≤ 100 (voir l'exercice 1.18 de [Fra]). En particulier $\mathcal{A}_5$ est le seul groupe simple d'ordre ≤ 100.*

Chapitre 2

Analyse

2.1 Formule sommatoire de Poisson et sommes de Riemann :

Rappel : pour $F \in L^1(\mathbb{R})$ on définit la transformée de Fourier de F par

$$\widehat{F}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i x t} F(t)\, dt.$$

Proposition 2.1.1. Formule sommatoire de Poisson : *Soit $F \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R})$. On suppose que :*

$$\exists M > 0, \alpha > 1, \forall x \in \mathbb{R}, |F(x)| \leq \frac{M}{(1+|x|)^\alpha} \quad \textit{et} \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{F}(n)| < \infty.$$

On a alors la relation :

$$\sum_{-\infty}^{\infty} F(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} \widehat{F}(n)$$

Preuve : Voir [Z-Q].

On peut alors démontrer l'application suivante :

Théorème 2.1.2. *Soit $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, il existe une constante C_q telle que :*

$$\forall N \geq 1, \ \left| \int_{\mathbb{R}} f(t)\, dt - \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{N}\right) \right| \leq \frac{C_q}{N^q}$$

Preuve : Posons $g(x) = f\left(\frac{x}{N}\right)$. Alors g vérifie les hypothèses de la proposition 2.1.1 et on obtient donc

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{g}(k).$$

Or en effectuant un changement de variable, on voit que $\widehat{g}(x) = N\widehat{f}(Nx)$.
De plus $\widehat{g}(0) = N\widehat{f}(0) = N\int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt$. En utilisant tout ceci, on obtient :

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt - \frac{1}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{N}\right)\right| \leq \sum_{k\neq 0} |\widehat{f}(Nk)|$$

En utilisant ensuite que f est de classe C^q et est à support compact, on a :

$$\forall x \neq 0, |\widehat{f}(x)| = \left|\frac{1}{(2\pi i x)^q}\widehat{f^{(q)}}\right| \leq \frac{1}{(2\pi|x|)^q}\|f^{(q)}\|_1$$

et on obtient alors

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt - \frac{1}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{N}\right)\right| \leq \frac{\|f^{(q)}\|_1}{N^q}\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^q}$$

d'où le résultat.

Remarque 2.1.3. *Attention il faut quand même se méfier de l'apparente beauté de la majoration. Même si l'on peut obtenir n'importe quelle vitesse de convergence polynômiale, la constante C_q obtenue tend elle aussi très vite vers l'infini ! Elle est en fait de l'ordre de $q!$ pour les fonctions quasi-analytiques...*

2.2 Formule des compléments :

Le but de cet exercice est d'obtenir la formule des complémenents par une méthode élémentaire.

Lemme 2.2.1. *Pour $n, q \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 0, 2q - n \geq 2$, on a :*

$$\int_0^{\infty} \frac{x^n}{1 + x^{2q}}\,dx = \frac{\pi}{2q\sin\left(\frac{\pi(n+1)}{2q}\right)}$$

Preuve : Voir [Tau1].

Lemme 2.2.2. *Pour $\alpha \in]0;1[$, on a :*

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{-\alpha}}{1 + x}\,dx = \frac{-\pi}{\sin(\pi\alpha)}$$

Preuve :
Soit $\alpha \in]0;1[\cap \mathbb{Q}$. On écrit $\alpha = \frac{p}{q}$ avec $p, q \geq 1$ et $q - p \geq 1$ (car $\alpha = \frac{p}{q} < 1$). On a :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \frac{x^{-\alpha}}{1+x}\,dx &= \int_0^{\infty} \frac{x^{-\frac{2p}{2q}}}{1+x}\,dx \\
&= 2q \int_0^{\infty} \frac{u^{2q-2p-1}}{1+u^{2q}}\,du \qquad (\text{ avec } u = x^{1/(2q)}) \\
&= 2q \times \frac{\pi}{2q \sin\left(\frac{\pi(2q-2p-1+1)}{2q}\right)} \qquad \text{vu le lemme 2.2.1} \\
&= \frac{-\pi}{\sin(\pi\alpha)}
\end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\forall \alpha \in \mathbb{Q},\ \int_0^{\infty} \frac{x^{-\alpha}}{1+x}\,dx = \frac{-\pi}{\sin(\pi\alpha)}$$

or ces deux fonctions étant continues sur $]0;1[$ (appliquer le théorème de continuité sous l'intégrale avec majoration sur tout compact) et coïncident sur $]0;1[\cap\mathbb{Q}$ donc sont égales sur $]0;1[$ par densité et continuité.

Remarque 2.2.3. *L'intérêt d'utiliser la continuité de l'intégrale paramétrée et non l'holomorphie est (outre le fait de ne rien admettre sur la fonction Γ bien que l'holomorphie ne soit pas bien dure à montrer) d'utiliser nécessairement la densité de $\mathbb{Q}$ dans $]0;1[$ pour dire que les deux fonctions coïncident (et donc de pouvoir mettre ceci dans la leçon sur les parties denses) alors qu'un argument d'holomorphie ne demande qu'un point d'accumulation pour avoir l'égalité des deux fonctions et ne nécessite donc pas d'arguments de densité.*

Théorème 2.2.4. formule des compléments : *Si $\forall x > 0, \Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$ désigne la fonction Γ d'Euler, on a :*

$$\forall x \in]0;1[, \qquad \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

Preuve :
Soit $z \in]0;1[$, on a :

$$\begin{aligned}
\Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} x^{z-1}y^{-z}e^{-x-y}\,dx\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^2} \left(\frac{y}{x}\right)^{-z} e^{-x\left(1+\frac{y}{x}\right)} \frac{1}{x}\,dx\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^2} f\circ\varphi(x,y)\,|\det(J\varphi)|\,dx\,dy
\end{aligned}$$

où l'on a posé :

$$\forall x, y \geq 0,\ \varphi(x,y) = \left(x, \frac{y}{x}\right) \qquad \text{et} \qquad \forall u, v \geq 0,\ f(u,v) = v^{-z}e^{-u(1+v)}$$

En utilisant alors la formule de changement de variables dans les intégrales, on obtient :

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \int_{\mathbb{R}_+^2} v^{-z}e^{-u(1+v)}\,du\,dv$$

On calcule alors cette double intégrale en intégrant d'abord par rapport à u puis v en utilisant le lemme 2.2.2. Ceci donne :

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(1-z) &= -\int_0^\infty \frac{v^{-z}}{1+z}\,dz \\ &= \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.\end{aligned}$$

Remarque 2.2.5. *Selon la leçon où tu places ce développement, tu peux alors bien sûr en déduire l'égalité pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ pour peu que tu aies placé quelque part la fait que la fonction Γ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{N}^*$. Attention le simple prolongement à $\{z \in \mathbb{C}; \Re(z) > 0\}$ ne suffit pas car l'ensemble de définition de $\Gamma(z)\Gamma(1-z)$ est alors la bande $\{z \in \mathbb{C}; 0 < \Re(z) < 1\}$! ! !*

2.3 Sur les inclusions des espaces L^p :

Théorème 2.3.1. *On note $\mathcal{B} = \{E \in \mathcal{A}; \mu(E) < \infty\}$. Sont équivalentes les conditions suivantes sur un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.*

1. *$L^p(\mu) \supset L^q(\mu)$ pour un couple $(p,q) \in [1;\infty[$ où $p < q$.*
2. *$\sup_{E \in \mathcal{B}} \mu(E) < \infty$.*
3. *$L^p(\mu) \supset L^q(\mu)$ pour tous les couples $(p,q) \in [1,\infty[$ où $p < q$.*

Dans le cas où $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré σ-fini alors la condition (2) devient $\mu(\Omega) < \infty$.

Preuve : Voir [Rud] page 146 pour les trois premières équivalences.

Dans le cas σ-fini. Si $\mu(\Omega) < \infty$ alors il est trivial de voir que l'on a (2).

Réciproquement si l'on a (2). Soit $(A_n)_n$ une suite croissante de sous-ensembles mesurables de Ω telle que

$$\bigcup_n A_n = \Omega \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \mu(A_n) < \infty$$

Alors vu (2), il existe $M > 0$ tel que $\forall E \in \mathcal{B}, \mu(E) \leq M$. Comme $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \in \mathcal{B}$, on a $\forall n \in \mathbb{N}, \mu(A_n) \leq M$ et en utilisant le théorème de la limite croissante on voit que $\mu(\Omega) \leq M$.

Remarque 2.3.2. *Attention aux erreurs dans le Rudin ! ! ! En effet il faut bien prendre le sup sur $\mathcal{B}$ dans ce théorème comme le montre le contre-exemple :*

$$\Omega = \{0; 1\} \text{ et } \mu(0) = 1, \mu(1) = \infty$$

Je ne mets pas non plus dans ce théorème les cas $p < 1$ comme il est fait dans ce livre. En effet, la démonstration précédente repose sur le théorème du graphe fermé. Or premièrement pour $p < 1$, L^p n'est pas un espace normé donc ceci sort du cadre du programme de l'agrégation et plus sérieusement si $p < 1$, dans la plupart des cas L^p n'est même pas localement convexe donc n'est pas un espace de Fréchet, hypothèse qui je crois est essentielle dans la preuve du graphe fermé ! !

Théorème 2.3.3. *On note $\mathcal{M} = \{E \in \mathcal{A}; \mu(E) > 0\}$. Sont équivalentes les conditions suivantes sur un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.*

1. *$L^p(\mu) \subset L^q(\mu)$ pour un couple $(p, q) \in [1; \infty[$ où $p < q$.*
2. *$\inf\limits_{E \in \mathcal{M}} \mu(E) > 0$.*
3. *$L^p(\mu) \subset L^q(\mu)$ pour tous les couples $(p, q) \in [1, \infty[$ où $p < q$.*

Dans le cas où $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré $\sigma - fini$ ces conditions sont équivalentes au fait que Ω est à un ensemble de mesure nulle près une réunion dénombrable d'atomes $(X_n)_n$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \mu(X_n) \geq d > 0$.

Preuve : Toujours [Rud] page 146 pour les trois premières équivalences.

Ensuite je rappelle qu'un atome X est un sous-ensemble mesurable de Ω tel que $\mu(X) > 0$ et pour tout sous-ensemble X' de X mesurable tel que $\mu(X') < \mu(X)$ on a $\mu(X') = 0$. Il résulte de la définition que deux atomes sont à un ensemble de mesure nulle près disjoints où égaux. Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille de représentants des différents atomes de Ω aux ensembles de mesure nulle près, ie $\forall X$ atome de Ω, il existe un unique $i \in I$ tel que $X = X_i$ à un ensemble de mesure nulle près.

On va montrer que I est dénombrable. Soit $(A_n)_n$ une suite croissante de sous-ensembles mesurables de Ω telle que

$$\bigcup_n A_n = \Omega \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \mu(A_n) < \infty.$$

Soit C_n l'ensemble des $i \in I$ tels que $X_i \subset A_n$ à un ensemble de mesure nulle près et

$$d = \inf_{E \in \mathcal{M}} \mu(E)$$

($d > 0$). Si $i_1, \ldots, i_r \in C_n$ alors les $X_{i_1}, \ldots, X_{i_r}$ étant disjoints, on a

$$rd \leq \mu(X_{i_1}) + \cdots + \mu(X_{i_r}) \leq \mu(A_n)$$

donc $\mathrm{Card}(C_n) \leq \frac{\mu(A_n)}{d}$ donc C_n est fini. D'autre part, on a

$$I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n.$$

En effet si $i \in I$, par le théorème de convergence croissante on a

$$\mu(A_n \cap X_i) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu(X_i)$$

or X_i étant un atome on a $\mu(X_i \cap A_n) = \mu(X_i)$ ou 0 donc la suite $(\mu(A_n \cap X_i))_n$ est stationnaire et converge vers $\mu(X_i)$. Par suite il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(A_n \cap X_i) = \mu(X_i)$ et $X_i \subset A_n$ à un ensemble de mesure nulle près $\Rightarrow i \in C_n$. Finalement I est une réunion dénombrable d'ensembles finis donc est lui-même dénombrable. Par la suite on prend $I = \mathbb{N}$.

On va montrer $\bigcup_n X_n = \Omega$ à un ensemble de mesure nulle près. Pour cela on pose

$$M = \Omega \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$$

(M est mesurable). Si par l'absurde $\mu(M) > 0$ alors on a $\mu(M) > d$ et M ne contenant pas d'atomes il existe un sous-ensemble mesurable M_1' de M de mesure non nulle et strictement positive. Quitte à remplacer M_1 par $M \setminus M_1$ on peut supposer $\mu(M_1) \leq \frac{\mu(M)}{2}$. En itérant ce raisonnement on construit une suite M_n de sous-ensembles mesurables de M tels que

$$\mu(M_n) > 0 \quad \text{et} \quad \mu(M_n) \leq \frac{\mu(M)}{2^n}.$$

Or ceci est une contradiction car d'un coté on obtient $\mu(M_n) \to 0$ et d'un autre on a

$$\mu(M_n) > 0 \Rightarrow \mu(M_n) \geq d > 0.$$

Donc M est bien de mesure nulle.

Réciproquement s'il existe une suite $(X_n)_n$ d'atomes disjoints de Ω telle que

$$\forall n, \mu(X_n) \geq d > 0 \text{ et } \mu\left(\Omega \setminus \bigcup_n X_n\right) = 0$$

alors on obtient facilement la condition (2) vu que tout sous-ensemble mesurable de Ω est à un ensemble de mesure nulle près une réunion au plus dénombrable de ces atomes.

Remarque 2.3.4. *La dernière condition signifie que l'espace est en un certain sens isomorphe à un* $L^1(\mathbb{N}; \mathcal{P}(\mathbb{N}); \mu)$ *où* μ *est une mesure sur* $\mathbb{N}$ *telle que* $\forall n, \mu(n) \geq d > 0$ *(où bien à un sous-ensemble fini de* $\mathbb{N}$*, ceci étant également possible).*

D'autre part, le raisonnement effectué dans la dernière partie du théorème est typique de ceux utilisé dans les questions de dénombrabilité (points de discontinuité des fonctions monotones, familles sommables,...) et donc il me semble intéressant pour la leçon sur la dénombrabilité.

2.4 Premier théorème de Hardy pour les intégrales

Rappels : Soit $f \in C_b^0 PM(\mathbb{R}^+)$, on définit sa transformée de Laplace par

$$\forall \lambda > 0, \mathcal{L}(\lambda) = \int_0^{\infty} f(u) e^{-\lambda u}\, du$$

Le fait de supposer f bornée sert juste à s'assurer que l'intégrale définie ci-dessus converge bien pour $\lambda > 0$.

Théorème 2.4.1. Premier théorème de Hardy :
Soit $f \in C_b^0 PM(\mathbb{R}^+)$ telle que

$$\exists l \in \mathbb{R}, \mathcal{L}(\lambda) \overset{\lambda \to 0^+}{\longrightarrow} l.$$

On suppose de plus que

$$f(t) = o\left(\frac{1}{t}\right).$$

Alors

$$\int_0^{\infty} f(u)\, du \text{ converge et vaut } l.$$

Preuve : On remarque tout d'abord que :

$$t|f(t)| = o(1) \Rightarrow \frac{1}{t}\int_0^t u|f(u)|\, du = o(1) (Csaro).$$

On a $\forall \lambda > 0$ (on utilise :$\forall u, 0 \leq u \leq 1 \Rightarrow 1 - e^{-u} \leq u$) :

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^{\frac{1}{\lambda}} f(u)\, du - \int_0^{\infty} f(u) e^{-\lambda u}\, du \right| &= \left| \int_0^{\frac{1}{\lambda}} f(u)(1 - e^{-\lambda u})\, du + \int_{\frac{1}{\lambda}}^{\infty} f(u) e^{-\lambda u}\, du \right| \\
&\leq \lambda \int_0^{\frac{1}{\lambda}} |f(u)| u\, du + \int_{\frac{1}{\lambda}}^{\infty} |u f(u)| \frac{e^{-\lambda u}}{u}\, du \\
&\leq \lambda \int_0^{\frac{1}{\lambda}} |f(u)| u\, du + \sup_{[1/\lambda;\infty[} |u f(u)| \int_{\frac{1}{\lambda}}^{\infty} \frac{e^{-\lambda u}}{u}\, du \\
&\leq \lambda \int_0^{\frac{1}{\lambda}} |f(u)| u\, du + \sup_{[1/\lambda;\infty[} |u f(u)| \int_1^{\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, du \\
&\overset{\lambda \to 0^+}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Donc $\int_0^{\infty} f(u)\, du$ converge et vaut l. (Comme $t f(t) = o(1)$, on a bien $\sup_{[1/\lambda;\infty[} |u f(u)| = o(1)$).

2.5 Deuxième théorème de Hardy pour les intégrales

<u>Théorème</u> 2.5.1. Deuxième théorème de Hardy
Soit $f \in C_b^0 PM(\mathbb{R}^+)$ telle que

$$\exists l \in \mathbb{R}, \mathcal{L}(\lambda) \overset{\lambda \to 0^+}{\longrightarrow} l.$$

On a alors l'équivalence :

$$\int_0^\infty f(u)\,du \text{ converge et vaut } l \Leftrightarrow \int_0^t uf(u)\,du = o(t).$$

Preuve : On suppose dans un premier temps que $l = 0$. On posa aussi

$$a(t) = \int_0^t f(u)\,du \;\text{ et }\; b(t) = \int_0^t uf(u)\,du$$

Si $\int_0^\infty f(u)\,du$ converge et vaut 0, on a $a(t) = o(1)$. En faisant une IPP, on a :

$$\int_0^t uf(u)\,du = [ua(u)]_0^t - \int_0^t a(u)\,du$$

Or $ta(t) = o(t)$ car $a(t) = o(1)$ et (Césaro) $\int_0^t a(u)\,du = o(t)$ d'où la première implication.

Réciproquement, en faisant une IPP dans les intégrales à support compact et en passant à la limite, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty f(u)e^{-\lambda u}\,du &= \int_1^\infty uf(u)\frac{e^{-\lambda u}}{u}\,du \\
&= \left[b(u)\frac{e^{-\lambda u}}{u}\right]_1^\infty - \int_1^\infty b(u)\frac{-\lambda e^{-\lambda u}u - e^{-\lambda u}}{u^2}\,du \\
&= -b(1)e^{-\lambda} + \lambda\int_1^\infty \frac{b(u)}{u}e^{-\lambda u}\,du + \int_1^\infty \frac{b(u)}{u^2}e^{-\lambda u}\,du
\end{aligned}$$

Par hypothèse, on a $\int_1^\infty f(u)e^{-\lambda u}\,du \overset{\lambda\to 0^+}{\to} -\int_0^1 f(u)\,du$.

Puis $-b(1)e^{-\lambda} \overset{\lambda\to 0^+}{\to} -b(1)$.

Ensuite, utilisant le premier théorème de Hardy et la fait que $\frac{b(u)}{u^2} = o\left(\frac{1}{u}\right)$, on a que

$$\int_1^\infty \frac{b(u)}{u^2}e^{-\lambda u}\,du \overset{\lambda\to 0^+}{\to} \int_1^\infty \frac{b(u)}{u^2}\,du$$

et l'on sait aussi que cette dernière intégrale est convergente.

Seul le dernier terme nécessite un peu de travail. On va montrer qu'il tend vers 0. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\frac{b(u)}{u} = o(1)$ il existe $A > 0$ tel que $\forall t \geq A, \sup_{[t,\infty[} \left|\frac{b(u)}{u}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Ensuite il existe $\delta > 0, \forall \lambda \leq \delta, \lambda \int_1^A \left|\frac{b(u)}{u}\right| du \leq \frac{\varepsilon}{2}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\left|\lambda \int_1^\infty \frac{b(u)}{u} e^{-\lambda u}\, du\right| &\leq \lambda \int_1^A \left|\frac{b(u)}{u} e^{-\lambda u}\right| du + \sup_{[A;\infty[} \left|\frac{b(u)}{u}\right| \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda u}\, du \\
&\leq \lambda \int_1^A \left|\frac{b(u)}{u}\right| du + \sup_{[A;\infty[} \left|\frac{b(u)}{u}\right| \times 1 \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

En passant à la limite dans l'égalité qu'on avait obtenue on a donc

$$-\int_0^1 f(u)\, du = -b(1) + \int_1^\infty \frac{b(u)}{u^2}\, du \tag{2.1}$$

Soit $r > 1$ en faisant une IPP, on obtient

$$\int_1^r \frac{b(u)}{u^2}\, du = \left[\frac{-b(u)}{u}\right]_1^r - \int_1^r \frac{uf(u)}{-u}\, du$$

et en passant à la limite en $r\infty$ (possible car l'on sait que l'intégrale de gauche converge et que $\frac{b(u)}{u} = o(1)$) on a que l'intégrale de f converge et :

$$\int_1^\infty \frac{b(u)}{u^2}\, du = b(1) + \int_1^\infty f(u)\, du$$

En combinant avec (2.1) on trouve $\int_0^\infty f(u)\, du = 0$.

Pour passer au cas $l \neq 0$ on applique ce qui précède à $g(u) = f(u) - le^{-u}$ car on a bien

$$\mathcal{L}_g(\lambda) = \mathcal{L}_f(\lambda) - \frac{l}{1+\lambda} \xrightarrow{\lambda \to 0^+} 0$$

et le fait d'ajouter une exponentielle ne modifie pas les conditions sur les équivalents car elle est négligeable devant ceux considérés.

Remarque 2.5.2. *Ce théorème s'applique très bien à la fonction* $\frac{\sin(t)}{t}$.

D'autre part tu peux avoir exactement les mêmes énoncés pour les séries entières avec les mêmes démonstrations pour peu que tu remplaces les intégrales par des séries, les transformées de Laplace par des séries entières, la limite $\lambda \to 0^+$ *par la limite* $z \to 1^-$ *et les IPP par les transformations d'Abel.*

2.6 Calcul des $\xi(2k)$

Le but de cet exercice est de donner une expression explicite pour la fonction ξ de Riemann sur les entiers pairs, c'est-à-dire de calculer pour $k \in \mathbb{N}^*$

$$\xi(2k) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{2k}}.$$

On commence par démontrer le

<u>Lemme</u> 2.6.1. *La série de fonctions*

$$\frac{1}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + n^2}$$

converge simplement sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ *vers la fonction* $\alpha \mapsto \operatorname{cotan}(\alpha\pi)$.

Preuve : Soit $\alpha \notin \mathbb{Z}$. Calculons les coefficients de Fourier de la focntion 2π-périodique définie sur $[-\pi;\pi]$ par $t \mapsto \cos(\alpha t)$. Cette fonction est paire, on calcule donc pour $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(\alpha t)\cos(nt)\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left(\cos((\alpha+n)t) + \cos((\alpha-n)t)\right)\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin((\alpha+n)\pi)}{\alpha+n} + \frac{\sin((\alpha-n)\pi)}{\alpha-n}\right) \\
&= \frac{2\alpha(-1)^n \sin(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2-n^2)}
\end{aligned}$$

On vérifie d'autre part que $a_0 = \dfrac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi}$. Comme la fonction $t \mapsto \cos(\alpha t)$ est continue et de classe C^1 par morceaux, elle est la somme de sa série de Fourier. Donc $\forall t \in [-\pi;\pi]$

$$\cos(\alpha t) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha(-1)^n \sin(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2-n^2)}\cos(nt).$$

En prenant $t = \pi$ et en divisant l'égalité obtenue par $\sin(\alpha\pi)$, on a pour $\alpha \notin \mathbb{Z}$

$$\pi\operatorname{cotan}(\alpha\pi) - \frac{1}{\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} \qquad \blacksquare$$

Remarque 2.6.2. *En fait, la série ci-dessus converge normalement sur tout sous-ensemble compact de* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ *mais nous ne l'utiliserons pas pour la suite.*

Si $0 \leq \alpha < 1$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2\alpha}{n^2}\frac{1}{1-(\alpha/n)^2} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{-2\alpha}{n^2}\frac{\alpha^{2k}}{n^{2k}} \\
&= -2\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{2k-1}\xi(2k)
\end{aligned}$$

Les séries ci-dessus ont pu être inversées car elles sont à termes positifs. Cette expression nous donne le développement limité en zéro de la fonction $\emptyset \mapsto \pi\text{cotan}(\pi\alpha) - \frac{1}{\alpha}$. Il ne reste plus qu'à calculer de façon explicite les termes du développement limité de cette fonction pour obtenir les valeurs cherchées. Par exemple, à l'ordre 5 on a

$$\pi\text{cotan}(\pi x) - \frac{1}{x} = -\frac{\pi^2}{3}x - \frac{\pi^4}{45}x^3 - \frac{2}{945}x^5 + o(x^5)$$

d'où les valeurs suivantes

$$\xi(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \xi(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \xi(6) = \frac{\pi^6}{945} \qquad \blacksquare$$

2.7 Intégrales à dérivée non intégrable

Nous allons maintenant traiter une intégrale paramétrée dont la dérivée de l'intégrand par rapport au paramètre n'est pas intégrable mais pseudo-intégrable.

Exercice 2.7.1. *Calcul de l'intégrale paramétrée* $x \mapsto G(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)}\,dt$.

Réponse : On remarque tout d'abord que cette fonction est impaire, il suffit donc de la calculer pour $x \geq 0$. L'idée est d'utiliser la méthode de l'équation différentielle. Les théorèmes généraux permettent facilement de montrer que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que

$$G'(x) = \int_0^\infty \frac{\cos(tx)}{1+t^2}\,dt.$$

Le problème est que le candidat pour la dérivée seconde : $-\displaystyle\int_0^\infty \frac{t\sin(tx)}{1+t^2}\,dt$ n'est pas intégrable mais seulement pseudo-intégrable.

On contourne cette difficulté en utilisant le lemme d'Abel pour les intégrales. Pour cela, on regarde

$$H_n(x) = \int_0^n \frac{\cos(tx)}{1+t^2}\,dt.$$

Comme l'application $(x,t) \mapsto \frac{\cos(tx)}{1+t^2}$ et sa dérivée partielle par rapport à x : $(x,t) \mapsto \frac{t\sin(tx)}{1+t^2}$ sont continues sur $\mathbb{R} \times [0;n]$, on en déduit que l'application H_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$H_n'(x) = -\int_0^n \frac{t\sin(tx)}{1+t^2}\,dt.$$

On va maintenant appliquer le théorème sur la convergence localement uniforme des dérivées d'une suite de fonctions. On remarque tout d'abord que la suite H_n converge simplement (vers $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(tx)}{1+t^2}\,dt$!).

Il reste à établir la convergence locale uniforme des H'_n. Il est clair que la limite sera alors $-\displaystyle\int_0^\infty \frac{t\sin(tx)}{1+t^2}\,dt$ (par définition !). C'est maintenant que l'on utilise le lemme d'Abel.
Pour cela, on vérifie que $\forall q > p > 0$, on a

$$\left|\int_p^q \sin(tx)\,dt\right| \leq \frac{2}{|x|}$$

et que la fonction $t \mapsto \frac{t}{1+t^2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Le lemme d'Abel assure alors que

$$\forall q, p \in \mathbb{N}, q > p,\ \ |H'_q(x) - H'_p(x)| \leq \left|\int_p^q \frac{t\sin(tx)}{1+t^2}\,dt\right| \leq \frac{2p}{|x|(1+p^2)}.$$

Ainsi pour tout $\delta > 0$, on a

$$\sup_{[\delta;+\infty[} |H'_q(x) - H'_p(x)| \leq \frac{2p}{\delta(1+p^2)} \to 0$$

lorsque $\min(p,q) \to 0$ et on a alors montré la convergence locale uniforme de la suite $(H'_n)_n$ vers $\displaystyle\int_0^\infty \frac{t\sin(tx)}{1+t^2}\,dt$. On en déduit que la suite $(H_n)_n$ converge localement uniformément vers G', G' est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$G"(x) = -\int_0^\infty \frac{t\sin(tx)}{1+t^2}\,dt.$$

Il est maintenant facile de voir que G est solution de l'équation différentielle suivante :

$$\forall x > 0, \quad G"(x) - G(x) = -\int_0^\infty \frac{\sin(tx)}{t}\,dt = -\frac{\pi}{2}.$$

On en déduit qu'il existe deux constantes C_1 et C_2 telles que

$$\forall x > 0, \quad G(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{\pi}{2}.$$

Il est clair que G est borné donc $C_1 = 0$. D'autre part, G est continue en 0 et $G(0) = 0$, d'où $C_2 = -\frac{\pi}{2}$ et finalement

$$G(x) = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-x}).$$

Chapitre 3

Probabilités

3.1 Grandes déviations, inégalités de Hoeffding, Bernstein et Bennett

Nous allons donner différentes inégalités de grandes déviations pour une somme de variables aléatoires bornées.

Proposition 3.1.1. *Soit $X_1, \dots, X_n$ une famille de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées et bornées, ie il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\forall i, \quad a \leq X_i \leq b$. On note $m = \mathbb{E}[X_1]$ et $\mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2$. On a les inégalités suivantes pour $\varepsilon > 0$:*

- **(Hoeffding :)** $\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2\exp\left(-\frac{n\varepsilon^2}{(b-a)^2}\right)$
- **(Bernstein :)** $\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2\exp\left(-\frac{n\varepsilon^2}{2(\sigma^2 + \varepsilon(b-a)/3)}\right)$
- **(Bennett :)** $\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2\exp\left[-\frac{n\varepsilon}{(b-a)} h_1\left(\frac{\varepsilon(b-a)}{\sigma^2}\right)\right]$

  où $h_1(x) = \frac{(x+1)\ln(x+1) - x}{x}$.

On va démontrer $(\mathbf{Bennett}\ :) \Rightarrow (\mathbf{Bernstein}\ :)$. Cette dernière entraîne également celle de Hoeffding mais nous en donnerons une démonstration indépendante.

Nous commençons tout d'abord par redémontrer l'inégalité de base des grandes déviations :

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - m \geq \varepsilon\right) \leq \exp\left(-n \sup_{u>0}\left[u\varepsilon - \ln(\mathbb{E}[e^{u(X_1-m)}]]\right)\right).$$

Il faut pour cela tout d'abord remarquer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \leq e^x.$$

Il vient pour tout $u > 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - m \geq \varepsilon\right) &= \mathbb{P}\left(u(X_1-m)+\cdots+u(X_n-m)-un\varepsilon \geq 0\right) \\
&\leq \mathbb{E}\left[\exp\left(u(X_1-m)+\cdots+u(X_n-m)-un\varepsilon\right)\right] \\
&= e^{-nu\varepsilon}(\mathbb{E}\left[e^{u(X_1-m)}\right])^n \\
&= \exp\left(-n(u\varepsilon - \ln(\mathbb{E}\left[e^{u(X_1-m)}\right]))\right)
\end{aligned}$$

Il suffit alors de prendre le $\sup$ pour les $u > 0$.

Preuve de l'inégalité de Hoeffding :

Quitte à remplacer X_i par $X_i - m$ pour $i = 1, \ldots, n$ on peut supposer que X_i est d'espérance nulle. Posons $\varphi(u) = \mathbb{E}\left[e^{uX_1}\right]$. En appliquant deux fois le théorème de dérivation sous le signe somme, on obtient

$$\begin{aligned}
\varphi\text{"}(u) &= \frac{\mathbb{E}\left[X_1^2 e^{uX_1}\right]\mathbb{E}\left[euX_1\right] - \mathbb{E}\left[X_1 e^{uX_1}\right]^2}{\mathbb{E}\left[e^{uX_1}\right]^2} \\
&= \mathbb{E}\left[X_1^2 \frac{e^{uX_1}}{\mathbb{E}\left[e^{uX_1}\right]}\right] - \mathbb{E}\left[X_1 \frac{e^{uX_1}}{\mathbb{E}\left[e^{uX_1}\right]}\right]^2 \\
&= \mathrm{Var}_{\widetilde{\mathbb{P}}}(X_1) \\
&= \mathrm{Var}_{\widetilde{\mathbb{P}}}\left(X_1 - \frac{b+a}{2}\right) \\
&\leq \frac{(b-a)^2}{4}
\end{aligned}$$

où $\widetilde{\mathbb{P}}$ est une nouvelle probabilité ayant une densité par rapport à $\mathbb{P}$ donnée par

$$\frac{d\widetilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} = \frac{e^{uX_1}}{\mathbb{E}\left[e^{uX_1}\right]}.$$

Pour la dernière des inégalités, on a utilisé le fait que $-\dfrac{b-a}{2} \leq X_1 - \dfrac{b+a}{2} \leq \dfrac{b-a}{2}$.
Ainsi en intégrant deux fois, on a :

$$\varphi(u) \leq \varphi(0) + u\varphi'(0) + \frac{(b-a)^2}{4}u^2 = \frac{(b-a)^2}{4}u^2.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a alors

$$u\varepsilon - \ln \mathbb{E}\left[e^{uX_1}\right] \quad \geq \quad u\varepsilon - u^2\frac{(b-a)^2}{4}$$

Il est alors clair que le $\sup$ de l'inégalité de droite est atteint en $u = \dfrac{2\varepsilon}{(b-a)^2}$ et vaut $\dfrac{\varepsilon^2}{(b-a)^2}$ et ceci établit le résultat.

Preuve de l'inégalité de Bennett :

Quitte à remplacer X_i par $X_i - m$ on peut supposer que les variables $X_i, i = 1, \dots, n$ sont d'espérance nulle. Il suffit alors de montrer le résultat pour $b = 1$ et d'appliquer ceci à $X_i/(b-a)$. Nous supposerons donc également que $b = 1$.

On pose pour $t > 0$, $\Phi(t) = \dfrac{e^t - 1 - t}{t^2}$. Cette fonction est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a donc pour tout $u \geq 0$, $\Phi(uX) \leq \Phi(u)$, d'où

$$\forall u > 0, \quad e^{uX} - 1 - uX \leq X^2(e^u - 1 - u)$$

et en prenant l'espérance :

$$\mathbb{E}\left[e^{uX}\right] - 1 \leq \sigma^2(e^u - 1 - u),$$

d'où

$$\ln(\mathbb{E}\left[e^{uX}\right]) \leq \ln\left(1 + \sigma^2(e^u - 1 - u)\right) \leq \sigma^2(e^u - 1 - u)$$

et

$$u\varepsilon - \ln(\mathbb{E}\left[e^{uX}\right]) \geq \sigma^2[u(\varepsilon/\sigma^2 + 1) - e^u - 1].$$

Posons maintenant $\varphi(t) = t(\varepsilon/\sigma^2 + 1) - e^t - 1$. Il est facile de voir que φ atteint son maximum en $t_0 = \ln\left(1 + \frac{\varepsilon}{\sigma^2}\right)$, ce qui donne

$$\sup_{u>0}(u\varepsilon - \ln(\mathbb{E}\left[e^{uX}\right])) \geq \varepsilon h_1\left(\frac{\varepsilon}{\sigma^2}\right)$$

avec $h_1(x) = \dfrac{(x+1)\ln(x+1) - x}{x}$.

En appliquant ce résultat à la famille $(-X_i)_{1\leq i\leq n}$, on obtient également

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - m \geq -\varepsilon\right) \leq \exp\left(-\frac{n\varepsilon}{b-a} h_1\left(\frac{\varepsilon(b-a)}{\sigma^2}\right)\right),$$

d'où le résultat.

Preuve de l'inégalité de Bernstein : On déduit cette inégalité de la précédente en vérifiant que :

$$\forall x > 0, \quad \frac{(x+1)\ln(x+1) - x}{x} \geq \frac{x}{2(1 + x/3)}.$$

Pour cela, on pose

$$\psi(x) = 2(1 + x/3)[(x+1)\ln(1+x) - x] - x^2$$

et on voit que $\psi"(x) = \dfrac{4}{3}\left(\ln(1+x) + \dfrac{1}{1+x} - 1\right)$ est croissante ($\psi^{(3)}(x) \geq 0$) et $\psi"(0) = 0$ donc on a $\psi" \geq 0$. Comme $\psi'(0) = 0$, on a également $\psi' \geq 0$ et pour finir $\psi(0) = 0$ donne $\psi \geq 0$ et l'inégalité est démontrée.

Remarque 3.1.2. *Ces inégalités permettent de déterminer des intervalles de confiance non asymptotiques assez proches de celui obtenu par approximation normale (TCL) pour des variables aléatoires bornées. Par exemple, pour des variables de Bernouilli de paramètre $p = 0.5$ et pour une précision $\varepsilon = \alpha = 0.05$, on obtient les tailles d'échantillon suivantes :*

- *Tchebychev :* $n = \dfrac{1}{4\alpha\varepsilon^2} = 2000.$
- *Approximation normale :* $n = 385$
- *Hoeffding :* $n = -\dfrac{\ln(\alpha/2)}{\varepsilon^2} = 1475.$
- *Bernstein :* $n = -\dfrac{2(\sigma^2 + \varepsilon/3)\ln(\alpha/2)}{\varepsilon^2} = 787.$
- *Bennett :* $n = -\dfrac{\ln(\alpha/2)}{\varepsilon h_1(4\varepsilon)} = 785.$

Faire un graphe.

3.2 Arrivées poissoniennes et statistiques d'ordre

Les arrivées de clients dans des files d'attente ou bien les demandes de connexion dans des réseaux de communications sont souvent modélisées en probabilité par les temps de saut d'un processus de Poisson. Notre objectif va être de donner une justification mathématique à ce raisonnement. Nous allons donc montrer que les statistiques d'ordre de variables aléatoires indépendantes de paramètre $\lambda > 0$ convergent en loi vers les temps de saut d'un processus de Poisson. Ceci signifie intuitivement que si l'on suppose que les clients décident indépendamment les uns des autres de se rendre à leur magasin (ou bien de téléphoner) selon une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, alors on peut approcher les instants successifs de leur arrivée au magasin (ou au réseau) par les temps d'arrivées d'un processus de Poisson.

Proposition 3.2.1. *Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On note $S_1, \ldots, S_n$ le réarrangement croissant des X_i, défini par $S_1 \le \cdots \le S_n$ et $\{S_1; \ldots; S_n\} = \{X_1; \ldots; X_n\}$. Les variables aléatoires $S_1, \ldots, S_n$ sont appelées les statistiques d'ordre du n-échantillon $X_1, \ldots, X_n$. Le vecteur aléatoire $(S_1, \ldots, S_n)$ admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ donnée par*

$$n!\lambda^n \mathbb{1}_{\{0<x_1<x_2<\cdots<x_n\}}(x) e^{-\lambda x_1 - \cdots - \lambda x_n}.$$

Preuve : Remarquons tout d'abord que, les variables $X_1, \ldots, X_n$ étant à densité, on a pour $i \neq j$, $\mathbb{P}(X_i = X_j) = 0$. On peut donc partitionner l'espace de la façon suivante

$$1 = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \mathbb{1}_{\{X_{\sigma(1)} < \cdots < X_{\sigma(n)}\}}$$

où $\mathcal{S}_n$ désigne l'ensemble des permutations à n éléments. Ainsi pour une application mesurable bornée

$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[f(S_1,\dots,S_n)\right] &= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \mathbb{E}\left[f(S_1,\dots,S_n)\mathbb{1}_{\{X_{\sigma(1)}<\dots<X_{\sigma(n)}\}}\right] \\
&= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \mathbb{E}\left[f(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(n)})\mathbb{1}_{\{X_{\sigma(1)}<\dots<X_{\sigma(n)}\}}\right] \\
&= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \int_{\mathbb{R}_+^d} f(x_1,\dots,x_n)\mathbb{1}_{\{x_1<\dots<x_n\}}\lambda^n e^{-\lambda(x_1+\dots+x_n)}\,dx_1\dots dx_n \\
&= n!\int_{\mathbb{R}_+^d} f(x_1,\dots,x_n)\mathbb{1}_{\{x_1<\dots<x_n\}}\lambda^n e^{-\lambda(x_1+\dots+x_n)}\,dx_1\dots dx_n
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Proposition 3.2.2. *Les statistiques d'ordre d'un n-échantillon $X_1,\dots,X_n$ de la loi exponentielle de paramètre $\lambda_n > 0$ tel que $n\lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} p > 0$ convergent en loi au sens des processus lorsque $n\to\infty$ vers les temps d'arrivées d'un processus de Poisson de paramètre p.*

Preuve : Rappelons qu'un processus (à temps discret) à valeurs réelles X est une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega;\mathcal{F};\mathbb{P})$ et à valeurs réelles.
On dit qu'une suite $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de processus converge en loi au sens des processus vers le processus X, si pour tout $N\in\mathbb{N}^*$, le vecteur aléatoire $(X_1^n,\dots X_N^n)$ converge en loi dans $\mathbb{R}^N$ lorsque $n\to\infty$ vers le vecteur aléatoire $(X_1,\dots,X_N)$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $S_1^n,\dots,S_n^n$ les statistiques d'ordre du n-échantillon $X_1,\dots,X_n$. Il nous faut donc montrer que pour tout $N\in\mathbb{N}^*$, le vecteur aléatoire $(S_1^n,\dots,S_N^n)$ converge en loi vers les temps d'arrivées $(T_1,\dots,T_N)$ d'un processus de Poisson de paramètre p.
Soit donc f une application mesurable bornée sur $\mathbb{R}^N$. En effectuant ci-dessous le changement de variable

$$(x_1,\dots x_n) = (u_1, u_1+u_2,\dots,u_1+u_2+\dots+u_n)$$

on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[f(S_1^n,\dots,S_N^n)\right] &= n!\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1,\dots,x_N)\mathbb{1}_{\{0<x_1<\dots<x_n\}}\lambda_n^n e^{-\lambda_n(x_1+\dots+x_n)}\,dx_1\dots dx_n \\
&= n!\int_{\mathbb{R}_+^n} f(u_1,\dots,u_1+\dots u_N)\lambda_n^n e^{-\lambda_n(nu_1+(n-1)u_2+\dots+u_n)}\,du_1\dots du_n \\
&= \frac{n!}{(n-N)!}\int_{\mathbb{R}_+^N} f(u_1,\dots,u_1+\dots+u_N)\lambda_n^N e^{-\lambda_n(nu_1+(n-1)u_2+\dots+(n-N+1)u_N)}\,du_1\dots\, du_N \\
&\xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}_+^N} f(u_1,\dots,u_1+\dots+u_N)p^N e^{-p(u_1+\dots+u_N)}\,du_1\dots du_N \\
&= \mathbb{E}\left[f(T_1,\dots,T_N)\right]
\end{aligned}$$

et ceci termine la démonstration.

3.3 Comportement asymptotique d'une action

Le modèle discret proposé par Black et Scholes pour décrire l'évolution des cours d'un actif risqué ne distribuant pas de dividendes (une action de prix S_n au temps n) est le suivant : on suppose que S_n vérifie la relation suivante :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} S_n & = & S_{n-1} + \mu S_{n-1} + \sigma S_{n-1} \varepsilon_n \\ S_0 & = & s_0, \end{array} \right.$$

où $s_0 > 0$, σ et μ vérifient la relation $|\sigma| < 1 + \mu$, $(\varepsilon_n)_n$ est une suite de variables aléatoires idépendantes équidistribuées de loi

$$\frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1.$$

Le paramètre σ est appelé " volatilité " et le terme $\sigma S_{n-1}\varepsilon_n$ représente une fluctuation aléatoire de l'actif.

Posons $\lambda = \sqrt{(1+\mu)^2 - \sigma^2}$ et $\widetilde{S_n} = \dfrac{S_n}{\lambda^n}$. On remarque alors que les variables aléatoires

$$V_n = \ln\left(\frac{\widetilde{S_n}}{\widetilde{S_{n-1}}}\right) = \ln(1 + \mu + \sigma\varepsilon_n) - \ln(\lambda)$$

sont indépendantes équidistribuées et un calcul montre qu'elles sont d'espérance nulle. Le calcul de la variance donne :

$$\begin{array}{lcl} \upsilon^2 & \overset{def}{=} & \mathbb{E}\left[\left(\ln\left(\dfrac{\widetilde{S_n}}{\widetilde{S_{n-1}}}\right)\right)^2\right] \\ & = & \dfrac{(\ln(1+\mu-\sigma) - \ln(\lambda))^2 + (\ln(1+\mu+\sigma) - \ln(\lambda))^2}{2} \end{array}$$

Le théorème de la limite centrale assure alors que

$$\frac{V_1 + \cdots + V_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{Loi} \mathcal{N}(0; \upsilon^2).$$

En remarquant que

$$\frac{V_1 + \cdots + V_n}{\sqrt{n}} = \frac{\ln(\widetilde{S_n}) - \ln(s_0)}{\sqrt{n}}$$

et en utilisant le fait que pour toute fonction continue φ sur $\mathbb{R}$ et pour toute suite de variables aléatoires $(Y_n)_n$ convergeant en loi vers Y, la suite $(\varphi(Y_n))_n$ converge en loi vers $\varphi(Y)$, on en déduit que $\widetilde{S_n}^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$ converge en loi vers une loi log-normale de paramètres 0 et υ^2. Finalement, on a montré que

$$\frac{S_n^{\frac{1}{\sqrt{n}}}}{[(1+\mu)^2 - \sigma^2]^{\frac{1}{2\sqrt{n}}}} \xrightarrow[n\to\infty]{Loi} e^X$$

où X est une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0; \upsilon^2)$.

3.4 Modèle de Cox, Ross et Rubinstein

Le modèle de Cox, Ross et Rubinstein est une version discrétisée du modèle de Black et Scholes composée il ya un actif à risque de prix S_n à l'instant $n, \leq n \leq N$ et un actif sans risque S_n^0 de taux d'inrérêt r fixé sur une période de temps de sorte que

$$S_n^0 = (1+r)^n.$$

On suppose que l'actif risqué suit l'évolution suivante :

$$S_{n+1} = S_n(1+\xi_{n+1}),$$

où $(\xi_n)_n$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi

$$p\delta_a + (1-p)\delta_b, \quad -1 < a < r < b,$$

Si l'on suppose que les fluctuations de l'actif risque évoluent comme le cours de l'actif sans risque, ceci donne

$$1 + r = (1+a)p + (1+b)(1-p)$$

soit

$$p = \frac{b-r}{b-a}.$$

Une option sur q actions avec échéance à la date N et au prix d'exercice K est un droit de pouvoir acheter, à la date N, q actions au prix K par action si le cours de l'action à la date N est supérieur à K ou bien de les acheter au cours coûtant ou bien de ne pas les acheter si le prix unitaire est inférieur à K. On notera $O(n,N,q,K)$ une telle option contractée à la date n. Le but va être de fixer un prix auquel cette option doit être vendue pour compenser l'avantage qu'elle représente. Comme ce prix par action doit dépendre de la date n, du cours de l'action à cette date et qu'il est proportionnel à q, on le notera $P^N(n,S_n)$. Le prix de l'option pour q actions sera alors $qP^N(n,S_n)$.

Un des cas typique de ces situations est la signature de gros contrats entre deux entreprises de pays différents. Le montant du contrat est en général évalué par rapport au cours du dollar. Les entreprises concernées achètent alors ce genre d'options pour " s'assurer " contre les fluctuations du cours du dollar entre le moment où le contrat est signé et le moment où la prestation réalisée devra être payée.

Pour déterminer le prix $P^N(n,S_n)$, on fait le raisonnement suivant : au temps N, l'acheteur de l'option réalisera le profit $(S_N-K)_+$. Le vendeur doit donc recevoir au temps n, une quantité d'argent qui lui permettra de payer la richesse $(S_N-K)_+$ à l'acheteur. Ceci nous donne

$$\begin{aligned}
P^N(n,S_n) &= (1+r)^{-(N-n)}\mathbb{E}\left[(S_N-K)_+ | S_n\right] \\
&= (1+r)^{-(N-n)}\mathbb{E}\left[\left(S_n \prod_{i=n+1}^{N}(1+\xi_i) - K\right)_+ \Big| S_n \quad\right] \\
&= (1+r)^{-(N-n)} \sum_{i=0}^{N-n} C_{N-n}^i p^i (1-p)^{N-n-i}\left(S_n(1+a)^i(1+b)^{N-n-i} - K\right)_+
\end{aligned}$$

On va maintenant utiliser la procédure suivante pour fixer le prix de l'option à une échéance T. L'idée est de faire tendre le pas de temps de ce modèle discret vers 0. Pour cela, on fait tendre N vers l'infini en imposant les relations suivantes :

$$r = \frac{RT}{N}, \quad \ln\frac{1+a}{1+r} = -\frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \quad \text{et } \ln\frac{1+b}{1+r} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}.$$

Le paramètre R désigne le taux d'intérêt instantané entre les instants 0 et T :

$$e^{RT} = \lim_{N\to\infty}(1+r)^N,$$

et σ^2 est la variance limite de la variable aléatoire $\ln S_N$ lorsque N tend vers l'infini, S_N représentant le cours de l'action à la date T.

Rappel : Soit $(Y_N)_N$ une suite de variables aléatoires de la forme

$$Y_N = X_1^N + \cdots + X_N^N$$

où $\forall N \in \mathbb{N}$, les variables aléatoires $X_1^N, \ldots, X_N^N$ sont indépendantes équidistribuées et à valeurs dans $[-\sigma/\sqrt{N}; \sigma/\sqrt{N}]$, de moyenne μ_N telle que $\lim_{N\to\infty} N\mu_N = \mu$ et de variance σ_N^2 telle que $\lim_{N\to\infty} N\sigma_N^2 = \sigma^2$, alors la suite $(Y_N)_N$ converge en loi vers une loi normale d'espérance μ et de variance σ^2. Il suffit pour le voir de calculer la fonction caractéristique de Y_N :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{itY_N}\right] &= \prod_{j=1}^{N} \mathbb{E}\left[e^{itX_j^N}\right] \\
&= (\mathbb{E}\left[e^{itX_1^N}\right])^N \\
&= \left(1 + it\frac{N\mu_N}{N} - \frac{t^2 N\sigma_N^2}{2N} + o(1/N)\right)^N \\
&\underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \exp(it\mu - t^2\sigma^2/2).
\end{aligned}$$

On pose alors pour $N \in \mathbb{N}$ et $1 \le j \le N$,

$$X_j^N = \ln\frac{1+\xi_j^N}{1+r} \quad \text{et } Y_N = \sum_{j=1}^{N} X_j^N.$$

Les X_j^N sont bien à valeurs dans $[-\sigma/\sqrt{N};\sigma/\sqrt{N}]$, indépendantes et équidistribuées, d'espérance

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X_1^N\right] &= p\ln\frac{1+a}{1+r}+(1-p)\frac{1+b}{1+r} \\
&= (1-2p)\frac{\sigma}{\sqrt{N}} \\
&= \left(1-2\frac{\frac{b+1}{1+r}-1}{\frac{b+1}{1+r}-\frac{1+a}{1+r}}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{N}} \\
&= \left(1-2\frac{e^{\sigma/\sqrt{N}}-1}{e^{\sigma/\sqrt{N}}-e^{-\sigma/\sqrt{N}}}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{N}} \\
&\overset{N\infty}{\sim} -\frac{\sigma^2}{2N}
\end{aligned}$$

et de variance

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(X_1^N)^2\right]-(\mathbb{E}\left[X_1^N\right])^2 &= \frac{\sigma^2}{N}-(\mathbb{E}\left[X_1^N\right])^2 \\
&\overset{N\infty}{\sim} \frac{\sigma^2}{N}
\end{aligned}$$

En appliquant le rappel précédent, on voit que $(Y_N)_N$ converge en loi vers une loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$. Si l'on note $\varphi(y)=(s_0e^y-e^{-RT}K)_+$, on a

$$\begin{aligned}
|C(0,s_0)-\mathbb{E}\left[\varphi(Y_N)\right]| &= |\mathbb{E}\left[(1+r)^{-N}(S_N-K)_+\right]-\mathbb{E}\left[\varphi(Y_N)\right]| \\
&= \mathbb{E}\left[(s_0e^{Y_N}-K(1+RT/N)^{-N})_+\right] \\
&\leq K|e^{-RT}-(1+RT/N)^{-N}|
\end{aligned}$$

On ne passe pas directement à la limite pour $\mathbb{E}\left[\varphi(Y_N)\right]$ car φ n'est pas bornée. Par contre, on remarque que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\varphi(Y_N)\right] &= \mathbb{E}\left[(S_N-Ke^{-RT})_+\right] \\
&= \mathbb{E}\left[S_N-Ke^{-RT}\right]-\mathbb{E}\left[(Ke^{-RT}-S_N)_+\right] \\
&= s_0-Ke^{-RT}-\mathbb{E}\left[(Ke^{-RT}-S_N)_+\right] \\
&\xrightarrow[N\to\infty]{} s_0-Ke^{-RT}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{\mathbb{R}}(Ke^{-RT}-s_0e^y)_+e^{-\frac{(y+\sigma^2/2)^2}{2\sigma^2}}\,dy
\end{aligned}$$

Finalement, le prix $P(0,s_0)$ de l'option est donnée par

$$P(0,s_0)=\lim_{N\to\infty}P^N(0,s_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{\mathbb{R}}(s_0e^y-Ke^{-RT})_+e^{-\frac{(y+\sigma^2/2)^2}{2\sigma^2}}\,dy.$$

3.5 Construction d'une suite de variables aléatoires uniformes et indépendantes

Nous allons maintenant construire une suite de variables aléatoires réelles uniformes et indépendantes sans passer par le célèbre théorème de Kolmogorov. Ceci permet de démontrer l'existence d'une suite de variables aléatoires indépendantes de toutes sortes à l'aide du lemme suivant :

Lemme 3.5.1. *Soit F la fonction de répartition de la variable aléatoire réelle X et U une loi uniforme sur $[0;1]$. On pose pour $t \in [0;1]$*

$$F^{-1}(t) = \inf \{s \in \mathbb{R}; F(s) \geq t\}.$$

Alors $F^{-1}(U)$ a même loi que X.

Preuve : En effet, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(F^{-1}(U) \leq x\right) &\overset{\text{Déf}}{=} \mathbb{P}\left(U \leq F(x)\right) \\ &= F(x) \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Exemple 3.5.2. *Pour la construction du jeu de pile ou face biaisé de paramètre p, c'est-à-dire une suite de variable aléatoire de Bernouilli de paramètre p, on se donne une suite $(U_n)_n$ de variables aléatoires uniformes sur $[0;1]$ et on pose $\forall n \in \mathbb{N}$,*

$$X_n = F^{-1}(U_n)$$

où pour tout $x \in [0;1]$,

$$F^{-1}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 1-p \\ 1 \text{ si } x > 1-p \end{cases}.$$

Il ne nous reste qu'à démontrer la

Proposition 3.5.3. *Il existe une suite $(U_n)_n$ de variables aléatoires uniformes sur $[0;1]$.*

Preuve : Désignons par D l'ensemble de nombres 2-adiques

$$D = \left\{ x \in [0;1]; \exists n \in \mathbb{N}, \exists (k_0, \ldots, k_n) \in \{0;1\}^{n+1}, x = \sum_{i=0}^{n} \frac{k_i}{2^i} \right\}.$$

et considérons pour espace de probabilité le segment $[0;1] \setminus D = \Omega$ muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue λ sur Ω. D désigne l'ensemble de nombres 2-adiques

$$D = \left\{ x \in [0;1]; \exists n \in \mathbb{N}, \exists (k_0, \ldots, k_n) \in \{0;1\}^{n+1}, x = \sum_{i=0}^{n} \frac{k_i}{2^i} \right\}.$$

Tout $x \in \Omega$ admet un développement 2-adique unique de la forme

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2^i} \quad \text{avec } \forall i \geq 1, x_i \in \{0;1\}.$$

Pour tout $i \geq 1$, on définit l'application ε_i sur Ω et à valeurs dans $\{0;1\}$ par

$$\varepsilon_i(x) = x_i.$$

Nous allons montrer que la suite ε_i est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Bernouilli de paramètre $\frac{1}{2}$. Pour cela, on calcule pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la loi du vecteur $(\varepsilon_1; \dots; \varepsilon_n)$.
Soit donc $(a_1, \dots, a_n) \in \{0;1\}^n$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\varepsilon_1 = a_1; \dots; \varepsilon_n = a_n\right) &= \lambda\left(\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2^k}; \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2^k} + \frac{1}{2^n}\right[\right) \\ &= \frac{1}{2^n} \end{aligned} \tag{3.1}$$

On en déduit alors la loi de ε_i pour tout $i \geq 1$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\varepsilon_i = a_i\right) &= \sum_{(a_1,\dots,a_{i-1}) \in \{0;1\}^{n-1}} \mathbb{P}\left(\varepsilon_1 = a_1; \dots; \varepsilon_{i-1} = a_{i-1}; \varepsilon_i = a_i\right) \\ &= 2^{i-1} \times \frac{1}{2^i} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

donc ε_i suit une loi de Bernouilli de paramètre $\frac{1}{2}$. L'indépendance découle alors de (3.1). On dispose ainsi d'une suite $(\varepsilon_n)_n$ de variables aléatoires indépendantes de paramètre $\frac{1}{2}$. Comme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable, on peut réindexer notre suite sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$: $\left(\varepsilon_{(n,k)}\right)_{(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$.
On pose alors pour tout $n \geq 1$,

$$U_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_{(n,k)}}{2^k}.$$

Il est facile de voir que la suite $(U_n)_n$ ainsi définie est une suite de variables aléatoires indépendantes. Comme il est clair qu'il y a convergence presque sûre de la série, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[e^{itU_n}\right] &= \lim_{m \to \infty} \mathbb{E}\left[e^{it \sum_{k=1}^{m} \frac{\varepsilon_{(n,k)}}{2^k}}\right] \\ &= \lim_{m \to \infty} \prod_{k=1}^{q} \left(\frac{1 + e^{it/2^k}}{2}\right) \\ &= \lim_{m \to \infty} \prod_{k=1}^{q} e^{it/2^{k+1}} \cos(t/2^{k+1}) \\ &= \lim_{m \to \infty} e^{it \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{2^{k+1}}} \frac{\sin(t/2)}{2^q \sin(t/2^{q+1})} \\ &\to 2e^{it/2} \frac{\sin(t/2)}{t} \end{aligned}$$

et ceci assure que U_n suit bien une loi uniforme sur $[0;1]$, ce qui termine la démonstration.

Bibliographie

[Z-Q] Ziuly & Queffélec. *Eléments d'analyse pour l'agrégation*

[Tau1] Tauvel. *Analyse complexe. Exercices corrigés*

[Rud] Rudin. *Analyse réelle et complexe*

[Cal] Calais. *Théorie des groupes*

[Tau2] Tauvel. *Mathématiques générales pour l'agrégation*

[Fra] Francinou-Gianella. *Exercices de mathématiques pour l'agrégation. Algèbre* 1