COURS DE PROBABILITES DE DEA : MOUVEMENT BROWNIEN ET CALCUL STOCHASTIQUE

29 décembre 2005

Table des matières

Chapitre 1

Le mouvement brownien :

1.1 Résultats préliminaires :

1.1.1 Vecteurs gaussiens :

Lemme 1.1.2. *Si le couple de vecteurs aléatoires (X, Y) est gaussien, si X est non dégénéré et si on pose*
$\Sigma_{YX} = \mathbb{E}\left[(Y - \mathbb{E}(Y))(X - \mathbb{E}(X))^T\right]$ *et* $K_X = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))(X - \mathbb{E}(X))^T\right]$ *alors on a :*

$$Y + \Sigma_{YX}K_X^{-1}(X) \perp\!\!\!\perp X \quad et \quad \mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}(Y) + \Sigma_{YX}K_X^{-1}(X - \mathbb{E}(X))$$

Preuve :
On peut supposer X et Y centrés pour simplifier. On pose $U = Y - \Sigma_{XY}K_X^{-1}(X)$ alors le couple (U, X) est gaussien car image de (X, Y) par une application linéaire et

$$\Sigma_{UX} = \mathbb{E}(UX^T) = \mathbb{E}(YX^T) - \Sigma_{XY}K_X^{-1}(XX^T) = \Sigma_{YX} - \Sigma_{YX}K_X^{-1}K_X = 0$$

Il en résulte que X et U sont indépendants et donc que $\mathbb{E}(U|X) = 0$ et remplaçant U par sa valeur on trouve le résultat voulu $\diamondsuit$

1.1.3 Le théorème de Kolmogorov d'existence des probabilités sur les espaces produits

Soit $(E, \mathcal{F})$ un espace mesurable et pour $k < n$ on note π_k^n la projection canonique de E^n sur E^k ie

$$\pi_k^n(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_k).$$

Celle-ciest également mesurable par rapport aux tribus $\mathcal{F}^{\otimes n}$ et $\mathcal{F}^{\otimes k}$.

Définition 1.1.4. *Une famille de probabilités $P_{t_1,\ldots,t_n}$ définies sur les produits $(E^n, \mathcal{F}^{\otimes n})$ et indexée par les n-uplets, $n \in \mathbb{N}$, d'un ensemble T est une famille projective si elle satisfait*

$$\pi_k^n(P_{t_1,\ldots,t_n}) = P_{t_1,\ldots,t_k}$$

pour tout entier n, tout n-uplet $(t_1, \ldots, t_n) \in T^n$ et tout $k < n$.

Théorème 1.1.5. Théorème des espaces produits de Kolmogorov
Soit E un espace localement compact à base dénombrable d'ouverts et $\mathcal{F}$ sa tribu borélienne. Si T est un ensemble d'indices, si $\mathcal{P} = (P_{t_1,\ldots,t_n})$ est une famille projective de probabilités sur les produits finis $E_{t_1} \times \cdots \times E_{t_n}$, si $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace mesurable et $X\colon (\Omega, \mathcal{A}) \to (E^T, \mathcal{F}^{\otimes T})$ est mesurable alors il existe une unique probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telle que la loi temporelle de X sous P soit égale à $\mathcal{P}$.

On admettra la preuve de ce théorème.

1.1.6 Un théorème de compacité de Prokhorov :

Théorème 1.1.7. *Si E est un métrique complet et séparable, de toute suite tendue $(\mathrm{P}_n)_n$ de probabilités sur E, on peut extraire une sous-suite qui converge étroitement. Si la suite $(\mathrm{P}_n)_n$ ne converge pas étroitement, on peut en extraire deux sous-suite qui convergent étroitement vers des probabilités distinctes.*

Preuve :
Résulte des théorèmes de Riesz et Banach-Alaoglu.

1.2 Définition et premières propriétés :

Définition 1.2.1. *Un processus stochastique réel* $\{B_t : t \geq 0\}$ *est appelé* **mouvement brownien** *(standard) si les trois conditions suivantes sont satisfaites :*

i) *Le processus* B *est à accroissements indépendants ie pour tout n-uple* $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n$ *d'instants, les variables aléatoires* $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ *qu'on appelle les accroissements de* B *sont indépendants.*

ii) *Pour chaque* t *la v.a.r* B_t *suit la loi* $\mathcal{N}(0, t)$.

iii) *Les trajectoires* $t \to B_t(\omega)$ *sont continues pour presque tout* ω.

Commençons par montrer que les propriétés i) et ii) peuvent s'énoncer différemment.

Proposition 1.2.2. *Un processus* $B_t, t \in \mathbb{R}_+$, *dont les trajectoires sont p.s. continues est un mouvement brownien ssi c'est un processus gaussien centré de covariance* $\inf(s, t)$. *De plus les accroissements* $B_t - B_s, s < t$, *d'un mouvement brownien suivent la loi* $\mathcal{N}(0, t - s)$.

Preuve :
Supposons d'abord que B satisfasse aux conditions de la définition 1.2.1. A cause de ii) et de l'indépendance, la relation

$$B_t = B_s + (B_t - B_s)$$

se traduit au niveau des fonctions caractéristiques par

$$\exp\left(-\frac{u^2 t}{2}\right) = \exp\left(-\frac{u^2 s}{s}\right) \phi_{(B_t - B_s)}(u),$$

d'où il suit que la fonction caractéristique de $B_t - B_s$ est $\exp\left(-\frac{u^2(t-s)}{2}\right)$, ce qui montre la deuxième phrase de l'énoncé.

Pour montrer que B est gaussien il faut montrer que pour des instants $0 = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n$ et des scalaires a_i quelconques la v.a. $\sum a_i B_{t_i}$ est gaussienne ; mais en remplaçant B_{t_i} par $\sum_{k=1}^{i}\left(B_{t_k} - B_{t_{k-1}}\right)$ on voit que cette variable est une combinaison linéaire de gaussiennes indépendantes et est donc gaussienne.

Finalement pour $s < t$,

$$\mathrm{Cov}\left(B_t, B_s\right) = \mathbb{E}\left[B_s\left(B_s + B_t - B_s\right)\right] = \mathbb{E}\left[B_s^2\right] = s$$

ce qui démontre l'implication directe.

Réciproquement, on peut d'abord constater que si B est un processus centré gaussien de covariance $\inf(s,t)$, B_t suit une loi $\mathcal{N}(0,t)$ et il reste alors juste à montrer que les accroissements sont indépendants. Comme le processus est gaussien centré, il suffit donc de montrer que les accroissements sont orthogonaux, soit que pour $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4$,

$$\mathrm{Cov}\left(B_{t_2} - B_{t_1}, B_{t_4} - B_{t_3}\right) = 0,$$

or ceci résulte facilement de l'hypothèse $\diamondsuit$

Il est alors aisé d'obtenir les lois temporelles du mouvement brownien.

Proposition 1.2.3. (Loi temporelle du mouvement brownien). *Soit* $0 < t_1 < \cdots < t_n < +\infty$. *La loi temporelle du vecteur* $(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})$ *est une loi normale à* n *dimensions, dont la densité conjointe* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *est donnée par :*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{t_1(t_2-t_1)\cdots(t_n-t_{n-1})}} \times e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1^2}{t_1} + \frac{(x_2-x_1)^2}{t_2-t_1} + \cdots + \frac{(x_n-x_{n-1})^2}{t_n-t_{n-1}}\right)}.$$

Preuve :

Nous avons si $f \in C_b(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(B_{t_1},\dots,B_{t_n})] &= \mathbb{E}[f(B_{t_1},(B_{t_2}-B_{t_1})+B_{t_1},\dots,B_{t_n}+(B_{t_{n-1}}-B_{t_{n-2}})+\cdots+B_{t_1})] \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y_1,y_2+y_1,\dots,y_n+\cdots+y_1) \\
&\qquad \times \frac{e^{-\frac{y_1^2}{t_1}}}{\sqrt{2\pi t_1}} \times \frac{e^{-\frac{y_2^2}{t_2-t_1}}}{\sqrt{2\pi(t_2-t_1)}} \times \cdots \times \frac{e^{-\frac{y_n^2}{t_n-t_{n-1}}}}{\sqrt{2\pi(t_n-t_{n-1})}} \\
&= \frac{f(x_1,\dots,x_n)}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{t_1(t_2-t_1)\cdots(t_n-t_{n-1})}} \\
&\qquad \times \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1^2}{t_1}+\frac{(x_2-x_1)^2}{t_2-t_1}+\cdots+\frac{(x_n-x_{n-1})^2}{t_n-t_{n-1}}\right)\right)
\end{aligned}$$

la dernière égalité s'obtenant par le changement de variables : $x_k = y_1+y_2+\cdots+y_k$, $\forall k \in \{1,\dots,n\}$ et ceci nous donne le résultat voulu $\diamondsuit$

Une autre façon d'énoncer ce résultat est de donner directement la matrice de covariance du vecteur $(B_{t_1},\dots,B_{t_n})$.

Proposition 1.2.4. *Le vecteur $(B_{t_1},\dots,B_{t_n})$ est centré et sa matrice des covariances est donnée par :*

$$\Gamma = \begin{pmatrix} t_1 & t_1 & t_1 & \cdots & t_1 \\ t_1 & t_2 & t_2 & \cdots & t_2 \\ t_1 & t_2 & t_3 & \cdots & t_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1 & t_2 & t_3 & \cdots & t_n \end{pmatrix}.$$

Preuve :
On peut obtenir ce résultat à l'aide de la proposition précédente mais il vaut mieux utiliser la proposition 1.2.2 qui donne directement le résultat $\diamondsuit$

1.3 Construction du mouvement brownien

1.3.1 Première méthode

1.3.2 L'intégrale de Wiener

Comme nous allons le voir par la suite, un mouvement brownien n'est p.s. pas à variation bornée (voir proposition 1.5.2) et l'on ne peut pas définir une intégrale par rapport à B_t comme on peut le faire traditionnellement avec des fonctions à variations bornées.

Dans ce qui suit, $L^2(\mathbb{R}^+)$ désigne l'espace des classes de fonctions presque partout égales de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant $\int_{\mathbb{R}^+} f^2(t)\,dt < \infty$ et $L^2(\Omega) = L^2(\Omega; \mathcal{F}; \mathrm{P})$. On note $< .,. >$ le produit scalaire usuel sur $L^2(\mathbb{R}+)$.

<u>Théorème</u> 1.3.3. *Etant donné un mouvement brownien $(B_t, t \geq 0)$, on peut associer à chaque fonction $f \in L^2(\mathbb{R}+)$ une (classe de) variable aléatoire :*

$$B(f) = \int_{\mathbb{R}^+} f(t)\,dB_t$$

telle que :

- *Si $f = \mathbb{1}_{]u;v]}$ $0 \leq u < v$, alors $B(f) = B_v - B_u$.*
- *L'application $\begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}+) & \rightarrow & L^2(\Omega) \\ f & \mapsto & B(f) \end{array}$ est linéaire et isométrique. On a ainsi :*

$$\forall f, g \in L^2(\mathbb{R}+),\ \mathbb{E}(B(f)B(g)) =< f, g >$$

Plus précisément le sous-espace vectoriel $\{B(f); f \in L^2(\mathbb{R}+)\}$ de $L^2(\Omega)$ coïncide avec l'espace gaussien $H(B)$ et la variable aléatoire $B(f)$ est caractérisée par les deux propriétés :

i) $B(f) \in H(B)$

ii) $\mathbb{E}(B_t B(f)) = \int_0^t f(s)\,ds$

Preuve :

Soit Δ le sous-espace vectoriel de $L^2(\mathbb{R}+)$ formé des fonctions en escalier et intégrables, ie de la forme :

$$f = \sum_{i=1}^{k} a_i \mathbb{1}_{]t_{i-1};t_i]},$$

avec $k \in \mathbb{N}$ et $0 < t_1 < \cdots < t_k, a_i \in \mathbb{R}$.

Pour $f \in \Delta$ de la forme précédente, on associe la variable aléatoire :

$$B(f) = \sum_{i=1}^{k} a_i (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}).$$

On peut remarquer que cela ne dépend pas de l'écriture choisie pour f car $1\!\!1_{]u;v]} = 1\!\!1_{]u;w]} + 1\!\!1_{]w;v]}, u < w < v$. On a ainsi construit une application $\begin{array}{ccc} \Delta & \rightarrow & L^2(\Omega) \\ f & \mapsto & B(f) \end{array}$ qui est clairement linéaire.

De plus, on a :

$$\mathbb{E}(B(f)) = 0$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(B(f)^2) &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{k} a_i (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})\right)^2\right] \\ &= \sum_{i=1}^{k} a_i^2 (t_i - t_{i-1}) \text{ par l'indépendance des accroissements de B} \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} f^2(t)\, dt \end{aligned}$$

Notre application est donc une isométrie et comme Δ est dense dans $L^2(\mathbb{R}+)$ on peut la prolonger en une isométrie linéaire de $L^2(\mathbb{R}+)$ dans $L^2(\Omega)$.

Il est facile de voir que $H(B)$ est l'adhérence de $\{B(f); f \in \Delta\}$ et celle-ci coïncide avec $\{B(f); f \in L^2(\mathbb{R}+)\}$. Puis comme $\{B_t; t \geq 0\}$ est total dans $H(B)$, on en déduit la dernière assertion $\diamondsuit$

Notation : Pour $T > 0$ et f mesurable de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f 1\!\!1_{[0;T]} \in L^2(\mathbb{R}+)$, on notera :

$$\int_0^T f(t)\, dB_t = B\left(f 1\!\!1_{[0;T]}\right).$$

On obtient aolrs la formule d'intégration par parties suivante :

Proposition 1.3.4. *Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^+), T > 0$. Alors :*

$$\int_0^T f(t)\,dB_t + \int_0^T f'(t)B_t\,dt = f(T)B_T$$

Si, de plus, $f(t)B_t \to 0$ P p.s. quand $t \to \infty$ et $\int_0^\infty |f'(t)|\sqrt{t}\,dt < \infty$ alors :

$$\int_{\mathbb{R}^+} f(t)\,dB_t + \int_{\mathbb{R}^+} f'(t)B_t\,dt = 0.$$

Preuve :
On a trivialement :

$$f(t) + \int_t^T f'(u)\,du$$

ce qui donne en intégrant pour $s \leq T$:

$$\int_0^s f(t)\,dt + \int_0^s \int_t^T f'(u)\,dudt = sf(T)$$

soit d'après les propriétés de l'intégrale de Wiener :

$$\mathbb{E}[B_s B(f \mathbb{1}_{[0;T]})] + \int_0^T f'(u)\min(u,s)\,du = f(T)s$$

ou encore

$$\mathbb{E}[B_s B(f \mathbb{1}_{[0;T]})] + \int_0^T f'(u)\mathbb{E}(B_s B_u)\,du = f(T)\mathbb{E}(B_T B_s).$$

On obtient ainsi :

$$\forall s \leq T, \mathbb{E}\left[\left(B(f \mathbb{1}_{[0;T]}) + \int_0^T f'(u)B_u\,du - f(T)B_T\right)B_s\right] = 0.$$

Comme $B(f \mathbb{1}_{[0;T]}) + \int_0^T f'(u)B_u\,du - f(T)B_T \in H(B_t, t \leq T)$ et que $(B_t, t \leq T)$ en est un sous-ensemble total, on a :

$$B(f \mathbb{1}_{[0;T]}) + \int_0^T f'(u)B_u\,du - f(T)B_T = 0$$

d'où la première assertion.

Pour la deuxième egalité, la seule chose à montrer vu la première partie est que les deux intégrales du membre de gauche convergent P p.s., or :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\int_0^\infty |f'(u)B_u|\,du\right) &= \int_0^\infty \int_\Omega \left|\frac{B_u}{\sqrt{u}}\right| |\sqrt(u)f'(u)|\,d\mathrm{P}du \\
&\leq \mathbb{E}(|B_1|) \times \int_0^\infty |f'(u)\sqrt(u)|\,du \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty |f'(u)\sqrt(u)|\,du \\
&< \infty
\end{aligned}$$

Donc P p.s. , $\int_0^\infty f'(u)B_u\,du$ converge.

Pour la première intégrale, il suffit de montrer que $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty f^2(t)\,dt &= \int_0^\infty \left(\int_t^\infty f'(u)\,du\right)^2 dt \\
&= \int_0^\infty \left(\int_t^\infty \int_t^\infty f'(u)f'(v)\,dudv\right) dt \\
&\leq \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbb{1}_{\{t\leq \min(u,v)\}} |f'(u)f'(v)|\,dudvdt \\
&\leq \int_0^\infty \int_0^\infty \min(u,v)|f'(u)f'(v)|\,dudv \\
&\leq \int_0^\infty \int_0^\infty \sqrt{uv}|f'(u)f'(v)|\,dudv \\
&= \left(\int_0^\infty \sqrt{u}|f'(u)|\,du\right)^2 \\
&< +\infty
\end{aligned}$$

Donc $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$ est la proposition est démontrée $\diamondsuit$

1.3.5 Deuxième méthode

Introduction D'après le théorème 1.3.3, si $\{\varphi_n; n \in \mathbb{N}\}$ est une base orthonormale de $L^2(\mathbb{R}^+)$ alors la suite $\{\xi_n; n \in \mathbb{N}\}$ définie par :

$$\xi_n = B(\varphi_n), n \in \mathbb{N}$$

est une base orthonormale de l'espace $H(B)$ et, en particulier, sont indépendantes de loi $\mathcal{N}(0;1)$.

Si on pose :

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_n(s) &= \int_0^s \varphi_n(u)\,du \\ &= <\varphi_n, 1\!\!1_{[0;s]}>\end{aligned}$$

alors on obtient :

$$1\!\!1_{[0;s]}(.) = \sum_{h\in\mathbb{N}} \tilde{\varphi}_n(s)\varphi_n(.)$$

et comme cette dernière série converge dans $L^2(\mathbb{R}^+)$, on a :

$$B_s = \sum_{n\in\mathbb{N}} \tilde{\varphi}_n(s)\xi_n.$$

Nous allons nous servir de ces remarques pour construire le mouvement brownien d'une façon plus théorique mais moins intuitive que précédemment.

Deuxième construction On se donne pour commencer :

i) Une base orthonormale $\{\varphi_n, n\in\mathbb{N}\}$ de $L^2(\mathbb{R}^+)$.

ii) Une suite $\{\xi_n, n\in\mathbb{N}\}$ de variables aléatoires indépendantes de loi normale centrée réduite.

On définit :

$$\forall t\geq 0, B_t = \sum_{n\in\mathbb{N}} \tilde{\varphi}_n(t)\xi_n$$

où l'on a gardé les mêmes notations que dans l'introduction, et comme la série converge dans $L^2(\Omega)$, on a :

1. $\mathbb{E}(B_t^2) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \tilde{\varphi}_n(t)^2 =< 1\!\!1_{[0;t]}, 1\!\!1_{[0;t]>} = t$
2. $\mathbb{E}(B_t) = 0$
3. $\mathbb{E}(B_tB_s) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \tilde{\varphi}_n(t)\tilde{\varphi}_n(s) =< 1\!\!1_{[0;t]}, 1\!\!1_{[0;s]} >= \min(t,s)$

Donc $\{B_t, t\geq 0\}$ est un processus gaussien centrée de covariance $\min(t,s)$. La seule chose restant à montrer d'après la proposition 1.2.2 est la continuité des trajectoires presque sûrement. On va prouver ceci en utilisant une base particulière de $L^2(\mathbb{R}^+)$, la base de Haar. Soit $\varphi : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t\in]0;1/2] \\ -1 & \text{si } t\in]1/2;1] \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Pour chaque $n, k \in \mathbb{N}$, on définit :

$$\varphi_{n,k}(t) = 2^{n/2}\varphi(2^n t - k), t \geq 0$$

On remarque que $\varphi_{n,k}(t) = 0$ pour $t \notin]k2^{-n}; (k+1)2^{-n}]$.
Puis on définit les fonctions :

$$\psi_k = \mathbb{1}_{]k;k+1]}, k \in \mathbb{N}.$$

La famille de fonctions $\{\psi_k, k \in \mathbb{N}\} \cup \{\varphi_{n,k},\ n, k \in \mathbb{N}\}$ est une base orthonormale de $L^2(\mathbb{R}^+)$ appelée base de Haar.

On remarque que la primitive $\tilde{\varphi}$ de φ est donnée par :

$$\tilde{\varphi}(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \in]0; 1/2] \\ 1-t & \text{si } t \in]1/2; 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et que la primitive $\tilde{\varphi}_{n,k}$ de $\varphi_{n,k}$ est donnée par :

$$\tilde{\varphi}_{n,k}(t) = 2^{n/2}\tilde{\varphi}(2^n t - k)$$

et s'annule en dehors de l'intervalle $]k2^{-n}; (k+1)2^{-n}[$.

Soit $\{\eta_k, k \in \mathbb{N}; \xi_{n,k},\ n, k \in \mathbb{N}\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi normale centrée réduite. On définit :

$$\beta_t = \sum_{k \in \mathbb{N}} \tilde{\psi}_k(t)\eta_k$$

$$B_t^n = \sum_{k \in \mathbb{N}} \tilde{\varphi}_{n,k}(t)\xi_{n,k} \ , n \in \mathbb{N}$$

$$B_t = \beta_t + \sum_{n \in \mathbb{N}} B_t^n \ , t \geq 0$$

On sait déjà que $\{B_t, t \geq 0\}$ est un processus gaussien centrée de fonction de covariance $\min(t, s)$ et qu'il nous reste juste à montrer que P p.s. les trajectoires sont continues pour savoir que ce processus est un mouvement brownien.

Remarquons tout d'abord que sur chaque intervalle compact $[0; T]$, $\{\beta_t\}$ et chaque B_t^n est une combinaison linéaire finie de fonctions continues, donc continue. Il reste à montrer que $\sum_n B_t^n$ converge uniformément sur $[0; T]$. Mais

$$B_t^n = \tilde{\varphi}_{n,k}(t)\xi_{n,k}, \text{ pour } k2^{-n} \leq t \leq (k+1)2^{-n}$$

d'où

$$\max_{0\leq t\leq T}|B_t^n| = 2^{-\frac{n}{2}-1}\max_{0\leq k\leq 2^nT}|\xi_{n,k}|,$$

et par conséquent :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(\max_{0\leq t\leq T}|B_t^n| > a2^{-\frac{n}{2}}\right) &= \mathrm{P}\left(\max_{0\leq k\leq T2^n}|\xi_{n,k}| > 2a\right)\\
&\leq T2^n\mathrm{P}\left(|\xi| > 2a\right)\\
&\leq T2^n e^{-2a^2},\ \text{si } a \geq 1
\end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(|\xi| > 2a\right) &\leq \frac{\mathbb{E}\left[|\xi|\mathbb{1}_{\{|\xi|>2a\}}\right]}{2a}\\
&= \frac{e^{-2a^2}}{a\sqrt{2T}}
\end{aligned}$$

On choisit $a = \sqrt{n}$:

$$\sum_{n\geq 1}\mathrm{P}\left(\max_{0\leq t\leq T}|B_t^n| > \sqrt{n}2^{-n/2}\right) \leq T\sum_{n\geq 1}(2e^{-2})^n < \infty$$

Il résulte alors du lemme de Borel-Cantelli que P pour presque tout $\omega \in \Omega, \exists n(\omega), \forall n \geq n(\omega)$,

$$\max_{0\leq t\leq T}|B_t^n| \leq \sqrt{n}2^{-n/2}$$

et la convergence uniforme découle alors du fait que $\sum_n \sqrt{n}2^{-n/2} < \infty$. On a ainsi redémontré l'existence du mouvement brownien $\diamondsuit$

1.3.6 Troisième méthode : le critère de Kolmogorov-Centsov

Reprenons le début du raisonnement précédent jusqu'à obtenir l'existence d'un processus gaussien centré $B_t, t \geq 0$ de covariance $\min(s,t)$. Il ne nous restait alors qu'à démontré l'existence d'un tel processus à trajectoires continues. Au lieu d'utiliser les bases de Haar, noous allons maintenant utiliser un critère de continuité dû à Kolmogorov-Centsov :

Théorème 1.3.7. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}, (X_t, t \in [0,1]))$ un processus aléatoire tel qu'il existe des constantes $\alpha, \beta, C > 0$ telles que pour tous $s, t \in [0,1]$,*

$$\mathbb{E}\left[|X_t - X_s|^\alpha\right] \leq C|t-s|^{1+\beta}.$$

Alors il existe un processus $\tilde{X}$ à trajectoires Hölderiennes d'ordre γ ($\gamma \in]0, \frac{\beta}{\alpha}[$), qui est une modification de X.

Preuve :
La première partie de la preuve va consister à construire le processus $\tilde{X}$ sur l'ensemble D des nombres dyadiques. Pour cela, si $\gamma \in]0, \alpha/\beta[$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(\max_{k=1\ldots 2^n} |X_{\frac{k}{2^n}} - X_{\frac{k-1}{2^n}}| > \frac{1}{2^{n\gamma}}\right) &= \mathrm{P}\left(\bigcup_{k=1}^{2^n}\left\{|X_{\frac{k}{2^n}} - X_{\frac{k-1}{2^n}}| > \frac{1}{2^{n\gamma}}\right\}\right) \\
&\leq \sum_{k=1}^{2^n} \mathrm{P}\left(\left\{|X_{\frac{k}{2^n}} - X_{\frac{k-1}{2^n}}|^\alpha > \frac{1}{2^{n\alpha\gamma}}\right\}\right) \\
&\leq \sum_{k=1}^{2^n} 2^{n\alpha\gamma}\mathbb{E}\left(|X_{\frac{k}{2^n}} - X_{\frac{k-1}{2^n}}|^\alpha\right) \text{ (d'après l'inégalité de Markov)} \\
&\leq \sum_{k=1}^{2^n} 2^{n\alpha\gamma} C\left(\frac{1}{2^n}\right)^{1+\beta} \text{ (vu les hypothèses)} \\
&= 2^n 2^{n\alpha\gamma} C 2^{-n-n\beta} \\
&= C2^{n(\alpha\gamma-\beta)}
\end{aligned}$$

Comme $\gamma \in]0, \alpha/\beta[$, on a $\sum_{n=1}^\infty C2^{n(\alpha\gamma-\beta)} < \infty$ donc d'après le lemme de Borel-Cantelli, on a

$$\mathrm{P}\left(\limsup_n \left\{\max_{k=1\ldots 2^n} |X_{\frac{k}{2^n}} - X_{\frac{k-1}{2^n}}| > \frac{1}{2^{n\gamma}}\right\}\right) = 0$$

ce qui signifie que : $\exists A \in \mathcal{F}, \mathrm{P}(A) = 1$ tel que $\forall \omega \in A, \exists N_\omega \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\omega, |X_{\frac{k}{2^n}}(\omega) - X_{\frac{k-1}{2^n}}(\omega)| \leq \frac{1}{2^{n\gamma}}$.
Notons $D_m = \left\{\frac{k}{2^m}, 0 \leq k \leq 2^m\right\}$ l'ensemble des dyadiques d'ordre m. Soit $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m > n \geq N_\omega$, et $s, t \in D_m$ tels que $s < t$,$|t-s| < \frac{1}{2^n}$.

Alors si $s = \frac{k}{2^m}$, il existe $a_1, \ldots, a_{m-n} \in \{0,1\}$ tels que $t = \frac{k}{2^m} + \frac{a_1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{a_{m-n}}{2^m}$ et on a

$$\begin{aligned}
|X_t(\omega) - X_s(\omega)| &= |X_{\frac{k}{2^m}+\frac{a_1}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{a_{m-n}}{2^m}}(\omega) - X_{\frac{k}{2^m}}(\omega)| \\
&\leq \sum_{j=1}^{m-n} |X_{\frac{k}{2^m}+\frac{a_1}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{a_j}{2^{n+j}}}(\omega) - X_{\frac{k}{2^m}+\frac{a_1}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{a_{j-1}}{2^{n+j-1}}}(\omega)| \\
&\leq \sum_{j=1}^{m-n} \frac{1}{2^{(n+j)\gamma}} \text{ vu que } \omega \in A.
\end{aligned}$$

Considérons maintenant $s, t \in D$ tels que $|s-t| \leq \frac{1}{2^{N_\omega}}$. Soit alors $n \in \mathbb{N}$ tel que $|s-t| \leq \frac{1}{2^n}$ et $|s-t| > \frac{1}{2^{n+1}}$ et $m > n$ tel que $s, t \in D_m$. D'après l'inégalité obtenue précédemment, on a

$$\begin{aligned}
|X_t(\omega) - X_s(\omega)| &\leq \sum_{j=n+1}^{m} \frac{1}{2^{j\gamma}} \\
&\leq 2^{-\gamma(n+1)} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j\gamma} \\
&= 2^{-\gamma(n+1)} \frac{2^\gamma}{2^\gamma - 1} \\
&\leq \frac{2^\gamma}{2^\gamma - 1} |t-s|^\gamma
\end{aligned}$$

Comme la fonction $t \mapsto X_t(\omega)$ est γ-hölderienne sur $D \cap [0,1]$, on peut la prolonger sur $[0,1]$ en une fonction toujours γ-hölderienne $t \mapsto \tilde{X}_t(\omega)$. Puis si $\omega \notin A$, on pose $\tilde{X}_t(\omega) = 0, \forall t \in [0,1]$. Le processus $\tilde{X}$ ainsi défini est à trajectoires hölderiennes d'ordre γ. Il ne reste plus qu'à montrer que $\tilde{X}$ est une modification de X. Or si $t \in D$, comme $\tilde{X}_t(\omega) = X_t(\omega)$ pour $\omega \in A$ et $\mathrm{P}(A) = 1$ on a $\tilde{X}_t = X_t$ P p.s. pour $t \in D$. Si $t \notin D$, on a

$$\forall \omega \in A, \tilde{X}_t(\omega) = \lim_{s \in D, s \to t} X_s(\omega)$$

Soit donc $(s_n)_n$ une suite de D qui converge vers t. Comme

$$\mathbb{E}\left[|X_t - X_{s_n}|^\alpha\right] \leq C|t - s_n|^{1+\beta},$$

X_{s_n} converge en probabilité vers X_t et quitte à extraire une sous-suite on peut supposer que X_{s_n} converge P p.s. vers X_t. Par unicité de la limite, on a donc, sur un ensemble de probabilité 1, $X_t(\omega) = \tilde{X}_t(\omega)$, et ceci achève la preuve $\diamondsuit$

1.4 Comportement asymptotique :

Théorème 1.4.1. *Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien alors on a :*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{B_t}{t}=0 \; P\,ps$$

Preuve :
On a :$\forall t\geq 0,\ \frac{B_t}{t}=\frac{B_{[t]}}{[t]}\frac{[t]}{t}+\frac{B_t-B_{[t]}}{t}$. D'après la loi des grands nombres on a :

$$\lim_{t\to\infty}\frac{B_{[t]}}{[t]}=\lim_{t\to\infty}\sum_{k=1}^{[t]}\frac{B_k-B_{k-1}}{[t]}=\mathbb{E}(B_1)=0$$

On pose pour $n\in\mathbb{N}^*, \xi_n=\sup_{s\in[n,n+1]}\left|B_s-B_{[s]}\right|$.

On obtient ainsi : $\forall t\geq 0, \left|\frac{B_t-B_{[t]}}{t}\right|\leq\frac{\xi_{[t]}}{[t]}$. Comme les var $\xi_n, n\in\mathbb{N}$ sont iid et intégrables (appliquer les inégalités maximales pour les martingales à B_t), d'après la loi des grands nombres, on a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\xi_n}{n}=0 \text{ P ps}$$

d'où le résultat $\diamondsuit$

Proposition 1.4.2. *Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien alors on a :*

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{B_t}{\sqrt{t}}=+\infty \;\; et \;\; \liminf_{t\to\infty}\frac{B_t}{\sqrt{t}}=-\infty \; P\,ps$$

Preuve :
On a

$$\mathrm{P}\left(\left\{\limsup_t\frac{B_t}{\sqrt{t}}=+\infty\right\}\right)\geq\mathrm{P}\left(\left\{\limsup_n\frac{B_n}{\sqrt{n}}=+\infty\right\}\right)=\mathrm{P}\left(\bigcap_{M\in\mathbb{N}}\left\{\limsup_n\frac{B_t}{\sqrt{t}}\geq M\right\}\right)$$

Or

$$\forall M\in\mathbb{N},\mathrm{P}\left(\left\{\limsup_n\frac{B_n}{\sqrt{n}}\geq M\right\}\right)\geq\limsup_n\mathrm{P}\left(B_n\geq M\sqrt{n}\right)$$

et P $(B_n \geq M\sqrt{n}) = \mathrm{P}(B_1 \geq M) > 0$.
D'autre part $\left\{\limsup \frac{B_n}{\sqrt{n}} \geq M\right\}$ est un évènement de la tribu asymptotique des va $(B_n - B_{n-1})_n$ qui sont indépendantes donc a pour probabilité 0 ou 1, et vu ce qui précède cela ne peut être que 1 $\diamondsuit$

Corollaire 1.4.3. *On a : P ps,*$\forall x \in \mathbb{R}, \exists t \geq 0$ *tel que* $B_t = x$*.*

Preuve :
Ceci résulte facilement de la proposition précédente et du théorème des valeurs intermédiaires $\diamondsuit$

La proposition 1.4.2 est un premier résultat concernant les comportements asymptotiques du mouvement brownien ne nécessitant que peu de travail. On peut en fait démontrer, sous peine d'efforts supplémentaires, un résultat beaucoup plus fort : la loi du logarithme itéré, qui non seulement donne une réponse sur le comportement de B_t quand $t \to 0$ (ou $t \to \infty$) mais illustre aussi l'irrégularité des trajectoires du mouvement brownien, ce qui sera l'objet de la section suivante.

Théorème 1.4.4. Loi du logarithme itéré :
Soit B *un* $(\mathcal{F}_t)$*-mouvement brownien. Alors on a :*

$$\mathrm{P}\left(\limsup_{t\to 0} \frac{B_t}{\sqrt{2t\ln(\ln(1/t))}} = 1\right) = 1 \quad \textit{et} \quad \mathrm{P}\left(\liminf_{t\to 0} \frac{B_t}{\sqrt{2t\ln(\ln(1/t))}} = -1\right) = 1.$$

Preuve :
Soit $\theta \in]0,1[, \delta > 0$ et $\beta > 0$. On note

$$h(s) = \sqrt{2s\ln(\ln(1/s))}$$

et on pose pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\beta_n = \beta h(\theta^n) \quad \text{et} \quad \alpha_n = \frac{(1+\delta)\ln(n)}{\beta_n}.$$

En appliquant l'inégalité maximale à la martingale exponentielle $\left\{\exp\left(\alpha_n B_t - \frac{\alpha_n^2 t}{2}\right), t \geq 0\right\}$ on a

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(\sup_{0\leq s\leq 1} \exp\left(\alpha_n B_s - \frac{\alpha_n^2 s}{2}\right) \geq \exp(\beta_n \alpha_n)\right) &\leq \exp(-\beta_n\alpha_n)\mathbb{E}\left[\exp(\alpha_n B_1 - \alpha_n^2/2)\right] \\ &= \exp(-\beta_n\alpha_n) \end{aligned}$$

d'où on tire

$$\mathrm{P}\left(\sup_{0\leq s\leq 1}\left(B_s - \frac{\alpha_n s}{2}\right) \geq \beta_n\right) \leq \exp(-\beta_n\alpha_n).$$

Or

$$\begin{aligned} \exp(-\beta_n\alpha_n) &= \exp(-\beta h(\theta^n)\frac{(1+\delta)\ln(n)}{\beta h(\theta^n)} \\ &= \frac{1}{n^{1+\delta}} \end{aligned}$$

et comme $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\delta}} < \infty$ on peut appliquer le lemme de Borel-Cantelli qui assure donc que

$$\mathrm{P}\left(\limsup_n \left\{\sup_{0\leq s\leq 1}(B_s - \alpha_n s/2) \geq \beta_n\right\}\right) = 0.$$

On en déduit qu'il existe $A \in \mathcal{F}$ tel que $\mathrm{P}(A) = 1$ et $\forall \omega \in A, \exists N_\omega \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\omega$

$$\sup_{0\leq s\leq 1}(B_s(\omega) - \alpha_n s/2) \leq \beta_n.$$

Soit θ_0 tel que $s \mapsto h(s)$ soit croissante sur l'intervalle $]0, \theta_0[, \omega \in A, n \geq \max\left(N_\omega, 1 + \frac{\ln(\theta_0)}{\ln(\theta)}\right)$, on a

$$\begin{aligned} \sup_{s\in[\theta^n,\theta^{n-1}]}\frac{B_s(\omega)}{h(s)} &= \sup_{s\in[\theta^n,\theta^{n-1}]}\left(\frac{B_s(\omega) - \frac{\alpha_n s}{2}}{h(s)} + \frac{\alpha_n s}{2h(s)}\right) \\ &\leq \frac{1}{h(\theta^n)}\sup_{s\in[\theta^n,\theta^{n-1}]}\left(B_s(\omega) - \frac{\alpha_n s}{2}\right) + \frac{\alpha_n\theta^{n-1}}{2h(\theta^n)} \\ &\leq \beta + \frac{\alpha_n\theta^{n-1}}{2h(\theta^n)} \\ &= \beta + \frac{(1+\delta)\ln(n)}{4\beta\theta\ln(\ln(\theta^{-n}))} \\ &= \beta + \frac{1+\delta}{4\beta\theta}\frac{\ln(n)}{\ln(n) + \ln(-\ln(\theta))} \end{aligned}$$

On pose $\varepsilon(n) = \frac{\ln(n)}{\ln(n)+\ln(-\ln(\theta))} - 1$, donc $\varepsilon(n) \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Puis on choisit $\beta = \sqrt{\frac{1+\delta}{4\theta}}$, ce qui donne :

$$\sup_{s\in[\theta^n,\theta^{n-1}]} \frac{B_s(\omega)}{h(s)} \leq \sqrt{\frac{1+\delta}{4\theta}}(1+\varepsilon(n)).$$

On en déduit pour $\omega \in A$

$$\limsup_{s\to 0} \frac{B_s(\omega)}{h(s)} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1+\delta}{4\theta}}(1+\varepsilon(n)) = \sqrt{\frac{1+\delta}{4\theta}}, \forall\delta > 0, \forall\theta \in]0,1[.$$

Choisissant $\theta \to 1$ et $\delta \to 0$ on obtient :

$$\text{P p.s. } \limsup_{s\to 0} \frac{B_s(\omega)}{h(s)} \leq 1. \tag{1.1}$$

On va montrer l'inégalité inverse. Soit maintenant $\theta \in]0,1[$ et $\beta \in]0, \sqrt{1-\theta}[$, alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(B_{\theta^n} - B_{\theta^{n+1}} > \beta_n\right) &= \mathrm{P}\left(B_1 > \frac{\beta_n}{\sqrt{\theta^n(1-\theta)}}\right) \\
&= \mathrm{P}\left(B_1 > \frac{\beta\sqrt{2\theta^n\ln(\ln(\theta^{-n}))}}{\sqrt{\theta^n(1-\theta)}}\right) \\
&= \mathrm{P}\left(B_1 > \beta\sqrt{\frac{2\ln(\ln(\theta^{-n}))}{1-\theta}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\beta\sqrt{\frac{2\ln(\ln(\theta^{-n}))}{1-\theta}}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \\
&\approx \frac{1}{\beta}\sqrt{\frac{1-\theta}{4\pi\ln(\ln(\theta^{-n}))}} e^{-\ln(\ln(\theta^{-n}))\frac{\beta^2}{1-\theta}} \text{ car } \int_x^{\infty} e^{\frac{-t^2}{2}}\,dt \approx \frac{e^{\frac{-x^2}{2}}}{x} \\
&\approx \frac{1}{2\beta(-\ln\theta)^{\frac{\beta^2}{1-\theta}}} \sqrt{\frac{1-\theta}{\pi}} \frac{1}{n^{\frac{\beta^2}{1-\theta}}\sqrt{\ln(n)}}
\end{aligned}$$

Or d'après le critère de Bertrand, la série $\sum \frac{1}{n^{\frac{\beta^2}{1-\theta}}\sqrt{\ln(n)}}$ diverge. On a donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}\left(B_{\theta^n} - B_{\theta^{n+1}} > \beta_n\right) = \infty$$

et comme les accroissements sont indépendants, on peut utiliser la réciproque du lemme de Borel-Cantelli qui assure que P p.s. on a pour une infinité de n, $B_{\theta^n} - B_{\theta^{n+1}} > \beta_n$.
D'autre part, en appliquant la formule 1.1 à $\{-B_t, t \geq 0\}$ qui est aussi un mouvement brownien, on obtient

$$\text{P p.s. } \liminf_{s\to 0} \frac{B_s(\omega)}{h(s)} \geq -1.$$

En combinant ces deux résultats, on obtient que P p.s., on a, pour une infinité de n,

$$B_{\theta^n} \geq \beta_n - h(\theta^{n+1})$$

ce qui donne pour ces n là :

$$\begin{aligned}
\frac{B_{\theta^n}}{h(\theta^n)} &\geq \beta - \frac{h(\theta^{n+1})}{h(\theta^n)} \\
&\geq \beta - \sqrt{\theta}\sqrt{\frac{\ln(\ln(\theta^{-n-1}))}{\ln(\ln(\theta^{-n}))}} \\
&= \beta - \sqrt{\theta}(1+\varepsilon(n))
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\text{P p.s. }, \limsup_{t\to 0} \frac{B_s}{h(s)} \geq \beta - \sqrt{\theta} \;, \forall \beta \in]0, \sqrt{1-\theta}[$$

d'où

$$\text{P p.s. }, \limsup_{t\to 0} \frac{B_s}{h(s)} \geq \sqrt{1-\theta} - \sqrt{\theta} \;, \forall \theta \in]0, 1[$$

et choisissant $\theta \to 0$, on obtient la minoration :

$$\text{P p.s. }, \limsup_{t\to 0} \frac{B_s}{h(s)} \geq 1$$

et ceci termine la preuve $\diamondsuit$

<u>Corollaire</u> 1.4.5. *Soit B un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien. Alors on a :*

$$\mathrm{P}\left(\limsup_{t\to\infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t\ln(\ln(t))}} = 1\right) = 1 \quad \textit{et} \quad \mathrm{P}\left(\liminf_{t\to\infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t\ln(\ln(t))}} = -1\right) = 1.$$

Preuve :
Il suffit d'appliquer le théorème 1.4.4 au mouvement brownien $\left\{tB_{\frac{1}{t}}, t \geq 0\right\}$ $\diamondsuit$

<u>Corollaire</u> 1.4.6. *Soit B un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien. Alors on a :*

$$\mathrm{P}\left(\limsup_{h\to 0} \frac{B_{t+h} - B_t}{\sqrt{2h\ln(\ln(1/h))}} = 1\right) = 1 \quad \textit{et} \quad \mathrm{P}\left(\liminf_{h\to 0} \frac{B_{t+h} - B_t}{\sqrt{2h\ln(\ln(1/h))}} = -1\right) = 1.$$

Preuve :
Il suffit d'appliquer le théorème 1.4.4 au mouvement brownien $\{B_{t+s} - B_t, s \geq 0\}$ $\diamondsuit$

FIG. 1.1 – Illustration par simulation de la loi du log itéré

Exercice 1.4.7. *Soit $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+)$, et $X_t = \int_0^t f(s)\, dB_s$. On pose*

$$a(t) = \int_0^t f^2(s)\, ds \textit{ et } c(t) = \inf\{u \geq 0; a(u) > t\}\,.$$

1) Montrer que le processus $W_t = X_{c(t)}$ est pour $0 \leq t < \int_0^\infty f^2(s)\, ds$, un mouvement brownien.

2) Montrer que pour tout $t \geq 0, X_t = W_{a(t)}$ P p.s.

3) On considère le processus $Z_t = \int_0^t \frac{1-t}{1-s}\, dB_s$, défini pour $0 \leq t < 1$. Montrer que Z_t tend presque sûrement vers 0 quand t tend vers 1.

Réponse :

1) Il est clair que a est continue et croissante, donc que c est croissante et continue à droite. P p.s., le processus $X_{c(t)}$ est donc continu en tout point de continuité de c et si t_0 n'est pas un point de continuité de c, en posant $x = \lim_{t\to t_0^-} c(t)$, $f = 0$ p.p. sur $[x, c(t_0)]$ (raisonner par l'absurde) et alors si $t < t_0$ on a

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to t_0^-} |X_{c(t_0)} - X_{c(t)}| &= \lim_{t\to t_0^-} \left| \int_{c(t)}^{c(t_0)} f(s)\, dB_s \right| \\
&= \left| \int_x^{c(t_0)} f(s)\, dB_s \right| \\
&= 0 \text{ car } f = 0 \text{ p.p. sur } [x, c(t_0)]
\end{aligned}$$

Donc X est un processus à trajectoires continues P p.s.
De plus on a $X_{c(0)} = 0$ car comme précédemment f est nulle sur $[0, c(0)]$. Ensuite comme $W_t \subset H(B)$, ce processus est gaussien. Il est facile de voir qu'il est centré car X l'est, puis

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(W_t, W_s) &= \mathbb{E}\left[X_{c(t)} X_{c(s)}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^{c(t)} f(u)\, dB_u \int_0^{c(s)} f(u)\, dB_u\right] \\
&= \int_0^{c(t)\wedge c(s)} f^2(u)\, du \\
&= a(c(t) \wedge c(s)) \\
&= a(c(t \wedge s)) = t \wedge s
\end{aligned}$$

Finalement W est bien un mouvement brownien.

2) On a évidemment

$$\forall t \geq 0, W_{a(t)} = X_{c(a(t))}.$$

Comme $c(a(t)) = \inf\{u \geq 0; a(u) > a(t)\}$ et que a est croissante, on a $c(a(t)) \geq t$. Puis

$$a(c(a(t))) = a(t) \Rightarrow \int_t^{c(a(t))} f^2(s)\, ds = 0$$

donc $f = 0$ p.p. sur $[t, c(a(t))]$ et ceci implique aussi que

$$\begin{aligned} X_{c(a(t))} &= \int_0^{c(a(t))} f(s)\, dB_s \\ &= \int_0^t f(s)\, dB_s + \int_t^{c(a(t))} f(s)\, dB_s \\ &= \int_0^t f(s)\, dB_s \\ &= X_t \end{aligned}$$

d'où le résultat.

3) Le fait que $s \mapsto \frac{1}{1-s} \notin L^2_{loc}(\mathbb{R}_+)$ ne permet pas d'appliquer directement les résultats précédents. Soit $\delta \in]0,1[$. Alors la fonction $s \mapsto \frac{1}{1-s} 1\!\!1_{[0,\delta]}(s) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+)$.

Si on pose $X_t = \int_0^t \frac{1}{1-s} 1\!\!1_{[0,\delta]}(s)\, dB_s$ et que l'on applique ce qui précède, on a

$$a(t) = \begin{cases} \frac{t}{1-t} & \text{si} \quad t \in [0,\delta] \\ \frac{\delta}{1-\delta} & \text{si} \quad t > \delta \end{cases} \quad \text{et } c(t) = \frac{t}{1+t} \text{ pour } t \in \left[0, \frac{\delta}{1-\delta}\right[$$

Ainsi, on a montré que

$$\forall \delta < 1, W_t = \int_0^{\frac{t}{1+t}} \frac{1}{1-s}\, ds$$

est un mouvement brownien sur $\left[0, \frac{\delta}{1-\delta}\right[$ et $X_t = W_{\frac{t}{1-t}}$ P p.s. (en appliquant la question 2 avec $t < \delta < 1$).

En résumé,

$$W_t = \int_0^{\frac{t}{1+t}} \frac{1}{1-s}\, dB_(s), t \geq 0$$

est un mouvement brownien et pour $t < 1$ on a

$$\int_0^t \frac{1}{1-s}\, dB_s = W_{\frac{t}{1-t}}.$$

Utilisant le théorème 1.4.1, on a

$$\lim_{t\to 1^-} \frac{1-t}{t} W_{\frac{t}{1-t}} = 0 \text{ P p.s.}$$

soit

$$\lim_{t\to 1^-} \frac{Z_t}{t} = 0 \text{ P p.s.}$$

ce qui donne le résultat voulu $\diamondsuit$

1.5 Régularité du mouvement brownien

1.5.1 Variation quadratique du mouvement brownien

Proposition 1.5.2. *$\forall s, t \in \mathbb{R}, 0 \leq s \leq t$, si $(\Delta_k)_k$ est une suite de subdivisions se $[s, t]$ telle que le pas de ces subdivisions tende vers 0 alors les expressions*

$$T^{\Delta_k} = \sum_i (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2$$

convergent en moyenne quadratique vers $(t - s)$.

Preuve :
En se servant du fait que pour une variable $N(0, \sigma^2)$ le moment d'ordre 4 est égal à $3\sigma^4$ et que les accroissements $(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})$ sont indépendants, on obtient que :

$$\mathbb{E}\left[\left(T^{\Delta_k} - (t-s)\right)^2\right] = 2\sum_i (t_i - t_{i-1})^2 \leq 2 * |\Delta_k|(t-s)$$

et cette dernière expression tend vers 0 lorsque k tend vers l'infini $\diamondsuit$

Traitons un cas particulier de ce dernier résultat : lorsque les subdivisions sont choisies de telle sorte que $\forall k, \Delta_{k+1}$ soit plus fine que Δ_k. Dans ce cas-là on obtient la convergence presque sûre de T^{Δ_k}. Pour simplifier on choisit $\forall n \in \mathbb{N}, \Delta_n = \left\{0, \frac{t}{2^n}, \ldots, \frac{tk}{2^n}, \ldots, t\right\}$.

Proposition 1.5.3. *Supposons que* $\forall n \in \mathbb{N}, \Delta_n = \left\{0, \frac{t}{2^n}, \ldots, \frac{tk}{2^n}, \ldots, t\right\}$ *et soit*

$$T^{\Delta_n} = \sum_{i=1}^{2^n} (B_{\frac{it}{2^n}} - B_{\frac{t(i-1)}{2^n}})^2.$$

Alors T^{Δ_n} *converge vers* t $P\, ps$.

Preuve :
Nous avons déjà calculé $\mathbb{E}\left(T^{\Delta_n}\right)$ qui vaut t. Ensuite nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\left(T^{\Delta_n}\right) &= \sum_{k=1}^{2^n} \mathrm{Var}\left(\left(B_{\frac{kt}{2^n}} - B_{\frac{t(k-1)}{2^n}}\right)^2\right) \\
&= \sum_{k=1}^{2^n} 3\left(\frac{t}{2^n}\right)^2 \\
&= \frac{3t^2}{2^n}
\end{aligned}$$

Puis d'après l'inégalité de Tchebycheff,on a :

$$\mathrm{P}\left(\left|T^{\Delta_n} - t\right| \geq \frac{1}{k}\right) \leq k^2 \mathrm{Var}\left(T^{\Delta_n}\right) = k^2 \frac{3t^2}{2^n}$$

Comme la série $\sum \frac{1}{2^n}$ converge on peut utiliser le lemme de Borel-Cantelli qui assure que

$$\mathrm{P}\left(\limsup_n \left\{\left|T^{\Delta_n} - t\right| \geq \frac{1}{k}\right\}\right) = 0$$

On obtient ainsi :

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \limsup_n \left\{\left|T^{\Delta_n} - t\right| \geq \frac{1}{k}\right\}\right) = 0$$

et ceci assure que T^{Δ_n} converge P ps vers t $\diamondsuit$

Remarque : Il découle de la proposition 1.5.2 qu'un mouvement brownien n'est p.s. pas à variation bornée sinon on aurait

$$T^{\Delta_k} \leq \|B_t\| \times \sup_i |B_{t_i^k} - B_{t_{i-1}^k}| \to 0 \text{ lorsque } k \to \infty.$$

où $\|B_t\|$ représente la variation totale de B_t.

1.5.4 Non-différentiabilité

Proposition 1.5.5. *Presque toute les trajectoires du mouvement brownien ne sont nulle part différentiables sur* $\mathbb{R}^+$.

Preuve :
Si l'application $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est différentiable en un point s de $[0; T[$, alors il existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que

$$|f(t) - f(s)| \leq n(t - s)$$

pour $(t - s)$ suffisamment petit et ceci entraîne que pour k suffisamment grand, $i = [ks] + 1$ et j entier tel que $i < j \leq i + 3$,

$$|f(j/k) - f((j-1)/k)| \leq |f(j/k) - f(s)| + |f(s) - f((j-1)/k)| \leq \frac{7n}{k}$$

car pour de tels j les différences de j et $j-1$ avec s sont au plus de $\frac{4}{k}$ et $\frac{3}{k}$. En conséquence, si on pose

$$D = \{\omega \in \Omega; \exists s < T, t \to B_t(\omega) \text{ est différentiable en } s\}$$

alors on a

$$D \subset \bigcup_{n\geq 1} \bigcup_{m\geq 1} \bigcap_{k\geq m} \bigcup_{0<i<Tk+1} \bigcap_{i<j\leq i+3} \left\{|B_{\frac{j}{k}} - B_{\frac{j-1}{k}}| \leq \frac{7n}{4}\right\}$$

Notons

$$F_{n,k} = \bigcup_{0<i<Tk+1} \bigcap_{i<j\leq i+3} \left\{|B_{\frac{j}{k}} - B_{\frac{j-1}{k}}| \leq \frac{7n}{4}\right\},$$

on a alors

$$\mathrm{P}\left(F_{n,k}\right) \leq Tk \left(\mathrm{P}\left(|\xi| \leq \frac{7n}{\sqrt{k}}\right)\right)^3$$

d'où

$$\mathrm{P}\left(F_{n,k}\right) \leq Tk \left(\frac{14n}{\sqrt{k}}\right)^3 = \frac{(14n)^3}{\sqrt{k}}$$

On en déduit alors que

$$\mathrm{P}\left(\liminf_n F_{n,m}\right) \leq \liminf_m \mathrm{P}\left(F_{n,m}\right) = 0 \text{ (par le lemme de Fatou)}$$

et donc que $\mathrm{P}(D) = 0$, ce qui prouve la proposition $\diamondsuit$

1.5.6 Propriétés de Hölder

Proposition 1.5.7. $\forall \alpha < \frac{1}{2}$, *presque toutes les trajectoires du mouvement brownien sont α-hölderiennes sur tout sous-ensemble compact de* $\mathbb{R}$, *ie* $\forall T > 0$,

$$\sup_{s,t\in[0;T];0<|t-s|<h} \frac{|B_t - B_s|}{|t-s|^\alpha} \to 0 \textit{ P p.s. lorsque } h \to 0$$

Preuve :
Reprenons les notations de la section 1.3.5 de la page 12. Soit $T > 0$ et $s, t \in [0;T]$, nous avons (si $s < t$ par exemple) :

$$\begin{aligned} |\beta_t - \beta_s| &= \left| \sum_{k=0}^{T} \int_0^t \psi_k(u)\, du\, \eta_k - \sum_{k=0}^{T} \int_0^s \psi_k(u)\, du\, \eta_k \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{T} \int_s^t \psi_k(u)\, du \max_{0\leq k\leq T} |\eta_k| \\ &= \int_s^t 1\, du \max_{0\leq k\leq T} |\eta_k| \\ &= (t-s) \max_{0\leq k\leq T} |\eta_k| \end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned}
|B_t^n - B_s^n| &\leq 2 \max_{0\leq u\leq T} |B_u^n| \\
&= 2 \max_{0\leq u\leq T} \left| \sum_{k=0}^{2^nT-1} \tilde{\varphi}_{n,k}(u)\xi_{k,n} \right| \\
&\leq 2 \times \left(\max_{0\leq u\leq T} \sum_{k=0}^{2^nT-1} |\tilde{\varphi}_{n,k}(u)| \right) \max_{0\leq k<2^nT} |\xi_{n,k}| \\
&\leq \max_{0\leq k<2^nT} |\xi_{n,k}| \max_{0\leq u\leq T} \left(\int_0^T |\varphi_{n,k_0(u)}|(x)\, dx \right) \text{ où } k_0(u) \text{ est tel que } u \in \left] \frac{k}{2^n}; \frac{k+1}{2^n} \right] \\
&= 2^{-n/2} \max_{0\leq k<2^nT} |\xi_{n,k}|
\end{aligned}$$

Mais on a également

$$\begin{aligned}
|B_t^n - B_s^n| &= \left| \sum_{k=0}^{2^nT-1} \left(\tilde{\varphi}_{n,k}(t)\xi_{n,k} - \tilde{\varphi}_{n,k}(s)\xi_{n,k}\right) \right| \\
&\leq \max_{0\leq k<2^nT-1} |\xi_{n,k}| \sum_{k=0}^{2^nT-1} \left| \int_s^t \varphi_{n,k}(u)\, du \right| \\
&\leq \max_{0\leq k<2^nT-1} |\xi_{n,k}| \int_s^t \left(\sum_{k=0}^{2^nT-1} |\tilde{\varphi}_{n,k}(u)| \right) du \\
&\leq \max_{0\leq k<2^nT-1} |\xi_{n,k}| \left(\int_s^t 2^{n/2}\, du \right) \\
&\leq 2^{n/2}|t-s| \max_{0\leq k<2^nT-1} |\xi_{n,k}|
\end{aligned}$$

On a également démontré à la section 1.3.5 que

$$\mathrm{P}\left(\max_{0\leq k<2^nT} |\xi_{n,k}| > 2\sqrt{n} \right) \leq 2^nTe^{-2n}$$

et comme ce majorant est le terme général d'une série convergente, le lemme de Borel-Cantelli assure que pour presque tout $\omega \in \Omega, \exists n(\omega) \in \mathbb{N}, \forall n \geq n(\omega)$,

$$\max_{0\leq k<2^nT} |\xi_{n,k}| \leq 2\sqrt{n}.$$

On a ainsi pour $0 \leq s, t \leq T$:

$$\begin{aligned} |B_t(\omega) - B_s(\omega)| &\leq |\beta_t(\omega) - \beta_s(\omega)| + \sum_{n \in \mathbb{N}} |B_t^n(\omega) - B_b^n(\omega)| \\ &\leq |\beta_t(\omega) - \beta_s(\omega)| + \sum_{n < n(\omega)} |B_t^n(\omega) - B_b^n(\omega)| + f(|t-s|), \end{aligned}$$

où

$$f(u) = \sum_{n \in \mathbb{N}} 2\sqrt{n} \min(2^{-n/2}, u2^{n/2}), u \in \mathbb{R}^+$$

Pour montrer notre proposition, il ne reste plus qu'à montrer que $f(u) = O(u^\alpha)$.
Soit $\alpha < \frac{1}{2}$ alors $\exists \delta > 0$ tel que $\alpha = \frac{1}{2} - \delta$. Comme $\sqrt{n}2^{-n\delta} \to 0$ lorsque $n \to \infty$, il existe une constante $C > 0$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n}2^{-n\delta} \leq C$. Soit $u \geq 0$ et $n_0 = \min\left\{n \in \mathbb{N}; u2^{n_0/2} > 2^{-n_0/2}\right\}$ alors

$$\begin{aligned} f(u) &= \sum_{n=1}^{n_0-1} 2\sqrt{n}u2^{n/2} + \sum_{n=n_0}^{\infty} 2\sqrt{n}2^{-n/2} \\ &= 2u \sum_{n=1}^{n_0-1} \sqrt{n}2^{n/2} + 2\sum_{n=n_0}^{\infty} 2\sqrt{n}2^{-n/2} \\ &\leq 2u \sum_{n=1}^{n_0-1} C2^{n\left(\frac{1}{2}+\delta\right)} + 2\sum_{n=n_0}^{\infty} C2^{n\left(-\frac{1}{2}+\delta\right)} \\ &\leq 2Cu\frac{2^{n_0\left(\frac{1}{2}+\delta\right)}}{2^{\frac{1}{2}+\delta}-1} + 2C\frac{2^{n_0\left(-\frac{1}{2}+\delta\right)}}{2^{-\frac{1}{2}+\delta}-1} \\ &= 2uC\frac{(2^{-n_0})^{-\frac{1}{2}+\delta}}{2^{\frac{1}{2}+\delta}-1} + 2C\frac{(2^{-n_0})^{\frac{1}{2}-\delta}}{2^{-\frac{1}{2}+\delta}-1} \\ &= \frac{2Cu}{2^{\frac{1}{2}+\delta}-1}u^{-\frac{1}{2}-\delta} + \frac{2C}{2^{-\frac{1}{2}+\delta}-1}u^{\frac{1}{2}-\delta} \\ &= \left(\frac{2C}{2^{\frac{1}{2}+\delta}-1} + \frac{2C}{2^{-\frac{1}{2}+\delta}-1}\right)u^\alpha, \end{aligned}$$

ce qui démontre le résultat $\diamondsuit$

Proposition 1.5.8. *Pour $\alpha > \frac{1}{2}, \forall T > 0$, P presque toutes les trajectoires du mouvement brownien ne sont pas α-hölderiennes sur l'intervalle $[0;T]$.*

Preuve :
Reprenons les notations de la proposition 1.5.2 de la page 26 . Soit $\omega \in \Omega$ tel que $t \mapsto B_t(\omega)$ soit α-hölderienne sur l'intervalle $[0;T]$, où $\alpha > 1/2$. Soit $\delta > 0$ tel que $\alpha = \frac{1}{2} + \delta$. On a

$$\begin{aligned}
T^{\Delta n}(\omega) &= \sum_{i=1}^{n} \left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)^2 \\
&\leq C \sum_{i=1}^{n} |t_i - t_{i-1}|^{2\alpha} \\
&= C \sum_{i=1}^{n} |t_i - t_{i-1}|^{1+2\delta} \\
&\leq T \sup_{i=1\ldots n} |t_i - t_{i-1}|^{2\delta} \\
&\to 0 \text{ lorsque } n \to \infty
\end{aligned}$$

Donc

$$\{\omega \in \Omega; t \mapsto B_t(\omega) \text{ soit } \alpha - \text{hölderienne sur } [0;T]\} \subseteq \left\{\omega \in \Omega; T^{\Delta n}(\omega) \to 0 \text{ en } n\infty\right\}$$

et ce dernier ensemble est de probabilité nulle d'après la proposition 1.5.2 $\diamondsuit$

Le seul cas restant à traiter est le cas $\alpha = \frac{1}{2}$.

Proposition 1.5.9. *Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, P presque toutes les trajectoires du mouvement brownien ne sont pas α-hölderiennes.*

Preuve :
On commence par une remarque. Si $\{B_t, t \geq 0\}$ est un mouvement brownien alors il résulte du théorème 1.4.1 à la page 18 que $\left\{B'_t = tB_{\frac{1}{t}}, t \geq 0\right\}$ est aussi un mouvement brownien. Ensuite, d'après la proposition 1.4.2 page 18, on a P p.s. :

$$\begin{aligned}
\limsup_{u \searrow 0} \frac{|B_u|}{\sqrt{u}} &= \limsup_{t \to \infty} \sqrt{t}|B_{1/t}| \\
&= \limsup_{t \to \infty} \frac{tB_{\frac{1}{t}}}{\sqrt{t}} \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

Ensuite, si $\{B_t, t \geq 0\}$ est un mouvement brownien alors pour $s > 0$ fixé, $\{B_{t+s} - B_s, t \geq 0\}$ est également un mouvement brownien et, appliquant ce qui précède, on obtient :

$$\text{P p.s. } \limsup_{t \searrow 0} \frac{|B_{t+s} - B_s|}{\sqrt{t}} = +\infty$$

et ceci suffit à prouver notre assertion $\diamondsuit$

1.6 Temps d'atteinte

Soit $(B_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ un mouvement brownien, $\forall t \geq 0$ $\mathcal{F}_t$ la tribu engendrée par $\{B_s; 0 \leq s \leq t\}$ et pour $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < 0$ et $b > 0)$, S_{ab}, T_a et T_b les temps d'arrêt définis par :

$$\begin{array}{l} S_{ab} = \inf \{t \in \mathbb{R}^+; B_t \notin [a; b]\} \\ T_a = \inf \{t \in \mathbb{R}^+; B_t < a\} \\ T_b = \inf \{t \in \mathbb{R}^+; B_t > b\} \end{array}$$

<u>Lemme</u> 1.6.1. *Les temps d'arrêt S_{ab}, T_a et T_b sont finis P p.s.*

Preuve :
On peut soit utiliser le corollaire de la proposition 1.4.2 page 18 soit raisonner comme suit.
On a :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{P}(S_{ab} = +\infty) & = & \mathrm{P}(\{\forall t \geq 0; B_t \in [a; b]\}) \\ & \leq & \mathrm{P}(\{\forall n \in \mathbb{N}; B_n \in [a; b]\}) \\ & = & \mathrm{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{B_1 + (B_2 - B_1) + \cdots + (B_n - B_{n-1})}{\sqrt{n}} \in \left[\frac{a}{\sqrt{n}}; \frac{b}{\sqrt{n}} \right] \right\} \right) \\ & \longrightarrow & 0 \text{ lorsque } n \to \infty \text{ d'après le théorème de la limite centrale.} \end{array}$$

et ceci nous donne $\mathrm{P}(S_{ab} = +\infty) = 0$.

Comme $e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2 t}{2}}$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale on peut appliquer le théorème d'arrêt au temps d'arrêt borné $T_b \wedge t$ et on alors :

$$\mathbb{E}\left(e^{\lambda B_{t\wedge T_b} - \frac{\lambda^2(t\wedge T_b)}{2}}\right) = 1$$

Or $B_{t\wedge T_b} \leq b$ donc on a :

$$\forall \lambda \geq 0, \mathbb{E}\left(e^{-\frac{\lambda^2(t\wedge T_b)}{2}}\right) \geq e^{-\lambda b}$$

On peut alors utiliser le théorème de Lebesgue pour avoir :

$$\forall \lambda \geq 0, \mathbb{E}\left(e^{-\frac{\lambda^2 T_b}{2}}\right) \geq e^{-\lambda b}$$

et comme

$$1\!\!1_{\{T_b<+\infty\}} \geq e^{-\frac{\lambda^2 T_b}{2}}$$

on a en prenant l'espérance :

$$\mathrm{P}\left(T_b < +\infty\right) \geq e^{-\lambda b}, \forall \lambda \geq 0.$$

En faisant tendre λ vers 0, on obtient :$\mathrm{P}\left(T_b < +\infty\right) = 1$ et pour des raisons de symétrie du mouvement brownien on a aussi $\mathrm{P}\left(T_a < +\infty\right) = 1$ $\diamondsuit$

Proposition 1.6.2. *On a les propriétés suivantes pour les temps d'arrêt S_{ab}, T_a et T_b :*

- $\mathbb{E}(S_{ab}) = |ab|$
- $\mathrm{P}\left(T_a < T_b\right) = \frac{b}{b-a}$ *et* $\mathrm{P}\left(T_b < T_a\right) = \frac{-a}{b-a}$
- *La transformée de Laplace de T_b est donnée par :*$\forall \lambda \geq 0, \mathbb{E}\left(e^{-\lambda T_b}\right) = e^{-\sqrt{2\lambda} b}$
- *La densité de T_b est donnée par :* $f(t) = \sqrt{2\pi t^3} e^{-\frac{b^2}{2t}}$

Preuve :
En appliquant le théorème d'arrêt à B_t on a :

$$\mathbb{E}\left(B_{S_{ab}\wedge t}\right) = 0$$

et comme $|B_{S_{ab}\wedge t}| \leq \max(-a, b)$ on peut appliquer le théorème de Lebesgue qui donne :

$$\mathbb{E}\left(B_{S_{ab}}\right) = 0.$$

Notons $\mathrm{P}_a = \mathrm{P}\left(T_a < T_b\right)$ et $\mathrm{P}_b = \mathrm{P}\left(T_b < T_a\right)$. On a :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a\mathrm{P}_a + b\mathrm{P}_b & = & 0 \\ \mathrm{P}_a + \mathrm{P}_b & = & 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \mathrm{P}_a = \frac{b}{b-a} \\ \mathrm{P}_b = \frac{-a}{b-a} \end{array}\right.$$

Puis en appliquant le théorème d'arrêt à la martingale $B_t^2 - t$ et en utilisant les mêmes arguments que précédemment on obtient :

$$\mathbb{E}(S_{ab}) = \mathbb{E}(B_{S_{ab}}^2 = a^2\mathrm{P}_a + b^2\mathrm{P}_b = -ab = |ab|.$$

Ensuite en reprenant la fin de la démonstration du lemme précédent, on a :

$$\mathbb{E}\left(e^{\lambda B_{t\wedge T_b} - \frac{\lambda^2(t\wedge T_b)}{2}}\right) = 1$$

et d'après le théorème de Lebesgue (l'intégrand est majorée par $e^{\lambda b}$) on obtient :

$$\mathbb{E}\left(e^{\lambda B_{T_b} - \frac{\lambda^2 T_b}{2}}\right) = 1$$

soit

$$\mathbb{E}\left(e^{-\frac{\lambda^2(T_b)}{2}}\right) = e^{-\lambda b}$$

d'où le résultat $\diamondsuit$

Chapitre 2

Calcul stochastique d'Itô

2.1 L'intégrale stochastique d'Itô

On suppose à partir de maintenant que l'on dispose d'un espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{F}; \mathrm{P})$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ et sur lequel est défini un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien $\{B_t, t \geq 0\}$. On suppose de plus que $\mathcal{F}_0$ contient tous les ensembles de P-mesure nulle. Définissons alors une première classe d'intégrands.

<u>Définition</u> 2.1.1. *Un processus stochastique $\varphi_t(\omega)$ défini sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ (resp sur $[0,T] \times \Omega$) est dit progressivement mesurable si $\forall t \in \mathbb{R}_+$ (resp $t \in [0,T]$) l'application :*

$$(s, \omega) \mapsto \varphi_s(\omega)$$

de $[0,T] \times \Omega$ dans $\mathbb{R}$ est $\mathcal{B}([0,T]) \otimes \mathcal{F}_t$ mesurable.

On notera par la suite $\Lambda^2(\mathbb{R}_+)$ (resp $\Lambda^2([0,T])$) le sous-espace de $L^2(\Omega \times \mathbb{R}_+, \mathrm{P}\,(d\omega)\ dt\,)$ (resp
$L^2(\Omega \times [0,T], \mathrm{P}\,(d\omega)\, dt)$) constitué des classes de processus progressivement mesurables. Muni du produit scalaire

$$< \varphi, \psi >= \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}_+} \varphi_t \psi_t \, dt\right] \qquad (\textit{resp } = \mathbb{E}\left[\int_0^T \varphi_t \psi_t \, dt\right]),$$

$\Lambda(\mathbb{R}_+)$ (resp $\Lambda^2([0,T])$) est un espace de Hilbert.

Pour finir, on définit

$$\Lambda^2 = \bigcap_{T>0} \Lambda^2([0,T]).$$

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des classes de processus de la forme :

$$\varphi_t(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} X_i(\omega)\mathbb{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(t) \ , t \geq 0$$

avec $n \in \mathbb{N}$, $0 < t_1 < \ldots, < t_n$ et X_i $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurable et de carré intégrable pour $0 \leq i \leq n-1$.
(On remarque facilement que φ est progressivement mesurable).
Pour $\varphi \in \mathcal{E}$ de la forme précédente, on définit le processus stochastique intégral

$$\begin{aligned} B(\varphi)_t &= \int_0^t \varphi_s \, dB_s \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} X_i(B_{t\wedge t_{i+1}} - B_{t\wedge t_i}) \ , t \geq 0 \end{aligned}$$

<u>Lemme</u> 2.1.2. *Si $\varphi \in \mathcal{E}$, alors $\forall t > 0$,*

$$\mathbb{E}(B(\varphi)_t) = 0 \quad \textit{et} \quad \mathbb{E}\left[B(\varphi)_t^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \varphi_s^2 \, ds\right] \ , t \geq 0.$$

Plus généralement, si $0 < s < t$,

$$\mathbb{E}\left[B(\varphi)_t - B(\varphi)_s | \mathcal{F}_s\right] = 0$$

$$\mathbb{E}\left[(B(\varphi)_t - B(\varphi)_s)^2 | \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_s^t \varphi_r^2 \, dr | \mathcal{F}_s\right]$$

Preuve :
Si $\varphi_t(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} X_i(\omega)\mathbb{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(t)$ alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(B(\varphi)_t) &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[X_i(B_{t\wedge t_{i+1}} - B_{t\wedge t_i})\right] \\ &= 0 \text{ car } X_i \perp\!\!\!\perp (B_{t\wedge t_{i+1}} - B_{t\wedge t_i}) \end{aligned}$$

Pour la deuxième égalité, on remarque tout d'abord pour $i < j$ (donc $t_{i+1} \leq t_j$)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\big[X_iX_j(B_{t\wedge t_{i+1}} - B_{t\wedge t_i})(B_{t\wedge t_{j+1}} - B_{t\wedge t_j})\big] &= \mathbb{E}\big[\mathbb{E}\big[X_iX_j(B_{t\wedge t_{i+1}} - B_{t\wedge t_i})(B_{t\wedge t_{j+1}} - B_{t\wedge t_j})|\mathcal{F}_{t_j}\big]\big] \\ &= \mathbb{E}\big[X_iX_j(B_{t\wedge t_{i+1}} - B_{t\wedge t_i})\mathbb{E}\big[(B_{t\wedge t_{j+1}} - B_{t\wedge t_j})|\mathcal{F}_{t_j}\big]\big] \\ &= 0 \qquad (2.1) \end{aligned}$$

et de là, on en déduit :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} X_i(B_{t\wedge t_{i+1}} - B_{t\wedge t_i})\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{n-1}\left(X_i(B_{t\wedge t_{i+1}} - B_{t\wedge t_i})\right)^2\right] \\
&\quad +2\mathbb{E}\left[\sum_{i<j} X_iX_j(B_{t\wedge t_{i+1}} - B_{t\wedge t_i})(B_{t\wedge t_{j+1}} - B_{t\wedge t_j})\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{n-1}\left(X_i(B_{t\wedge t_{i+1}} - B_{t\wedge t_i})\right)^2\right] \text{ vu 2.1} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{E}\left(X_i\right)\mathbb{E}\left[\left(B_{t\wedge t_{i+1}} - B_{t\wedge t_i}\right)^2\right] \text{ car } X_i \perp\!\!\!\perp (B_{t\wedge t_{i+1}} - B_{t\wedge t_i}) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{E}\left(X_i^2\right)(t\wedge t_{i+1} - t\wedge t_i) \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^t \varphi_s^2\, ds\right]
\end{aligned}
$$

Puis si $0 < s < t$, soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $t_{n_0} \geq s$ et $t_{n_0-1} < s$, alors

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[B(\varphi)_t|\mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{n-1} X_i(B_{t\wedge t_{i+1}} - B_{t\wedge t_i})|\mathcal{F}_s\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{E}\left[X_i(B_{t\wedge t_{i+1}} - B_{t\wedge t_i})|\mathcal{F}_s\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n_0-1}\mathbb{E}\left[X_i(B_{t\wedge t_{i+1}} - B_{t\wedge t_i})|\mathcal{F}_s\right] + \sum_{i=n_0}^{n-1}\mathbb{E}\left[X_i(B_{t\wedge t_{i+1}} - B_{t\wedge t_i})|\mathcal{F}_s\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n_0-1}\mathbb{E}\left[X_i(B_{s\wedge t_{i+1}} - B_{s\wedge t_i})|\mathcal{F}_s\right] + \sum_{i=n_0}^{n-1}\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X_i(B_{t\wedge t_{i+1}} - B_{t\wedge t_i})|\mathcal{F}_{t_i}\right]|\mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[B(\varphi)_s|\mathcal{F}_s\right] + \sum_{i=n_0}^{n-1}\mathbb{E}\left[X_i\mathbb{E}\left[(B_{t\wedge t_{i+1}} - B_{t\wedge t_i})|\mathcal{F}_{t_i}\right]|\mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[B(\varphi)_s|\mathcal{F}_s\right] \text{ car } (B_{t\wedge t_{i+1}} - B_{t\wedge t_i}) \text{ est centrée et } \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_{t_i}
\end{aligned}
$$

La dernière égalité se montre de façon analogue $\diamondsuit$

Il résulte du lemme précédent que $\{B(\varphi)_t, t \geq 0\}$ et $\left\{B(\varphi)_t^2 - \int_0^t \varphi_s^2\, ds, t \geq 0\right\}$ sont des $\mathcal{F}_t$-martingales. De plus, en utilisant les inégalités maximales pour les martingales, ie

$$\mathrm{P}\left(\max_{0\leq t\leq T} |M_t| \geq \lambda\right) \leq \lambda^{-p}\mathbb{E}(|M_T|^p),$$

et le théorème de Fubini, on obtient pour une martingale continue $\{M_t, t \geq 0\}$ et pour $1 < p, q < \infty$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$$\left\|\sup_{0\leq t\leq T} |M_t|\right\|_{L^p(\Omega)} \leq q\|M_T\|_{L^p(\Omega)}. \tag{2.2}$$

Si on choisit $p = q = 2$ et que l'on applique ceci à $\{B(\varphi)_{t+s} - B(\varphi)_s, t \geq 0\}$, qui est une martingale, on obtient

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} (B(\varphi)_{t+s} - B(\varphi)_s)^2\right] \;\leq\; 4\mathbb{E}\left(\int_s^{T+s} \varphi_r^2\, dr\right) \tag{2.3}$$

Cette formule nous sera utile par la suite pour étendre l'intégrale stochastique à Λ^2, via le lemme suivant

Lemme 2.1.3. *Pour tout $\varphi \in \Lambda^2$, il existe une suite $\varphi_n \in \mathcal{E}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall T > 0$*

$$\varphi_n \mathbb{1}_{[0,T]} \to \varphi \mathbb{1}_{[0,T]}$$

dans $\Lambda^2([0, T])$.

Preuve :
$\forall n \geq 1$, on considère l'opérateur linéaire P_n de $L^2(\mathbb{R}^+)$ dans lui-même défini par

$$P_n(f)(t) = n\sum_{i=1}^{n^2}\left(\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(s)\, ds\right)\mathbb{1}_{]\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}]}(t).$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$P_n(f)^2(t) \leq n\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f^2(s)\, ds\, , t \in \left]\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]\, , 1 \leq i \leq n^2$$

et

$$\|P_n(f)\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}.$$

De plus, si $f \in L^(\mathbb{R}_+)$, on a

$$\|P_n(f) - f\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \to 0, \text{ lorsque } n \to \infty$$

En effet, on le montre facilement pour des fonctions continues à support compact grâce à des arguments de continuité uniforme et la cas général s'en déduit par des arguments de densité et le fait que P_n est une contraction.

Soit maintenant $\varphi \in \Lambda^2(\mathbb{R}_+)$, alors $\forall n \geq 1, P_n(\varphi) \in \mathcal{E}$ car

$$P_n(f)(t) = n \sum_{i=1}^{n^2} \left(\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} \varphi_s \, ds \right) \mathbb{1}_{]\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]}(t) \text{ et } \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} \varphi_s \, ds \text{ est } \mathcal{F}_{\frac{i}{n}}\text{-mesurable.}$$

et

$$\|P_n(\varphi) - \varphi\|_{\Lambda^2(\mathbb{R}_+)} = \mathbb{E}\left(\|P_n(\varphi)(\omega) - \varphi(\omega)\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \right).$$

Mais on a

$$\|P_n(\varphi)(\omega) - \varphi(\omega)\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \to 0 \text{ P p.s. et } \|P_n(\varphi)(\omega) - \varphi(\omega)\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)} \leq 4\|\varphi(\omega)\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)}$$

donc le théorème de convergence dominée de Lebesgue assure que $\|P_n(\varphi) - \varphi\|_{\Lambda^2(\mathbb{R}_+)} \to 0$ lorsque $n \to \infty$.
De façon similaire, si $\varphi \in \Lambda^2, \forall T > 0$, on a $\|P_n(\varphi) - \varphi\|_{\Lambda^2([0,T])} \to 0$ lorsque $n \to \infty$ $\diamondsuit$

Remarque 2.1.4. *Dans le cas d'un élément de* $\Lambda^2(\mathbb{R}_+)$ *qui est P p.s. continu et satisfait* $\sup_t \mathbb{E}(\varphi_t^2) < \infty$*, on peut approximer* φ *par (au lieu de* $P_n(\varphi)$*)*

$$\varphi_n^t = \sum_{i=0}^{n^2} \varphi_{\frac{i}{n}} \mathbb{1}_{]\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]}(t).$$

Nous pouvons maintenant énoncer la

Proposition 2.1.5. $\forall \varphi \in \Lambda^2$, *il existe une martingale continue*

$$B(\varphi)_t = \int_0^t \varphi_s \, dB_s \ , t \geq 0$$

qui vérifie

$$\mathbb{E}(B(\varphi)_t) = 0 \quad et \quad \mathbb{E}\left[B(\varphi)_t^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \varphi_s^2 \, ds\right] \ , t \geq 0,$$

et plus généralement, si $0 < s < t$,

$$\mathbb{E}\left[(B(\varphi)_t - B(\varphi)_s)^2 \, |\mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_s^t \varphi_r^2 \, dr|\mathcal{F}_s\right]$$

Si de plus $\varphi \in \Lambda^2(\mathbb{R}_+)$, *alors*

$$B(\varphi)_t \to B(\varphi)_\infty = \int_{\mathbb{R}_+} \varphi_s \, dBs$$

P p.s. et dans $L^2(\Omega)$ *lorsque* $t \to \infty$.

Preuve :
Soit $\varphi \in \Lambda^2$ et $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}^{\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers φ dans chaque $\Lambda^2([0,T])\,, T > 0$. D'après le lemme 2.1.2, $\forall n \in \mathbb{N}, \{B(\varphi_n)_t, t \geq 0\}$ est une martingale continue.
D'autre part, toujours d'après le lemme 2.1.2, si $\varphi \in \mathcal{E}$ alors $\left\{B(\varphi)_t^2 - \int_0^t \varphi_r^2 \, dr, t \geq 0\right\}$ est une martingale continue et d'après la formule 2.3, on a aussi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} (B(\varphi_n)_t - B(\varphi_m)_t)^2\right] &\leq 4\mathbb{E}\left(\int_0^T (\varphi_{n,s} - \varphi_{m,s})^2 \, ds\right) \\
&= \|\varphi_n - \varphi_n\|_{\Lambda^2([0,T])} \\
&\to 0 \text{ lorsque } \min(m,n) \to \infty
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que la suite $B(\varphi_n)$ est une suite de Cauchy dans l'espace $L^2(\Omega; C([0,T])), \forall T > 0$ qui est un espace complet. Soit $\{B(\varphi)_t, t \geq 0\}$ sa limite dans cet espace. On peut facilement vérifier que la limite ne dépend pas de la suite d'approximation $(\varphi_n)_n$ choisie et que $\{B(\varphi)_t, t \geq 0\}$ est un processus à trajectoires continues $\mathcal{F}_t$-adapté. De plus, comme $\forall t, B(\varphi_n)_t \to B(\varphi)_t$ dans $L^2(\Omega)$et que l'espérance conditionnelle est un opérateur continu de $L^2(\Omega)$ dans lui-même, on obtient les deuxième,troisième et quatrième égalité en utlisant le lemme 2.1.2.

Pour finir, si $\varphi \in \Lambda^2(\mathbb{R}_+)$, on a

$$\mathbb{E}[(B(\varphi)_t - B(\varphi)_s)^2] = \mathbb{E}\left(\int_s^t \varphi_r^2 \, dr\right) \to 0 \text{ lorsque } \min(s,t) \to \infty$$

Donc $B(\varphi)_t$ converge dans $L^2(\Omega)$ quand $t \to \infty$. Comme $B(\varphi)_t$ est aussi une martingale continue bornée dans $L^2(\Omega)$, elle converge P p.s. vers sa limite $B(\varphi)_\infty$ $\diamondsuit$

Remarque 2.1.6. *Il découle de la linéarité de $\varphi \mapsto B(\varphi)_t$, du lemme 2.1.2 et des identités de polarisation que pour $\varphi, \psi \in \Lambda^2, 0 \leq s < t$*

$$\mathbb{E}\left[(B(\varphi)_t - B(\varphi)_s)(B(\psi)_t - B(\psi)_s)|\mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left(\int_s^t \varphi_u \psi_u \, du|\mathcal{F}_s\right).$$

2.2 Généralisation de l'intégrale d'Itô

Nous aurons besoin de définir des intégrales stochastiques avec des intégrands plus généraux que ceux considérés précédemment.

Notation 2.2.1. *Pout $T \leq \infty$, on notera $\Lambda^2_{loc}([0,T])$ l'espace des processus progressivement mesurables qui vérifient :*

$$\int_0^T \varphi_t^2 \, dt < \infty \text{ P p.s.}$$

et

$$\Lambda^2_{loc} = \bigcap_{T>0} \Lambda^2_{loc}([0,T])$$

On va maintenant définir l'intégrale stochastique $\{B(\varphi)_t, t \geq 0\}$ pour $\varphi \in \Lambda^2_{loc}$. Pour cela, on va introduire des temps d'arrêt

<u>Lemme</u> 2.2.2. *Soit $\varphi \in \Lambda^2_{loc}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit τ_n par*

$$\tau_n = \inf\left\{t \geq 0; \int_0^t \varphi_s^2 \, ds \geq n\right\}.$$

Alors τ_n est un temps d'arrêt.

Preuve :
En effet, on a :

$$\begin{aligned} \{\tau_n \le t\} &= \bigcap_{k\ge 1} \bigcup_{s\in[0,t]\cap\mathbb{Q}} \left\{ \int_0^s \varphi_r^2 \, dr > n - \frac{1}{k} \right\} \\ &\in \mathcal{F}_t \end{aligned} \qquad \diamondsuit$$

<u>Lemme</u> 2.2.3. *Soit τ un temps d'arrêt. Le processus $\left\{ \mathbb{1}_{[0,\tau]}(t); t \ge 0 \right\}$ est progressivement mesurable.*

Preuve :
Soit $T > 0$, il faut montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} \psi\colon & \Omega \times [0,T] & \to & \mathbb{R} \\ & (\omega, t) & \mapsto & \mathbb{1}_{[0,\tau(\omega)]}(t) \end{array}$$

est $\mathcal{F}_T \otimes \mathcal{B}([0,T])$-mesurable. Considérons les deux applications

$$\begin{array}{rccc} \varphi\colon & \Omega \times [0,T] & \to & \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ & (\omega, t) & \mapsto & (t, \tau(\omega)\wedge T) \end{array} \quad \text{et } \begin{array}{rccc} \chi\colon & [0,T]\times[0,T] & \to & \mathbb{R} \\ & (u,t) & \mapsto & \mathbb{1}_{\{u<t\}} \end{array}.$$

Elles sont respectivement $\mathcal{F}_T \otimes \mathcal{B}([0,T])$ mesurables et $\mathcal{B}([0,T]) \otimes \mathcal{B}([0,T])$ mesurables et ψ est la composée de ces deux fonctions et est donc elle-même $\mathcal{F}_T \otimes \mathcal{B}([0,T])$ mesurable $\diamondsuit$

Il découle du lemme précédent que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \varphi \in \Lambda^2_{loc}$,

$$\mathbb{1}_{[0,\tau_n]}\varphi \in \Lambda^2(\mathbb{R}_+).$$

On peut alors définir pour tout n,

$$B_t^n = \int_0^t \mathbb{1}_{[0,\tau_n]}(s)\varphi_s \, dBs, t \ge 0$$

Il faut donc montrer que pour tout $T > 0$, B_t^n converge P p.s. uniformément pour $t \in [0,T]$ en $n\,\infty$. Le processus limite sera alors noté

$$B_t(\varphi) = \int_0^t \varphi_s \, dB_s, \; t \ge 0.$$

Or cette convergence résulte du fait que lorque $n \to \infty$ on a $\tau_n \uparrow \infty$ P p.s. et du lemme suivant

Lemme 2.2.4. *Soit $\varphi \in \Lambda^2$ et τ un temps d'arrêt. Alors $1\!\!1_{[0,\tau]}\varphi \in \Lambda^2$ et P p.s.*

$$\int_0^t 1\!\!1_{[0,\tau]}(s)\varphi_s \, dB_s = \int_0^{t\wedge\tau} \varphi_s \, dB_s, t \geq 0.$$

Preuve :
D'après le lemme 2.2.3 $1\!\!1_{[0,\tau]}\varphi \in \Lambda^2$. Puis l'égalité annoncée est équivalente au même résultat avec le temps d'arrêt borné $t\wedge\tau$. Mais tout temps d'arrêt borné est limite décroissante d'une suite de temps d'arrêt ne prenant chacun qu'un nombre fini de valeurs. En effet, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et $k \leq N$, où $N = \sup\left\{k \in \mathbb{N}; \frac{k}{2^n} < t\right\}$, soit $t_n^k = \frac{k}{2^n}$ et $t_n^{N+1} = t$. Alors la suite τ_n définit par

$$\tau_n(\omega) = \sum_{k=1}^{N+1} 1\!\!1_{A_n^k}(\omega)t_n^k$$

où $A_n^k = \left\{t_n^{k-1} < t \wedge \tau \leq t_n^k\right\}$, est une suite de temps d'arrêt qui convergent vers $t \wedge \tau$.
Maintenant il suffit d'établir l'égalité suivante pour tout n :

$$\int_0^t 1\!\!1_{[\tau_n,t]}(s)\varphi_s \, dB_s = \int_{t\wedge\tau_n}^t \varphi_s \, dB_s$$

qui résulte de

$$\int_{t_n^k}^t 1\!\!1_{A_n^k}\varphi_s \, dB_s = 1\!\!1_{A_n^k} \int_{t_n^k}^t \varphi_s \, dB_s,$$

soit pour $0 \leq s < t, A \in \mathcal{F}_s, \varphi \in \Lambda^2$,

$$\int_s^t 1\!\!1_A \varphi_r \, dB_r = 1\!\!1_A \int_s^t \varphi_r \, dB_r.$$

Or

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\int_s^t \mathbb{1}_A\varphi_r\,dB_r - \mathbb{1}_A\int_s^t \varphi_r\,dB_r\right)^2 |\mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{1}_A\mathbb{E}\left[\left(\int_s^t (\mathbb{1}_A - 1)\varphi_r\,dB_r\right)^2 |\mathcal{F}_s\right] \\
&\quad + \mathbb{1}_{A^c}\mathbb{E}\left[\left(\int_s^t \mathbb{1}_A\varphi_r\,dB_r\right)^2 |\mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{1}_A\mathbb{E}\left[\int_s^t \mathbb{1}_{A^c}\varphi_r^2\,dr\right] + \mathbb{1}_{A^c}\mathbb{E}\left[\int_s^t \mathbb{1}_A\varphi_r^2\,dr|\mathcal{F}_s\right] \\
&= 0 \ \diamondsuit
\end{aligned}$$

Proposition 2.2.5. *$\forall\varphi \in \Lambda^2_{loc}, \forall T > 0, B_t^n(\varphi)$ converge P p.s. uniformément sur $[0, T]$ lorsque $n \to \infty$.*

Preuve :
Soit $n < m$. Alors $\tau_n < \tau_m$ et le lemme 2.2.4 appliqué à $\mathbb{1}_{[0,\tau_m]}\varphi$ et τ_n assure que :

$$\begin{aligned}
B_t^n &= \int_0^t \mathbb{1}_{[0,\tau_n]}(s)\mathbb{1}_{[0,\tau_m]}(s)\varphi_s\,dB_s \\
&= \int_0^{t\wedge\tau_n} \mathbb{1}_{[0,\tau_m]}(s)\varphi_s\,dB_s
\end{aligned}$$

et cette dernière quantité ne dépend pas de $m \geq n$. Fixons $T > 0$. Sur $\Omega_n = \{\tau_n \geq T\}$, la suite $\{B_t^n(\varphi); 0 \leq t \leq T\}$, $m = n, n+1, \ldots$ est constante et égal à sa limite. Le résultat découle alors du fait que $\Omega_n \uparrow \Omega$ P p.s. $\diamondsuit$

Nous pouvons maintenant résumer les propriétés de l'intégrale d'Itô obtenue.

Proposition 2.2.6. *Pour tout $\varphi \in \Lambda^2_{loc}$, il existe un processus continu*

$$B_t(\varphi) = \int_0^t \varphi_s\,dB_s, t \geq 0,$$

qui est tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$*, si* $\tau_n = \inf \left\{ t; \int_0^t \varphi_s^2 \, ds \geq n \right\}$*, alors* $B_t^n = \int_0^{t \wedge \tau_n} \varphi_s \, dB_s, t \geq 0$ *est une martingale convergeant P p.s. uniformément sur* $[0;T], \forall T > 0$ *vers* $B_t(\varphi)$ *et vérifiant pour* $0 < s < t$ *:*

$$\mathbb{E}\left[B_t^n - B_s^n | \mathcal{F}_s\right] = 0$$

$$\mathbb{E}\left[(B_t^n - B_s^n)^2 | \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_s^t \mathbb{1}_{[0,\tau_n]} \varphi_r^2 \, dr | \mathcal{F}_s\right].$$

La variable aléatoire $B_t(\varphi)$ *n'est pas nécessairement intégrable mais vérifie :*

$$\mathbb{E}\left[B_t(\varphi)^2\right] \leq \mathbb{E}\left[\int_0^t \varphi_s^2 \, ds\right]. \tag{2.4}$$

Si de plus $\varphi \in \Lambda^2_{loc}(\mathbb{R}_+)$*, alors*

$$B_t(\varphi) \to B_\infty(\varphi) = \int_0^\infty \varphi_s \, dB_s \text{ P p.s., lorsque } t \to \infty.$$

Preuve :
La première partie résulte de la construction. L'inégalité 2.4 est triviale si le membre de droite est infini, sinon $\varphi \in \Lambda^2([0,T])$ et on a l'égalité.
Pour finir, si $\varphi \in \Lambda^2_{loc}(\mathbb{R}_+)$, soit

$$B_\infty^n = \int_0^{\tau_n} \varphi_s \, dB_s.$$

Comme $\Omega_n = \{\tau_n = \infty\} \uparrow \Omega$ P p.s., on peut définir B_∞ par $B_\infty = B_\infty^n$ sur $\Omega_n, n \in \mathbb{N}$. Alors le reste des affirmations découle de la proposition 2.1.5 $\diamondsuit$

Le résultat suivant sera très utile par la suite.

Proposition 2.2.7. *Soit* $\varphi \in \Lambda^2([0,T])$*. Alors* $\forall M, a > 0$

$$\mathrm{P}\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |B_t(\varphi)| \geq a\right) \leq \mathrm{P}\left(\int_0^T \varphi_t^2 \, dt \geq M\right) + \frac{1}{a^2}\mathbb{E}\left[\inf(M, \int_0^T \varphi_t^2 \, dt)\right]$$

Preuve :
Soit $\tau_M = \inf\left\{t; \int_0^t \varphi_s^2\, ds \geq M\right\}$. Alors

$$\{\tau_M < T\} \subseteq \left\{\int_0^T \varphi_t^2\, dt \geq M\right\}.$$

On a aussi

$$\left\{\sup_{0\leq t\leq T} |B_t(\varphi)| \geq a\right\} \subset \{\tau_M < T\} \cup \left\{\sup_{0\leq t\leq T} |B_t(\varphi)| \geq a\right\} \cap \{\tau_M \geq T\},$$

et

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(\sup_{0\leq t\leq T} |B_t(\varphi)| \geq a, \tau_M \geq T\right) &\leq \mathrm{P}\left(\sup_{0\leq t\leq T} |B_t(\varphi^M)| \geq a\right) \\
&\leq \frac{1}{a^2}\mathbb{E}\left[B_T(\varphi^M)^2\right] \text{ (déjà vu pour les martingales)} \\
&= \frac{1}{a^2}\mathbb{E}\left[\int_0^T \varphi_t^2 \mathbb{1}_{[0,\tau_M]}(t)\, dt\right] \\
&\leq \frac{1}{a^2}\mathbb{E}\left[\inf(M, \int_0^T \varphi_t^2\, dt)\right]
\end{aligned}$$

où $\varphi^M = \varphi \mathbb{1}_{[0,\tau_m])}$, d'où le résultat $\diamondsuit$

Nous pouvons maintenant énoncer un théorème de convergence qui résulte directement de la proposition précédente.

Théorème 2.2.8. *Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\Lambda^2_{loc}([0,T])$ et $\varphi \in \Lambda^2_{loc}([0,T])$. Supposons que*

$$\int_0^T |\varphi_t^n - \varphi_t|\, dt \to 0 \text{ en probabilité lorsque } n \to \infty.$$

Alors

$$\sup_{0\leq t\leq T} |B_t(\varphi) - B_t(\varphi_n)| \to 0 \text{ en probabilité.}$$

2.3 Les formules d'Itô :

Considérons tout d'abord $x \in C^1(\mathbb{R}_+)$, et $\Phi \in C^1(\mathbb{R})$. Alors la formule de dérivation des fonctions composées donne

$$\Phi(x(t)) = \Phi(x(0)) + \int_0^t \Phi'(x(s))\, dx(s).$$

Notre objectif dans cette section va être d'obtenir une formule analogue si l'on remplace x par un mouvement brownien.

2.3.1 Première formule d'Itô

Proposition 2.3.2. Première formule d'Itô :
Soit $\Phi \in C^2(\mathbb{R})$. Alors

$$\Phi(B_t) = \Phi(0) + \int_0^t \Phi'(s)\, dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \Phi''(B_s)\, ds.$$

Preuve :
Soit $\Phi \in C_b^2(\mathbb{R})$ et $t_i^n = \frac{i}{n}t, n \in \mathbb{N}$. D'après la formule de Taylor, il existe pour chaque $i \leq n$ un élément aléatoire $\theta_i^n \in]t_{i-1}^n, t_i^n[$ tel que

$$\begin{aligned}
\Phi(B_t) &= \Phi(0) + \sum_{i=1}^n \left[\Phi(B_{t_i^n}) - \Phi(B_{t_{i-1}^n})\right] \\
&= \Phi(0) + \sum_{i=1}^n \Phi'(B_{t_{i-1}^n})(B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n}) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \Phi''(B_{\theta_i^n})(B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n})^2 \\
&\to \Phi(0) + \int_0^t \Phi'(B_s)\, dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \Phi''(B_s)\, ds,
\end{aligned}$$

en probabilité lorsque $n \to \infty$, car les deux sommes convergent en probabilité, ce que nous allons montrer .

D'après le théorème 2.2.8, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \Phi'(B_{t_{i-1}^n})(B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n}) \to \int_0^t \Phi'(B_s)\, dB_s \text{ en probabilité.}$$

Puis

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{i=1}^{n}(\Phi''(B_{\theta_i^n}) - \Phi''(B_{t_{i-1}^n}))(B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n})^2\right| \\
&\qquad \leq \sup_{1\leq j\leq n} |\Phi''(B_{\theta_j^n}) - \Phi''(B_{t_{j-1}^n})| \sum_{i=1}^{n}(B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n})^2 \\
&\qquad \leq \sup_{1\leq j\leq n} \sup_{t_{j-1}^n\leq s\leq t_j^n} |\Phi''(B_s) - \Phi''(B_{t_{j-1}^n})| \sum_{i=1}^{n}(B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n})^2 \\
&\qquad \to 0 \text{ en probabilité lorsque } n \to \infty
\end{aligned}$$

Finalement il ne reste juste qu'à montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} \Phi''(B_{t_{i-1}^n})(B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n})^2 \to \int_0^t \Phi''(B_s)\, ds$$

en probabilité. Or

$$\int_0^t \Phi''(B_s)\, ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Phi''(B_{t_{i-1}^n})(t_i^n - t_{i-1}^n) \text{ P p.s. donc aussi en probabilité}$$

et on calcule alors

$$a_n = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \Phi''(B_{t_{i-1}^n})(B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n})^2 - \sum_{i=1}^{n} \Phi''(B_{t_{i-1}^n})(t_i^n - t_{i-1}^n)\right)^2\right],$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
a_n &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \Phi''(B_{t_{i-1}^n})[(B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n})^2 - (t_i^n - t_{i-1}^n)]\right)^2\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[(\Phi''(B_{t_{i-1}^n}))^2[(B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n})^2 - (t_i^n - t_{i-1}^n)]^2\right] \\
&\leq 2\sup_{x\in\mathbb{R}} |\Phi''(x)|^2 \sum_{i=1}^{n}(t_i^n - t_{i-1}^n)^2 \\
&\to 0 \text{ lorsque } n \to \infty
\end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{i=1}^{n} \Phi''(B_{t_{i-1}^n})(B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n})^2 - \sum_{i=1}^{n} \Phi''(B_{t_{i-1}^n})(t_i^n - t_{i-1}^n)$$

converge vers 0 en probabilité et on peut alors en déduire que

$$\sum_{i=1}^{n} \Phi''(B_{t_{i-1}^n})(B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n})^2 \to \int_0^t \Phi''(B_s)\, ds \text{ en probabilité.}$$

Si maintenant $\Phi \in C^2(\mathbb{R})$, il existe une suite $(\Phi_n)_n \in (C^2(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ convergeant simplement vers Φ et telle que $\Phi_n(x) = \Phi(x), \forall x \in [-n, n]$. Appliquant ce qui précède, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \Phi_n(B_t) = \Phi_n(0) + \int_0^t \Phi_n'(s)\, dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \Phi_n''(B_s)\, ds.$$

Mais on sait que $\Phi_n(B_t) \to \Phi(B_t)$ P p.s. .
Ensuite soit $T_n = \inf\{t \geq 0; |B_t| > n\}$,$\tau_n = \inf\{t \geq 0; B_t > n\}$ et $\tau_{-n} = \inf\{t \geq 0; B_t > n\}$.
On a

$$T_n \geq \max(\tau_n; \tau_{-n}).$$

Or d'après la proposition 1.6.2, on a

$$\mathrm{P}(\tau_n < M) \;=\; \int_0^M \sqrt{2\pi t^3} e^{\frac{-n^2}{2t}}\, dt$$

et

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(\tau_n < M) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^M \sqrt{2\pi t^3} e^{\frac{-n^2}{2t}}\, dt \\
&= \int_0^M \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2\pi t^3} e^{\frac{-n^2}{2t}} \right) dt \text{ d'après le théorème de Tonnelli} \\
&\leq \int_0^M \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2\pi t^3} e^{\frac{-n}{2t}} \right) dt \\
&= \int_0^M \sqrt{2\pi t^3} \frac{1}{1 - e^{\frac{-1}{2t}}}\, dt \\
&< \infty
\end{aligned}$$

et en utilisant alors le lemme de Borel-Cantelli, on en déduit que $\tau_n \to \infty$ P p.s., de même pour τ_{-n} et par suite de T_n.

Soit maintenant $\Omega_n = \{T_n > T\}$. Vu ce qui précède, on a $\Omega_n \uparrow \Omega$ P p.s., et sur Ω_n, on a $\forall t \leq T, \Phi_n'(B_t) = \Phi'(B_t)$ donc

$$\int_0^T |\Phi_n'(B_t) - \Phi'(B_t)|\, dt = 0$$

ce qui implique que

$$\int_0^T |\Phi_n'(B_t) - \Phi'(B_t)|\, dt \to 0 \text{ en probabilité}$$

et d'après le théorème 2.2.8 on sait qu'alors

$$\int_0^T \Phi_n'(B_s)\, dB_s \to \int_0^T \Phi'(B_s)\, dB_s \text{ en probabilité}$$

On a aussi

$$\frac{1}{2}\int_0^t \Phi_n''(B_s)\, ds = \frac{1}{2}\int_0^t \Phi''(B_s)\, ds \text{ sur } \Omega_n$$

ce qui implique toujours la convergence en probabilité. On obtient donc le résultat en invoquant l'unicité de la limite en probabilité $\diamondsuit$

Notons que le calcul différentiel d'Itô diffère du calcul différentiel usuel par l'apparition du terme de la dérivée seconde Φ'' qui est due au fait que le mouvement brownien a une variation quadratique non nulle.

2.3.3 Processus d'Itô

Nous généralisons maintenant la formule d'Itô ci-dessus en remplaçant le mouvement brownien par une classe plus générale de processus.

Définition 2.3.4. *Un processus $\{X_t; t \geq 0\}$ est appelé* **processus d'Itô** *s'il est de la forme*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \psi_s\, ds + \int_0^t \varphi_s\, dB_s \tag{2.5}$$

où X_0 est une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable, ψ et φ sont des processus progressivement mesurables qui vérifient

$$\int_0^t |\psi_s|\, ds < \infty \textit{ P p.s. }, t \geq 0 \textit{ et } \quad \varphi \in \Lambda^2_{loc}$$

Il en découle qu'un processus d'Itô est presque sûrement continu et progressivement mesurable.

Lemme 2.3.5. *Soit X une variable aléatoire $\mathcal{F}_s$-mesurable, $\varphi \in \Lambda^2_{loc}$ et $0 < s < t$. Alors*

$$\int_s^t X\varphi_r\,dB_r = X\int_s^t \varphi_r\,dB_r$$

Preuve :
Reprenons un travail déjà fait : Si $A \in \mathcal{F}_s, \varphi \in \Lambda^2$, alors

$$\int_s^t \mathbb{1}_A\varphi_r\,dB_r = \mathbb{1}_A\int_s^t \varphi_r\,dB_r,$$

car

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\int_s^t \mathbb{1}_A\varphi_r\,dB_r - \mathbb{1}_A\int_s^t \varphi_r\,dB_r\right)^2|\mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{1}_A\mathbb{E}\left[\left(\int_s^t (\mathbb{1}_A - 1)\varphi_r\,dB_r\right)^2|\mathcal{F}_s\right] \\
&\quad + \mathbb{1}_{A^c}\mathbb{E}\left[\left(\int_s^t \mathbb{1}_A\varphi_r\,dB_r\right)^2|\mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{1}_A\mathbb{E}\left[\int_s^t \mathbb{1}_{A^c}\varphi_r^2\,dr\right] + \mathbb{1}_{A^c}\mathbb{E}\left[\int_s^t \mathbb{1}_A\varphi_r^2\,dr|\mathcal{F}_s\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ensuite si $\varphi \in \Lambda^2_{loc}$, on applique ce qui précède à $\varphi\mathbb{1}_{[0,\tau_n]} \in \Lambda^2$, on a alors

$$\int_s^t \mathbb{1}_A\varphi_u\mathbb{1}_{[0,\tau_n]}\,dB_u = \mathbb{1}_A\int_s^t \varphi_u\mathbb{1}_{[0,\tau_n]}\,dB_u$$

et en faisant tendre n vers ∞ on obtient

$$\int_s^t \mathbb{1}_A\varphi_u\,dB_u = \mathbb{1}_A\int_s^t \varphi_u\,dB_u.$$

Par linéarité, on en déduit que le résultat reste vrai pour les fonctions étagées, puis si X est une variable aléatoire $\mathcal{F}_s$-mesurable alors elle est limite presque sûre d'une suite de fonctions étagées $\mathcal{F}_s$-mesurables$(X_n)_n$. Comme

$$\int_0^t |\varphi_u X - \varphi_u X_n|\,ds \leq |X - X_n|\int_0^t |\varphi_u|\,du \to 0 \text{ P p.s.}$$

le théorème 2.2.8 permet de conclure $\diamondsuit$

Théorème 2.3.6. Deuxième formule d'Itô

Soit $\{X_t; t \geq 0\}$ *un processus d'Itô de la forme 2.5 et* $\Phi \in C^2(\mathbb{R})$. *Alors P p.s. :*

$$\Phi(X_t) = \Phi(X_0) + \int_0^t \Phi'(X_s)\psi_s\, ds + \int \Phi'(X_s)\varphi_s\, dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \Phi''(X_s)\varphi_s^2\, ds, t \geq 0,$$

expression que l'on peut aussi écrire sous la forme plus concise suivante :

$$d\Phi(X_t) = \Phi'(X_t)\, dX_t + \frac{1}{2}\Phi''(X_t)\varphi_s^2\, ds.$$

Preuve :

Fixons $t > 0$ et soit $\Phi \in C_c^2(\mathbb{R})$. En utilisant le théorème 2.2.8, il suffit de prouver le résultat pour une suite φ^p d'éléments de Λ^2_{loc} telle que

$$\int_0^t |\varphi_s^p - \varphi_s|^2\, ds \to 0 \text{ en probabilité quand } p \to \infty.$$

Choisissons

$$\varphi_s^p = 2^p \sum_{i=1}^{2^p-1} \left(\int_{\frac{(i-1)t}{2^p}}^{\frac{it}{2^p}} \varphi_s\, ds \right) \mathbb{1}_{]\frac{(i-1)t}{2^p}, \frac{it}{2^p}]}(s),$$

ainsi on peut dorénavant supposer que φ est borné et constant sur chaque intervalle $\left]\frac{(i-1)t}{2^p}, \frac{it}{2^p}\right]$

En utilisant la formule de Taylor comme dans la proposition précédente, on obtient

$$\begin{aligned} \Phi(X_t) &= \Phi(X_0) + \sum_{i=1}^n \Phi'(X_{t_{i-1}^n}) \int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} \psi_s\, ds \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \Phi'(X_{t_{i-1}^n}) \int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} \varphi_s\, dB_s + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \Phi''(X_{\theta_i^n})(X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})^2. \end{aligned}$$

On va montrer maintenant que chacune des sommes converge vers le terme désiré.

La première des sommes est une somme de Riemann pour la mesure signée $\mu = \psi_s\, ds$ sur le compact $[0,t]$ donc

$$\sum_{i=1}^{n} \Phi'(X_{t_{i-1}^n}) \int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} \psi_s\, ds \to \int_0^t \Phi'(X_s)\psi_s\, ds \text{ P p.s. quand } n \to \infty.$$

Pour la seconde, on remarque que, $\Phi'(X_s)$ étant continue P p.s., $\sum_{i=1}^n \Phi'(X_{t_{i-1}^n})\mathbb{1}_{]t_{i-1}^n, t_i^n]}(s)$ converge P p.s. uniformément sur $[0,t]$ vers $\Phi'(X_s)$, d'où

$$\int_0^t \left| \sum_{i=1}^{n} \Phi'(X_{t_{i-1}^n})\varphi_s \mathbb{1}_{]t_{i-1}^n, t_i^n]}(s) - \Phi'(X_s)\varphi_s \right| ds \to 0 \text{ en probabilité}$$

et ceci entraîne d'après le théorème 2.2.8 que

$$\int_0^t \sum_{i=1}^{n} \Phi'(X_{t_{i-1}^n})\varphi_s \mathbb{1}_{]t_{i-1}^n, t_i^n]}(s)\, dB_s \to \int_0^t \Phi'(X_s)\varphi_s\, dB_s \text{ en probabilité.}$$

Or d'après le lemme 2.3.5 on a

$$\int_0^t \sum_{i=1}^{n} \Phi'(X_{t_{i-1}^n})\varphi_s \mathbb{1}_{]t_{i-1}^n, t_i^n]}(s)\, dB_s = \sum_{i=1}^{n} \Phi'(X_{t_{i-1}^n}) \int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} \varphi_s\, dB_s$$

Ceci traite donc le cas de la deuxième somme.

En ce qui concerne la dernière somme, remarquons tout d'abord que

$$(X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})^2 = \left(\int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} \psi_s\, ds \right)^2 + 2 \int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} \psi_s\, ds \int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} \varphi_s\, dB_s + \left(\int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} \varphi_s\, dB_s \right)^2$$

et la somme sur i des deux premiers termes du membre de droite est majorée en valeur absolue par

$$\sup_i \left| \int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} \psi_s\, ds + \int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} \varphi_s\, dB_s \right| \times \int_0^t |\psi_s|\, ds,$$

expression qui tend vers 0 P p.s. lorsque $n \to \infty$. Donc il ne reste qu'à étudier la limite de

$$\sum_{i=1}^{n} \Phi''(X_{\theta_i^n}) \left(\int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} \varphi_s\, dB_s \right)^2,$$

et l'on peut toujours se restreindre à étudier cette limite le long de la sous-suite $n = 2^l, l \in \mathbb{N}$. Ainsi pour $l \geq p, \varphi$ est constant sur $\left]t_{i-1}^n, t_i^n\right]$ car il l'est sur $\left]t_{i-1}^{2^p}, t_i^{2^p}\right]$. On a alors

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \Phi''(X_{\theta_i^n}) \left(\int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} \varphi_s \, dB_s \right)^2 &= \sum_{i=1}^{n} (\Phi''(X_{\theta_i^n}) - \Phi''(X_{t_{i-1}^n})) \varphi_{t_{i-1}^n}^2 (B_{t_i^n - t_{i-1}^n})^2 \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} \Phi''(X_{t_{i-1}^n}) \varphi_{t_{i-1}^n}^2 (B_{t_i^n - t_{i-1}^n})^2\end{aligned}$$

Comme P p.s. la fonction $t \mapsto \Phi''(X_t)$ est uniformément continue, P p.s. le processus $\{\varphi_s; 0 \leq s \leq t\}$ est borné et en raison de la proposition 1.5.2, le premier terme du membre de droite converge en probabilité vers 0.

De plus, une généralisation facile de la proposition 1.5.2 assure que

$$\sum_{i=1}^{n} \Phi''(X_{t_{i-1}^n}) \varphi_{t_{i-1}^n}^2 \left[(B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n})^2 - (t_i^n - t_{i-1}^n) \right]$$

tend vers 0 en moyenne quadratique quand $n \to \infty$. Puis il est clair en utilisant les sommes de Riemann que

$$\sum_{i=1}^{n} \Phi''(X_{t_{i-1}^n}) \varphi_{t_{i-1}^n}^2 (t_i^n - t_{i-1}^n) \to \int_0^t \Phi''(X_s) \varphi_s^2 \, ds.$$

Le résultat est démontré pour $\Phi \in C_c^2(\mathbb{R})$. Si maintenant $\Phi \in C^2(\mathbb{R})$, soit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $f = 1$ sur $[-1; 1]$, $f = 0$ sur $\mathbb{R} \setminus [-2, 2]$ et $0 \leq f \leq 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$g_n(x) = nf\left(\frac{x}{n}\right), x \in \mathbb{R} \text{ et } \Phi_n(x) = g_n(\Phi(x)).$$

On vérifie alors que $\forall n \geq 1, \Phi_n \in C_c^2(\mathbb{R}), \Phi_n(x) = \Phi(x)$ si $x \in [-n, n]$ et $\|\Phi_n\|_\infty \leq \|\Phi\|_\infty$. Comme $\mathbb{E}\left[|\Phi_n(X_t) - \Phi(X_t)|\right] \to 0$ quand $n \to \infty$ (d'après le théorème de Lebesgue), on a

$$\Phi_n(X_t) \to \Phi(X_t) \text{ en probabilité}$$

Toujours d'après le théorème de Lebesgue, on a

$$\int_0^t \Phi_n'(X_t) \psi_s \, ds \to \int_0^t \Phi'(X_s) \psi_s \, ds \text{ P p.s.}$$

et

$$\frac{1}{2} \int_0^t \Phi_n''(X_s) \varphi_s^2 \, ds \to \int_0^t \Phi''(X_s) \varphi_s^2 \, ds \text{ P p.s..}$$

Ensuite le dernier terme se traite à l'aide du théorème 2.2.8 en remarquant que P p.s.

$$\int_0^t |\Phi_n'(X_s) - \Phi'(X_t)\varphi_s|\, ds \to 0 \text{ quand } n \to \infty,$$

ceci résultant encore du théorème de Lebesgue $\diamondsuit$

2.3.7 Formule d'Itô avec dépendance en t

En adaptant la preuve précédente on peut montrer le théorème suivant, où l'on a rajouté une possible dépendance par rapport à la variable temporelle t.

Théorème 2.3.8. *Soit $\{X_t; t \geq 0\}$ un processus d'Itô et $\Phi \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$. Alors P p.s.*

$$\begin{aligned}\Phi(t, X_t) &= \Phi(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s, X_s)\, ds + \int_0^t \frac{\partial \Phi}{\partial x}(s, X_s)\psi_s\, ds + \int_0^t \frac{\partial \Phi}{\partial x}(s, X_s)\varphi_s\, dB_s \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(s, X_s)\varphi_s^2\, ds\end{aligned}$$

2.3.9 Exercices

Exercice 2.3.10. Le processus d'Ornstein-Ulhenbeck

On considère le processus X à valeurs dans $\mathbb{R}$ solution de l'EDS linéaire à coefficients constants :

$$dX_t = -\alpha X_t\, dt + \beta dB_t, X_0 = \xi \tag{2.6}$$

où α et β sont des constantes, B est un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien et ξ est une variable $\mathcal{F}_0$-mesurable. On suppose que $\alpha > 0$.

1) Montrer que la solution de (2.6) est donnée par

$$X_t = e^{-t\alpha}\xi + \int_0^t e^{-(t-s)\alpha}\beta\, dB_s, t \geq 0$$

2) En déduire que si ξ est une variable gaussienne, alors X est un processus gaussien d'espérance et de fonction de covariance données par

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{E}[X_t] & = & e^{-t\alpha}\mathbb{E}[\xi] \\ \mathrm{Cov}(X_s, X_t) & = & e^{-\alpha(t+s)}\mathrm{Var}(\xi) + \beta^2 \int_0^{t\wedge s} e^{-\alpha(t+s-2u)}\, du \end{array}$$

3) Si $\mathbb{E}[\xi] = 0$ et $\mathrm{Var} = \frac{\beta^2}{2\alpha}$ alors le processus X est centré et de covariance stationnaire, ie

$$\mathrm{Cov}(X_s, X_t) = \frac{\beta^2}{2\alpha} e^{-\alpha|t-s|}, \forall s, t \geq 0$$

En particulier, $\forall t \in \mathbb{R}_+, X_t \sim \mathcal{N}(0, \beta^2/2\alpha)$.

4) Si ξ est une variable gaussienne, alors quand $t \to \infty$, l'espérance et la fonction de covariance du processus $\{X_{t+\delta}; \delta \geq 0\}$ tendent vers celle du cas stationnaire :

$$\mathbb{E}[X_t] \to 0, \;\; \mathrm{Cov}(X_s, X_t) \to \frac{\beta^2}{2\alpha} e^{-\delta\alpha}.$$

Réponse :

1) Si X est solution de (2.6) alors on a

$$X_t = X_0 + \int_0^t \psi_s\, ds + \int_0^t \varphi_s\, dB_s$$

avec $X_0 = \xi, \psi_s = -\alpha X_t$ et $\varphi_s = \beta$. Donc X est un processus d'Itô et en appliquant le théorème 2.3.8 à X et à $\Phi(t, x) = e^{t\alpha}x$, on a :

$$e^{t\alpha}X_t = \xi + \int_0^t \alpha e^{s\alpha} X_s\, ds + \int_0^t e^{s\alpha}(-\alpha X_s)\, ds + \int_0^t \beta e^{s\alpha}\, dB_s$$

et en multipliant les deux termes de cette égalité par $e^{-t\alpha}$, on obtient bien

$$X_t = e^{-t\alpha}\xi + \int_0^t \beta e^{-(t-s)\alpha}\, dB_s$$

Réciproquement on applique le même raisonnement au processus d'Itô $Y_t = e^{t\alpha}X_t$ et à la fonction $\Phi(t, x) = e^{-t\alpha}x$ et on trouve bien que

$$X_t = e^{-t\alpha}\xi + \int_0^t \beta e^{-(t-s)\alpha}\, dB_s$$

est solution de (2.6).

2) Si ξ est gaussienne, comme $\int_0^t \beta e^{-(t-s)\alpha}\, dB_s$ est un processus gaussien indépendant de $\mathcal{F}_0$, X est un processus gaussien. De plus on a

$$\mathbb{E}\left[X_t\right] = e^{-t\alpha}\mathbb{E}\left[\xi\right]$$

et

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X_s, X_t) &= \mathbb{E}\left[(e^{-t\alpha}\xi + \int_0^t \beta e^{-(t-u)\alpha}\, dB_u)(e^{-s\alpha}\xi + \int_0^s \beta e^{-(s-u)\alpha}\, dB_u)\right] - \mathbb{E}\left[X_t\right]\mathbb{E}\left[X_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^t \beta e^{-(t-u)\alpha}\, dB_u \int_0^s \beta e^{-(s-u)\alpha}\, dB_u\right] + e^{-(t+s)\alpha}\mathrm{Var}(\xi) \\
&= e^{-(t+s)\alpha}\mathbb{E}\left[B(\beta e^{u\alpha}\mathbb{1}_{[0,t]}(u))B(\beta e^{u\alpha}\mathbb{1}_{[0,s]}(u))\right] + e^{-(t+s)\alpha}\mathrm{Var}(\xi) \\
&= e^{-(t+s)\alpha}\int_0^\infty \beta e^{u\alpha}\mathbb{1}_{[0,t]}(u)\beta e^{u\alpha}\mathbb{1}_{[0,s]}(u)\, du + e^{-(t+s)\alpha}\mathrm{Var}(\xi) \\
&= e^{-(t+s)\alpha}\int_0^{t\wedge s} \beta^2 e^{2\alpha u}\, du + e^{-(t+s)\alpha}\mathrm{Var}(\xi)
\end{aligned}$$

3) Si $\mathbb{E}(\xi) = 0$ et $\mathrm{Var}(\xi) = \frac{\beta^2}{2\alpha}$ alors X est centré et

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X_s, X_t) &= e^{-(t+s)\alpha}\frac{\beta^2}{2\alpha} + \beta^2 e^{-(t+s)\alpha}\int_0^{t\wedge s} e^{2\alpha u}\, du \\
&= \frac{\beta^2}{2\alpha}e^{-(t+s-2t\wedge s)\alpha} \\
&= \frac{\beta^2}{2\alpha}e^{-|t-s|\alpha}
\end{aligned}$$

4) Si ξ est gaussienne on a

$$\mathbb{E}\left[X_{t+\delta}\right] = e^{-(t+\delta)\alpha} \to 0 \text{ quand } t \to \infty$$

et

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X_{t+\delta}, X_{t+\gamma}) &= e^{-(2t+\delta+\gamma)\alpha}\mathrm{Var}(\xi) + \frac{\beta^2}{2\alpha}e^{-(2t+\delta+\gamma)\alpha}\left(e^{2\alpha t+2\alpha(delta\wedge\gamma)} - 1\right) \\
&= e^{-(2t+\delta+\gamma)\alpha}\mathrm{Var}(\xi) + \frac{\beta^2}{2\alpha}e^{-|\delta-\gamma|\alpha} - \frac{\beta^2}{2\alpha}e^{-(2t+\delta+\gamma)\alpha} \\
&\to \frac{\beta^2}{2\alpha}e^{-|\delta-\gamma|\alpha} \text{ lorsque } t \to \infty
\end{aligned}$$

et ceci termine l'exercice $\diamondsuit$

Exercice 2.3.11. Mouvement brownien avec dérive :

Soit B un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien, et $X_t = B_t + \mu t$, où $\mu \in \mathbb{R}$. Pour $a > 0$, on définit $T = Inf\,\{t \geq 0; X_t \geq a\}$.

1) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le processus

$$Z_t = e^{\lambda X_t - \left(\frac{\lambda^2}{2} + \mu\lambda\right)t}$$

est une martingale.

2) Montrer que $\mathbb{E}\left[Z_{t\wedge T}\right] = 1$ pour tout $t \geq 0$. En déduire que si $\lambda > (-2\mu)^+$,

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{T<\infty\}} e^{-\left(\frac{\lambda^2}{2}+\mu\lambda\right)T}\right] = e^{-\lambda a}$$

3) Montrer que

$$\mathrm{P}\left(T < \infty\right) = 1 \wedge e^{2\mu a}$$

Réponse :

1) On applique le théorème 2.3.8 au processus d'Itô B_t (avec $B_0 = 0$,$\psi_s = 0$ et $\varphi_s = 1$) et à la fonction $\Phi(t,x) = e^{\lambda x - \frac{\lambda^2 t}{2}}$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} e^{\lambda X_t - \left(\frac{\lambda^2}{2}+\mu\lambda\right)t} &= e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2 t}{2}} \\ &= \Phi(0,B_0) - \frac{\lambda^2}{2}\int_0^t e^{\lambda B_s - \frac{\lambda^2 s}{2}}\,ds + \int_0^t \lambda e^{\lambda B_s - \frac{\lambda^2 s}{2}}\,dBs + \frac{\lambda^2}{2}\int_0^t e^{\lambda B_s - \frac{\lambda^2 s}{2}}\,ds \\ &= 1 + \lambda \int_0^t e^{\lambda B_s - \frac{\lambda^2 s}{2}}\,dBs \end{aligned}$$

Comme $e^{\lambda B_s - \frac{\lambda^2 s}{2}} \in \Lambda^2$, Z_t est bien une $\mathcal{F}_t$-martingale.

2) On a d'après le lemme 2.2.4

$$Z_{t\wedge T} = 1 + \lambda \int_0^{t\wedge T} e^{\lambda B_s - \frac{\lambda^2 s}{2}}\,dBs = 1 + \lambda \int_0^t \mathbb{1}_{[0,T]}(s) e^{\lambda B_s - \frac{\lambda^2 s}{2}}\,dBs \text{ P p.s.}$$

donc vu la proposition 2.1.5 on a

$$\mathbb{E}\left[Z_{t\wedge T}\right] = 1.$$

Si $\lambda > (-2\mu)^+$ alors $\forall t \geq 0$, $\left(\frac{\lambda^2}{2} + \mu\lambda\right) t > 0$ et donc on a

$$0 < Z_{t\wedge T} \leq e^{\lambda a}.$$

De plus, sur $\{T < \infty\}$, on a

$$\lim_{t\to\infty} Z_{t\wedge T} = e^{\lambda a - \left(\frac{\lambda^2}{2}+\mu\lambda\right)T}$$

et sur $\{T = \infty\}$ on a

$$\lim_{t\to\infty} Z_{t\wedge T} = 0$$

donc le théorème de convergence dominé de Lebesgue assure que

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{T<\infty\}} e^{\lambda a - \left(\frac{\lambda^2}{2}+\mu\lambda\right)T}\right] = 1$$

soit

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{T<\infty\}} e^{-\left(\frac{\lambda^2}{2}+\mu\lambda\right)T}\right] = e^{-\lambda a}.$$

3) Si $\mu > 0$ alors d'après le théorème 1.4.1

$$\lim_{t\to\infty} \frac{X_t}{t} = \mu \text{ P p.s.}$$

donc

$$X_t \to \infty \text{ P p.s.}$$

et donc $\mathrm{P}(T < \infty) = 1$. Sinon $\mu \leq 0$ et en passant à la limite pour $\lambda \to -2\mu$ dans l'égalité obtenue à la question 2) dont les deux membres sont des fonctions continues de $\lambda \in [-2\mu, \infty[$, on a

$$\mathrm{P}(T < \infty) = e^{2\mu a}$$

ce qui termine l'exercice $\diamondsuit$

2.4 Extension des résultats à $\mathbb{R}^d$:

2.4.1 Mouvement brownien et intégrale stochastique vectoriels

Commençons par donner la définition d'un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^k$.

Définition 2.4.2. Mouvement brownien k-dimensionnel :
Un processus stochastique $\{B_t; t \geq 0\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ est appelé mouvement brownien si ses composantes $\{B_t^1; t \geq 0\}, \dots, \{B_t^k; t \geq 0\}$ sont de mouvements browniens scalaires mutuellement indépendants. De façon équivalente, $\{B_t; t \geq 0\}$ est un mouvement brownien de dimension k si c'est un processus gaussien centré, à trajectoires P p.s. continues et de matrice de covariance donnée par :

$$\mathbb{E}\left[B_t B_s^*\right] = \min(t, s)\mathrm{I}$$

Soit maintenant $\{B_t, t \geq 0\}$ un mouvement brownien de dimension k et $\{\varphi_t, t \geq 0\}$ un processus à valeurs dans les matrices $d \times k$. Supposons que pour tous $1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq k, \varphi^{ij} \in \Lambda^2$. On peut alors définir

$$B(\varphi)_t^i = \sum_{j=1}^{k} \int_0^t \varphi_s^{ij}\, dB_s^j, 1 \leq i \leq d, t \geq 0,$$

et $B(\varphi)_t$ est alors le vecteur d-dimensionnel dont les composantes sont égales à $B(\varphi)_t^i$. Nous avons alors

Proposition 2.4.3. *Soit $\varphi, \psi \in (\Lambda^2)^{d\times k}$. Alors $\forall s, 0 \leq s < t$,*

i) $B(\varphi)_t = \int_0^t \varphi_s\, dB_s$ *est un vecteur aléatoire d-dimensionnel $\mathcal{F}_t$-mesurable.*

ii) $\mathbb{E}\left[B(\varphi)_t\right] = 0$

iii) $\mathbb{E}\left[(B(\varphi)_t - B(\varphi)_s)(B(\psi)_t - B(\psi)_s)^* | \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_s^t \varphi_r \psi_r^*\, dr | \mathcal{F}_s\right]$

iv) $\mathbb{E}\left[\langle B(\varphi)_t - B(\varphi)_t, B(\psi)_t - B(\psi)_s\rangle\right] = \mathbb{E}\left[\int_s^t Tr(\varphi_r \psi_r^*)\, dr | \mathcal{F}_s\right]$

Preuve :
Tout ceci résulte en fait de la proposition 2.1.5 et de l'identité suivante :

$$\mathbb{E}\left[(B_t^i(\varphi) - B_s^i(\varphi))(B_t^j(\psi) - B_s^j(\psi))|\mathcal{F}_s\right] = 0,$$

où $\varphi, \psi \in \Lambda^2, i \neq j, 0 \leq s \leq t$. Il suffit pour montrer cela de le montrer pour $\varphi, \psi \in \mathcal{E}$ et ceci résulte de

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[XY(B_t^i - B_t^i)(B_t^j - B_s^j)|\mathcal{F}_s\right] &= XY\mathbb{E}\left[(B_t^i - B_s^i)(B_t^j - B_s^j)|\mathcal{F}_s\right] \\
&= XY\mathbb{E}\left[(B_t^i - B_s^i)\right]\mathbb{E}\left[(B_t^j - B_s^j)\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

où $0 \leq s < t,\ X, Y \in L^2(\Omega\mathcal{F}_s, \mathrm{P})$ et nous avons utilisé le fait que $\mathcal{F}_s, B_t^i - B_s^i, B_t^j - B_s^j$ sont indépendants $\diamondsuit$

FIG. 2.1 – Trajectoire d'un mouvement brownien dans le plan

2.4.4 Formule d'Itô vectorielle

On va maintenant généraliser la formule d'Itô au cas vectoriel, qui se démontre de la même façon que pour la dimension 1.

Définition **2.4.5.** *Un processus stochastique $\{X_t; t \geq 0\}$ est un processus d'Itô d-dimensionnel s'il est de la forme*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \psi_s \, ds + \int_0^t \varphi_s \, dB_s, \tag{2.7}$$

où X_0 est un vecteur aléatoire d-dimensionnel $\mathcal{F}_0$-mesurable, ψ est un processus d-dimensionnel progressivement mesurable satisfaisant

$$\int_0^t |\psi_s| \, ds < \infty \text{ } P \text{ p.s. } , t \geq 0,$$

$\{B_t; t \geq 0\}$ est un mouvement brownien k-dimensionnel, φ est un processus progressivement mesurable à valeurs dans les matrices $d \times k$ et satisfaisant

$$\int_0^t Tr(\varphi_s \varphi_s^*) \, ds < \infty \text{ } P \text{ p.s. } , t \geq 0$$

On notera $C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions continues qui sont une fois continûment différentiable par rapport à la première variable et qui le sont deux fois par rapport à la variable vectorielle.

Théorème **2.4.6. Formule d'Itô vectorielle :**
Soit $\{X_t; t \geq 0\}$ un processus d'Itô d-dimensionnel de la forme (2.7), et $\Phi \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$. Alors P p.s.

$$\begin{aligned} \Phi(t, X_t) &= \Phi(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s, X_s) \, ds + \int_0^t \langle \nabla_x \Phi(s, X_s), \psi_s \rangle \, ds + \int_0^t \nabla_x \Phi(s, X_s), \varphi_s \, dB_s \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t Tr[\partial^2_{xx} \Phi(s, X_s) \varphi_s \varphi_s^*] \, ds \end{aligned}$$

2.5 Les inégalités de Burkholder-Davis-Gundy

Nous allons montrer dans cette section la double inégalité suivante qui sera un outil intéressant pour la suite :

Théorème 2.5.1. *Soit $\{B_t, t \geq 0\}$ un mouvement brownien d-dimensionnel. Pour chaque $p > 0$, il existe une constante $c_p \geq 1$ telle que $\forall \varphi \in (\Lambda^2_{loc})^d$*

$$\frac{1}{c_p}\mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty |\varphi_t|^2\,dt\right)^{p/2}\right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{t\geq 0}\left|\int_0^t \langle \varphi_s, dB_s\rangle\right|^p\right] \leq c_p\mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty |\varphi_t|^2\,dt\right)^{p/2}\right]$$

L'inégalité la plus importante est celle de droite. Le cas $p = 2$ résulte des théorèmes sur la construction des intégrales stochastiques et des inégalités de Doob pour les martingales. Nous allons d'abord montrer le résultat pour p assez grand puis nous en déduirons alors le cas général.

Proposition 2.5.2. $\forall p \geq 2, \forall \varphi_s \in (\Lambda^2_{loc})^d$ *et si B est un mouvement brownien d-dimensionnel alors*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\geq 0}\left|\int_0^t \langle \varphi_r, dB_r\rangle\right|^p\right] \leq C_p\mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty |\varphi_r|^2\,dr\right)^{p/2}\right]$$

avec $C_p = \left(\frac{p^{p+1}}{2(p-1)^{p-1}}\right)^{p/2}$.

Preuve :
Appliquons la formule d'Itô au processus d'Itô

$$Z_t = \int_0^t \langle \varphi_r, dB_r\rangle$$

et à la fonction $\Phi(x) = |x|^p \in C^2(\mathbb{R}_+)$ car $p \geq 2$. On a alors $\forall s \geq 0$

$$|Z_s|^p = p\int_0^s |Z_r|^{p-1}\langle \varphi_r, dB_r\rangle + \frac{p(p-1)}{2}\int_0^s |Z_r|^{p-2}|\varphi_r|^2\,dr$$

Notons $X_s = |Z_s|^{p-1}\varphi_s$ et $T_n = \inf\left\{t \geq 0; \int_0^t X_s^2\,ds \geq n\right\}$. On a ainsi

$$|Z_{t\wedge T_n}|^p = p\int_0^{t\wedge T_n} |Z_r|^{p-1}\left\langle \varphi_r, dB_r\right\rangle + \frac{p(p-1)}{2}\int_0^{t\wedge T_n} |Z_r|^{p-2}|\varphi_r|^2\,dr$$

et en prenant l'espérance de cette expression, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[|Z_{t\wedge T_n}|^p\right] &= \mathbb{E}\left[p\int_0^{t\wedge T_n} |Z_r|^{p-1}\left\langle \varphi_r, dB_r\right\rangle\right] + \frac{p(p-1)}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge T_n} |Z_r|^{p-2}|\varphi_r|^2\,dr\right] \\
&= \mathbb{E}\left[p\int_0^{t} \mathbb{1}_{[0;T_n]}(r)|Z_r|^{p-1}\left\langle \varphi_r, dB_r\right\rangle\right] + \frac{p(p-1)}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge T_n} |Z_r|^{p-2}|\varphi_r|^2\,dr\right] \\
&= \frac{p(p-1)}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge T_n} |Z_r|^{p-2}|\varphi_r|^2\,dr\right]
\end{aligned}$$

En utilisant le lemme de Fatou en $n\infty$, on obtient :

$$\mathbb{E}\left[|Z_t|^p\right] \leq \frac{p(p-1)}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^{t} |Z_r|^{p-2}|\varphi_r|^2\,dr\right].$$

Puis on écrit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_0^{t} |Z_r|^{p-2}|\varphi_r|^2\,dr\right] &\leq \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t}|Z_r|^{p-2}\int_0^t |\varphi_r|^2\,dr\right] \\
&\leq \left(\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t}|Z_r|^{p}\right]\right)^{\frac{p-2}{p}}\left(\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t |\varphi_r|^2\,dr\right)^{p/2}\right]\right)^{2/p} \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

Ensuite si

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t |\varphi_s|^2\,ds\right)^{\frac{p}{2}}\right] = \infty$$

alors l'inégalité voulue est triviale sinon on a

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t |\varphi_s|^2\,ds\right] < \infty$$

et $\varphi \in \left(\Lambda^2([0,t])\right)^d$. Dans ce cas, $Z_s = \int_0^s \varphi_r\,dB_r$ $(0 \leq s \leq t)$, est une martingale et en appliquant la formule (2.2) page 39 , on a :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t}\left|\int_0^s \varphi_r\,dB_r\right|^p\right]^{1/p} \leq q\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t \varphi_r\,dB_r\right|^p\right]^{1/p}. \qquad (2.9)$$

On obtient alors en combinant les expressions (2.8) et (2.9) :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le t}\left|\int_0^s \langle \varphi_r, dB_r\rangle\right|^p\right] \le C_p \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t |\varphi_r|^2\,dr\right)^{p/2}\right]$$

et le théorème de Fatou permet alors de passer à la limite en $t \to \infty$ et d'obtenir le résultat demandé $\diamondsuit$

Proposition 2.5.3. *Pour tout $p \ge 4$, il existe une constante c_p telle que pour tout $\varphi \in (\Lambda^2_{loc})^d$*

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty |\varphi_r|^2\,dr\right)^{p/2}\right] \le c_p \mathbb{E}\left[\sup_{t\ge 0}\left|\int_0^s \langle \varphi_r, dB_r\rangle\right|^p\right]$$

Preuve :
Comme dans la proposition précédente et avec les mêmes notations, on déduit de la formule d'Itô que :

$$Z_t^2 = 2\int_0^t Z_s \langle \varphi_s, dB_s\rangle + \int_0^t |\varphi_s|^2\,ds$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}\left(\int_0^t |\varphi_s|^2\,ds\right)^{p/2} &= \left(Z_t^2 - 2\int_0^t Z_s \langle \varphi_s, dB_s\rangle\right)^{p/2}\\ &\le 2^{p/2-1}\left(|Z_t|^p + 2^{p/2}\left|\int_0^t Z_s\langle \varphi_s, dB_s\rangle\right|^{p/2}\right)\\ &\le 2^{p-1}\left(\sup_{t\ge 0}|Z_t|^p + \sup_{t\ge 0}\left|\int_0^t Z_s\langle \varphi_s, dB_s\rangle\right|^{p/2}\right)\end{aligned}$$

et en prenant l'espérance et en passant à la limite en $t \to \infty$

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty |\varphi_s|^2\,ds\right)^{p/2}\right] \le 2^{p-1}\left(\mathbb{E}\left(\sup_{t\ge 0}|Z_t|^p\right) + \mathbb{E}\left(\sup_{t\ge 0}\left|\int_0^t Z_s\langle \varphi_s, dB_s\rangle\right|^{p/2}\right)\right)$$

D'autre part, en utilisant la proposition précédente, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\sup_{t\geq 0}\left|\int_0^t Z_s\left\langle\varphi_s, dB_s\right\rangle\right|^{p/2}\right) &\leq C_p\mathbb{E}\left[\left|\int_0^\infty |Z_s|^2|\varphi_s|^2\,ds\right|^{p/4}\right]\\
&\leq C_p\mathbb{E}\left[\sup_{t\geq 0}|Z_s|^{p/2}\left|\int_0^\infty |\varphi_s|^2\,ds\right|^{p/4}\right]\\
&\overset{C-S}{\leq} C_p\left(\mathbb{E}\left[\sup_{t\geq 0}|Z_s|^p\right]\right)^{1/2}\left(\mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty |\varphi_t|^2\,dt\right)^{p/2}\right]\right)^{1/2}\\
&\overset{ab\leq\frac{a^2+b^2}{2}}{\leq} \frac{C_p}{2}\left(\varepsilon\mathbb{E}\left[\sup_{t\geq 0}|Z_s|^p\right]+\frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty |\varphi_t|^2\,dt\right)^{p/2}\right]\right)
\end{aligned}$$

et ceci pour tout $\varepsilon > 0$. En choisissant $\varepsilon = 2^{p-1}C_p$ et en combinant les deux inégalités précédente, on obtient alors le résultat $\diamondsuit$

Il reste alors à déduire le résultat pour p petit des résultats obtenus pour p grand.

Définition 2.5.4. *Un processus continu, positif et progressivement mesurable $\{X_t, t\geq 0\}$ est dit dominé par le processus croissant et continu $\{A_t, t\geq 0\}$ si pour tout temps d'arrêt borné τ,*

$$\mathbb{E}\left[X_\tau\right] \leq \mathbb{E}\left[A_\tau\right].$$

Lemme 2.5.5. *Soit $\{X_t, t\geq 0\}$ un processus positif, continu et progressivement mesurable dominé par le processus croissant et continu $\{A_t, t\geq 0\}$. Alors*

1. *Pour tous $x, y > 0$,*
$$\mathrm{P}\left(\sup_{t\geq 0} X_t > x, A_\infty \leq y\right) \leq \frac{1}{x}\mathbb{E}\left[\min(A_\infty, y)\right]$$
2. *Pour tout $k \in]0;1[$,*
$$\mathbb{E}\left[\left(\sup_{t\geq 0} X_t\right)^k\right] \leq \frac{2-k}{1-k}\mathbb{E}\left[A_\infty^k\right]$$

Preuve :
Il est suffisant de prouver (avec Fatou) que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{P}\left(\sup_{0\leq t\leq n} X_t > x, A_n \leq y\right) \leq \frac{1}{x}\mathbb{E}\left[A_n \wedge y\right].$$

Définissons les temps d'arrêt :

$$\tau = \inf\{t; A_t \geq y\} \wedge n$$

$$\eta = \inf\{t; X_t \geq x\} \wedge n$$

On peut déjà remarquer que $\{A_n \leq y\} = \{\tau = n\}$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(\sup_{0\leq t\leq n} X_t > x, A_n \leq y\right) &= \mathrm{P}\left(\sup_{0\leq t\leq n} X_t > x, \tau = n\right) \\
&= \mathrm{P}\left(\eta < n, \tau = n\right) \\
&\leq \mathrm{P}\left(X_{\tau\wedge\eta} = x\right) \\
&= \frac{1}{x}[x\mathrm{P}\left(X_{\tau\wedge\eta} = x\right)] \\
&\leq \frac{1}{x}\mathbb{E}\left[X_{\tau\wedge\eta}\right] \\
&\leq \frac{1}{x}\mathbb{E}\left[A_{\tau\wedge\eta}\right] \\
&\leq \frac{1}{x}\mathbb{E}\left[\min(A_n, y)\right]
\end{aligned}$$

car on a à la fois $A_{\tau\wedge\eta} \leq A_n$ et $A_{\tau\wedge\eta} \leq y$.

Pour le 2), soit F une fonction croissante et croissante de $\mathbb{R}^+$ dans lui-même satisfaisant de plus $F(0) = 0$. En utilisant le théorème de Fubini et le 1), on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[F(\sup_{t\geq 0} X_t)\right] &= \mathbb{E}\left[\int_0^{\sup_{t\geq 0} X_t} dF(x)\right] \\
&= \int_0^\infty \mathrm{P}\left(\sup_{t\geq 0} X_t > x\right) dF(x) \\
&\leq \int_0^\infty \left[\mathrm{P}\left(\sup_{t\geq 0} X_t > x, A_\infty \leq x\right) + \mathrm{P}\left(A_\infty > x\right)\right] dF(x) \\
&\leq \int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\mathbb{E}\left[A_\infty \wedge x\right] + \mathrm{P}\left(A_\infty > x\right)\right) dF(x) \\
&\leq \int_0^\infty \left(2\mathrm{P}\left(A_\infty > x\right) + \frac{1}{x}\mathbb{E}\left[A_\infty \mathbb{1}_{\{A_\infty \leq x\}}\right]\right) dF(x) \\
&= 2\mathbb{E}\left[F(A_\infty)\right] + \mathbb{E}\left[A_\infty \int_{A_\infty}^\infty \frac{1}{x}\, dF(x)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\tilde{F}(A_\infty)\right]
\end{aligned}$$

où $\tilde{F}(x) = 2F(x) + \int_x^\infty \frac{1}{u}\, dF(u)$. En choisissant $F(x) = x^k$ on obtient bien 2) $\diamondsuit$

Nous allons maintenant finir la preuve du théorème 2.5.1. Pour prouver l'inégalité de droite, on utilise le lemme 2.5.5 avec $X_t = \left| \int_0^t \langle \varphi_s, dB_s \rangle \right|^2$ et $A_t = c_2 \int_0^t |\varphi_s|^2\, ds$. L'hypothèse de domination résulte de la proposition 2.5.2 appliquée à $\varphi 1\!\!1_{[0;\tau]}$ au lieu de φ. Ainsi pour $k \in]0;1[$,

$$\mathbb{E}\left[\left(\sup_{t\geq 0} X_t\right)^k\right] \leq \frac{2-k}{1-k}\mathbb{E}\left[A_\infty^k\right]$$

et en posant $p = 2k$ où $p \in]0;2[$, on obtient

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\geq 0}\left|\int_0^t \langle \varphi_s, dB_s \rangle\right|^p\right] \leq \frac{4-p}{2-p} c_2^{p/2}\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t |\varphi_s|^2\, ds\right)^{p/2}\right].$$

Pour prouver l'inégalité de gauche pour $p < 4$, on utilise le lemme 2.5.5 avec $X_t = \left(\int_0^t |\varphi_s|^2\, ds\right)^2$ et $A_t = c_4 \sup_{0\leq s\leq t} \left|\int_0^s \langle \varphi_r, dB_r \rangle\right|^4$. La domination résulte de la proposition 2.5.3. On a alors pour $k \in]0;1[$:

$$\mathbb{E}\left[\left(\sup_{t\geq 0} X_t\right)^k\right] \leq \frac{2-k}{1-k}\mathbb{E}\left[A_\infty^k\right]$$

et en posant $p = 4k, 0 < p < 4$ cela nous donne :

$$E\left[\left(\int_0^t |\varphi_s|^2\, ds\right)^{p/2}\right] \leq \frac{8-p}{4-p} c_4^{p/4}\mathbb{E}\left[\sup_{t\geq 0}\left|\int_0^t \langle \varphi_s, dB_s \rangle\right|^p\right].$$

Nous énonçons maintenant un corollaire qui sera très utile :

<u>Corollaire</u> 2.5.6. *Soit $\varphi \in (\Lambda^2_{loc})^d$ tel que $\mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty |\varphi_t|^2\, dt\right)^{1/2}\right] < \infty$. Alors le processus $\left\{\int_0^t \langle \varphi_s, dB_s \rangle, t \geq 0\right\}$ est une martingale uniformément intégrable. En particulier pour tout $t > 0$, la variable aléatoire $\int_0^t \langle \varphi_s, dB_s \rangle$ est intégrable et*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \langle \varphi_s, dB_s \rangle\right] = 0.$$

Preuve :
En posant $M_t = \int_0^t \langle \varphi_s, dB_s \rangle$, on a d'après le théorème 2.5.1 :

$$\forall t \geq 0, |M_t| \leq \sup_{t \geq 0} |M_t| \in L^1(\Omega)$$

donc la martingale est bien uniformément intégrable et le reste en découle facilement $\diamondsuit$

2.6 Théorèmes de représentation des martingales

Nous avons vu que le mouvement brownien ainsi que les intégrales stochastiques d'éléments de Λ^2 sont des martingales. Dans cette section, nous allons étudier les conditions sous lesquelles une martingale est un mouvement brownien ou une intégrale stochastique par rapport à un mouvement brownien.

Nous aurons par la suite besoin de la remarque suivante :

Remarque 2.6.1. *Soit $\{M_t, t \geq 0\}$ une martingale continue d-dimensionnelle telle que $M_0 = 0$ P ps et $\{M_t M_t^* - t\mathrm{I}; t \geq 0\}$ est une martingale à valeurs dans les matrices $d \times d$. Soit $F \in C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$, on peut alors construire de la même manière que pour le mouvement brownien l'intégrale stochastique*

$$\int_0^t \langle F(M_s), dM_s \rangle$$

qui est aussi une martingale continue. On peut également montrer de la même manière que nous l'avons fait la formule d'Itô suivante pour $\Phi \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$:

$$\forall t \geq 0, \Phi(M_t) = \Phi(0) + \int_0^t \nabla\Phi(M_s)\, dM_s + \frac{1}{2}\int_0^t \mathrm{Tr}(\Phi''(M_s))\, ds$$

Nous pouvons alors prouver le fameux théorème suivant :

Théorème 2.6.2. Paul Lévy *Soit $\{M_t, t \geq 0\}$ une martingale continue d-dimensionnelle telle que $M_0 = 0$ P ps et $\{M_t M_t^* - t\mathrm{I}; t \geq 0\}$ est une martingale à valeurs dans les matrices $d \times d$. Alors $\{M_t, t \geq 0\}$ est un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien.*

Preuve : Appliquons la remarque précédente à la fonction $\Phi \in C_b^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ donnée par $\Phi(x) = e^{i<\lambda,x>}$ où $\lambda \in \mathbb{R}^d$. Nous avons :

$$e^{i<\lambda,M_t>} \quad = \quad e^{i<\lambda,M_s>} + i\left\langle \lambda, \int_s^t e^{i<\lambda,M_r>} dM_r \right\rangle - \frac{|\lambda|^2}{2}\int_s^t e^{i<\lambda,M_r>}\, dr$$

$$e^{i<\lambda,M_t-M_s>} = 1 + i\left\langle \lambda, \int_s^t e^{i<\lambda,M_r-M_s>} dM_r \right\rangle - \frac{|\lambda|^2}{2}\int_s^t e^{i<\lambda,M_r-M_s>}\, dr$$

et en prenant l'espérance conditionnelle :

$$\mathbb{E}\left[e^{i<\lambda,M_t-M_s>}|\mathcal{F}_s\right] = 1 - \frac{|\lambda|^2}{2}\int_s^t \mathbb{E}\left[e^{i<\lambda,M_t-M_s>}|\mathcal{F}_s\right]\, dr$$

Ainsi le processus à valeurs complexes $\varphi(t) = \mathbb{E}\left[e^{i<\lambda,M_t-M_s>}|\mathcal{F}_s\right], t \geq s$ satisfait l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \frac{d\varphi(t)}{dt} &= -\frac{|\lambda|^2}{2}\varphi(t), t \geq s \\ \varphi(s) &= 1 \end{cases}$$

En conséquence, on a

$$\mathbb{E}\left[e^{i<\lambda,M_t-M_s>}|\mathcal{F}_s\right] = e^{-\frac{|\lambda|^2}{2}(t-s)}, 0 \leq s < t, \lambda \in \mathbb{R}^d.$$

et ceci prouve que M_t est à accroissements $M_t - M_s$ sont indépendants de $\mathcal{F}_s$ et suivent la loi $N(0,(t-s)I)$ $\diamondsuit$

Nous supposerons maintenant que $\{B_t, t \geq 0\}$ est un mouvement brownien d-dimensionnel et que la filtration $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ est la filtration naturelle de $\{B_t, t \geq 0\}$ ie $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, 0 \leq s \leq t)$ (aux ensembles de P mesure nulle près).

Théorème 2.6.3. *Soit $\{M_t, t \geq 0\}$ une martingale telle que $M_0 = 0$ P ps et*

$$\mathbb{E}\left[|M_t|^2\right] < \infty, t > 0.$$

Alors il existe un unique $\varphi \in (\Lambda^2)^d$ tel que

$$M_t = \int_0^t \langle \varphi_s, dB_s \rangle, t \geq 0, \;\; P\, ps$$

Preuve :
L'unicité de φ résulte du fait que si φ, φ' satisfont le théorème alors

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |\varphi_t - \varphi'_t|^2\, dt\right] = 0, T > 0.$$

Pour prouver l'existence de φ il suffit de montrer (en utilisant l'unicité) que pour tout $T > 0$, il existe $\varphi \in (\Lambda^2([0,T]))^d$ tel que

$$M_T = \int_0^T \langle \varphi_t, dB_t \rangle .$$

Ceci résulte du fait que l'ensemble

$$\mathcal{H} = \left\{ c + \int_0^T \langle \varphi_t, dB_t \rangle ; c \in \mathbb{R}, \varphi \in (\Lambda^2([0,T]))^d \right\}$$

coïncide avec $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$. Il est facile de voir que

$$\mathcal{H} \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P).$$

Il suffit alors de montrer que $\mathcal{H}$ est à la fois dense et fermé dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$.

a) $\mathcal{H}$ est fermé. Soit $\{c_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ et $\{\varphi^n, n \in \mathbb{N}\} \subset (\Lambda^2([0,T]))^d$ et soit

$$\xi_n = c_n + \int_0^T \langle \varphi_t^n, dB_t \rangle , n \in \mathbb{N}.$$

On suppose que $\xi_n \to \xi$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$. Alors $\mathbb{E}[\xi_n] \to \mathbb{E}[\xi]$ et ainsi $c_n \to c$. D'autre part on a :

$$Var(\xi_n - \xi_m) = \mathbb{E}\left[\int_0^T |\varphi_t^n - \varphi_t^m|^2 \, dt\right] \to 0,$$

lorsque $m, n \to \infty$. Ainsi la suite $\{\varphi^n, n \in \mathbb{N}\}$ est une suite de Cauchy dans $(\Lambda^2([0,T]))^d$ et il existe $\varphi \in (\Lambda^2([0,T]))^d$ tel que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |\varphi_t^n - \varphi_t|^2 \, dt\right] \to 0,$$

et

$$\xi = c + \int_0^T \langle \varphi_t, dB_t \rangle .$$

b) $\mathcal{H}$ est dense dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$. Soit $\rho \in L^2([0,T], \mathbb{R}^d)$, on pose

$$X_t^\rho = \int_0^t \langle \varphi_s, dB_s \rangle - \frac{1}{2} \int_0^t |\rho_s|^2 \, ds,$$

$$\varepsilon_t^\rho = \exp(X_t^\rho), \varepsilon^\rho \triangleq \varepsilon_T^\rho.$$

En appliquant la formule d'Itô au processus X_t^ρ et à la fonction $\Phi(x) = \exp(x)$ on obtient

$$\begin{aligned}
\varepsilon^\rho &= \exp(X_T^\rho) \\
&= 1 + \int_0^T \exp(X_t^\rho)\left(-\frac{1}{2}|\rho_t|^2\right) ds + \int_0^T \exp(X_t^\rho)\langle \varphi_t, dB_t\rangle + \frac{1}{2}\int_0^T Tr(\rho_t\rho_t^*)\exp(X_t^\rho)\, ds \\
&= 1 + \int_0^T \exp(X_t^\rho)\langle \varphi_t, dB_t\rangle
\end{aligned}$$

De plus on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_0^T |\xi_t^\rho \rho_t|^2\, dt\right] &= \int_0^T |\rho_t|^2 \mathbb{E}\left[|\xi_t^\rho|^2\right] dt \\
&= \int_0^T |\rho_t|^2 \exp\left(\int_0^t |\rho_s|^2\, ds\right) dt \\
&< \infty \text{ car } \rho \in L^2([0,T], \mathbb{R}^d)
\end{aligned}$$

et donc $\varepsilon^\rho \in \mathcal{H}$.

Nous allons maintenant montrer que pour $Z \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$,

$$\mathbb{E}\left[Z\varepsilon^\rho\right] = 0\,,\ \forall \rho \in L^2([0,T], \mathbb{R}^d) \Rightarrow Z = 0.$$

et ceci prouvera la densité. Or

$$\mathbb{E}\left[Z\varepsilon^\rho\right] = c_\rho \mathbb{E}\left[Z\exp\left(\int_0^T \langle \rho_t, dB_t\rangle\right)\right].$$

En choisissant $\rho = \displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbb{1}_{[t_{i-1};t_i[}(t)$ où $\forall i, \lambda_i \in \mathbb{C}^d, 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n \leq T$, nous avons :

$$\mathbb{E}\left[Z\exp\left(\langle \lambda_1, B_{t_1}\rangle + \langle \lambda_2, B_{t_2} - B_{t_1}\rangle + \cdots + \left\langle \lambda_n, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}\right\rangle\right)\right] = 0,$$

et quitte à changer les notations, on a $\forall \mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{R}^d, \forall 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leq T$,

$$\mathbb{E}\left[Z\exp\left(i\langle \mu_1, B_{t_1}\rangle + i\langle \mu_2, B_{t_2}\rangle + \cdots + i\langle \mu_n, B_{t_n}\rangle\right)\right] = 0.$$

Posons pour alléger l'écriture $\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} B_{t_1} \\ \vdots \\ B_{t_n} \end{pmatrix}$.

Nous avons $\mathbb{E}\left[Ze^{i<\mu,Y>}\right] = 0, \forall \mu \in \mathbb{R}^{dn}$. Nous allons montrer que $\mathbb{E}\left[Z|Y\right] = 0$. Il suffit pour cela de montrer que pour toute fonction $f \in C_0(\mathbb{R}^{dn})$ $\mathbb{E}\left[f(Y)Z\right] = 0$ et par densité il suffit de le montrer pour les fonctions f étant des transformées de Fourier de fonctions de $L^1(\mathbb{R}^{dn})$. Soit donc

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^{dn}} e^{i<x,t>} g(t)\, dt$$

on a alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[f(Y)Z\right] &= \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^{dn}} Ze^{i<Y,t>} g(t)\, dt\right] \\
&= \int_{\mathbb{R}^{dn}} g(t)\mathbb{E}\left[Ze^{i<Y,t>}\right]\, dt \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ainsi on a montré : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall 0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leq T$

$$\mathbb{E}\left[Z|B_{t_1}, \ldots, B_{t_n}\right] = 0.$$

Soit $\mathcal{A} = \bigcup_{\{n, 0 \leq t_1 < \cdots < t_n\}} \sigma(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})$. Pour tout $A \in \mathcal{A}$ on a

$$\int_A Z\, dP = 0$$

et par le théorème de la classe monotone ceci est encore vrai pour tout $A \in \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{F}_T$ donc $Z = 0$ P ps $\diamondsuit$

Corollaire 2.6.4. *Soit $T > 0$ et $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$. Alors il existe un unique $\varphi \in (\Lambda^2([0,T]))^d$ tel que*

$$\xi = \mathbb{E}\left[\xi\right] + \int_0^T \langle \varphi_t, dB_t \rangle .$$

Preuve :
Pour $t \geq 0$ on définit

$$M_t = \mathbb{E}\left[\xi|\mathcal{F}_t\right] - \mathbb{E}\left[\xi\right].$$

Alors M_t est une martingale qui vérifie les hypothèses du théorème précédent et le résultat en découle $\diamondsuit$

Corollaire 2.6.5. *Soit $T > 0$ et $\xi \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$ pour un $p > 1$. Alors il existe un unique $\varphi \in (\Lambda^2_{loc}([0,T]))^d$ tel que*

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T |\varphi_t|^2\, dt\right)^{p/2}\right] < \infty$$

et

$$\xi = \mathbb{E}\left[\xi\right] + \int_0^T \langle \varphi_t, dB_t\rangle \,.$$

Preuve :
Supposons que l'on dispose d'un tel φ. Alors en combinant les inégalités de Burkholder-Davis-Gundy et Doob et en posant $M_t = \int_0^t \langle \varphi_s, dB_s\rangle$ on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T |\varphi_t|^2\, dt\right)^{p/2}\right] &\leq c_p\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T}|M_t|^p\right]\\ &\leq \frac{p}{p-1}c_p\mathbb{E}\left[|\xi - \mathbb{E}\left[\xi\right]|^p\right]\end{aligned}$$

L'unicité de φ résulte alors de cette inégalité, il suffit de l'appliquer à la différence de deux éventuels candidats. Le cas $p \geq 2$ résulte du corollaire précédent et de la même inégalité. Si $1 < p < 2$ alors $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$ est dense dans $L^p(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$ et alors il existe une suite $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\} \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$ telle que $\xi_n \to \xi$ dans $L^p(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$.

A chaque ξ_n on associe d'après le corollaire précédent $\varphi^n \in (\Lambda^2([0,T]))^d$ tel que

$$\xi_n = \mathbb{E}\left[\xi_n\right] + \int_0^T \langle \varphi^n_t, dB_t\rangle \,.$$

Toujours d'après l'inégalité précédente, on a

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T |\varphi^n_t - \varphi^m_t|^2\, dt\right)^{p/2}\right] \leq \frac{p}{p-1}c_p\mathbb{E}\left[|\xi_n - \xi_m - \mathbb{E}\left[\xi_n - \xi_m\right]|^p\right]$$

Ainsi la suite $(\varphi_n)_n$ est de Cauchy dans l'espace des processus progressivement mesurables de $L^{p/2}(\Omega, L^2([0;T], \mathbb{R}^d))$ et a donc une limite dans cet espace. Il ne reste alors plus qu'à passer à la limite dans l'égalité ci-dessus $\diamondsuit$

Chapitre 3

Equations différentielles stochastiques

3.1 Introduction

Le but de ce chapitre est d'étudier les équations différentielles stochastiques de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} dX_t & = & f(t, X_t)\, dt + g(t, X_t)\, dB_t \\ X_0 & = & x \end{array} \right. \tag{3.1}$$

qui est une facilité d'écriture pour

$$X_t = x + \int_0^t f(s, X_s)\, ds + \int_0^t g(s, X_s)\, dB_s,$$

où $\{B_t; t \geq 0\}$ est un mouvement brownien k-dimensionnel. Le coefficient $f(t, X_t)$ de 'dt' est appelé la dérive et le coefficient $g(t, X_t)$ de 'dB_t' est appelé coefficient de diffusion.

Nous rechercherons des solutions $\{X_t; t \geq 0\}$ qui sont des processus d-dimensionnels progressivement mesurables et doivent nécessairement vérifier :

$$Pp.s., \forall t > 0, \int_0^t |f(s, X_s)|\, ds < \infty \text{ et } \int_0^t \|g(s, X_s)\|^2\, ds < \infty$$

On conviendra par la suite que

$$f \colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, g \colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d \times k}$$

sont des fonctions mesurables.

3.2 Estimations préliminaires

Pour établir des conditions d'existence et d'unicité, nous serons amenés à utiliser certaines estimations. Plus précisément, considérons les conditions suivantes sur le couple (f, g) :

$$\forall T > 0, \exists C_T \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}^d, 0 \leq t \leq T, \begin{cases} < x, f(t,x) > \leq C_t(1+|x|^2) \\ \text{et } \|g(t,x)\| \leq C_T(1+|x|) \end{cases} \tag{3.2}$$

et

$$\begin{cases} \forall r > 0, \exists K_r > 0, \forall x, y \in B(0;r), \forall t \geq 0, \\ |f(t,x) - f(t,y)| + \|g(t,x) - g(t,y)\| \leq C_r|x-y| \end{cases} \tag{3.3}$$

On rappelle aussi le lemme important suivant :

Lemme 3.2.1. Lemme de Gronwall
Soit f une application localement intégrable de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, a et b deux applications croissantes et non négatives telles que

$$f(t) \leq a(t) + b(t) \int_0^t f(s)\, ds, 0 \leq t \leq T$$

Alors on a

$$\forall t \in [0;T], f(t) \leq a(t)e^{b(t)t}$$

Proposition 3.2.2. *Supposons que le couple de fonctions (f, g) vérifie la condition (3.2), que X soit un processus vérifiant*

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s, X_s)\, ds + \int_0^t g(s, X_s)\, dB_s$$

et que $\mathbb{E}[|X_0|^p] < \infty$ pour un $p \geq 2$. Alors $\forall T > 0$, il existe une constante $C(p,T)$ telle que pour $0 \leq t \leq T$ on ait

$$\mathbb{E}[|X_t|^p] \leq (\mathbb{E}[|X_0|^p] + C(p,T)t)e^{C(p,T)t}$$

Preuve :
Soit $T > 0$ et C_T donnée par la condition 3.2. Appliquons la formule d'Itô au processus X et à la fonction $\Phi(x) = |x|^p$, on a :

$$
\begin{aligned}
|X_s|^p &= |X_0|^p + p\int_0^s |X_u|^{p-2}\left\langle X_u, f(u,X_u)\right\rangle\, du + \int_0^s p|X_s|^{p-2}\left\langle X_u, g(u,X_u)\, dB_u\right\rangle \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^s Tr\left(p|X_u|^{p-2} g(u,X_u) g^*(u,X_u)\right) + p(p-2)|X_u|^{p-4}(g(u,X_u),X_u)^2\, du \\
&\leq |X_0|^p + c(p,C_T)\int_0^s (1+|X_u|^p)\, du + \int_0^s p|X_u|^{p-2}\left\langle X_u, g(u,X_u)\, dB_u\right\rangle
\end{aligned}
$$

Soit T_n le temps d'arrêt défini par

$$
T_n = \inf\left\{ t \geq 0; \int_0^t |X_u|^{2p-4}|\left\langle X_u, g(u,X_u)\right\rangle|^2\, du \geq n \right\}.
$$

En écrivant l'expression précédente au point $t \wedge T_n$ puis en prenant l'espérance du résultat et en utilisant les arguments habituels pour supprimer le terme relatif à l'intégrale stochastique, on obtient

$$
\mathbb{E}\left[|X_{t\wedge T_n}|^p\right] \leq \mathbb{E}\left[|X_0|^p\right] + c(p,C_T)(t\wedge T_n) + c(p,C_T)\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge T_n} |X_u|^p\, du\right]
$$

Puis en utilisant le lemme de Fatou et le théorème de Fubini pour inverser les intégrales du membre de droite, on a :

$$
\mathbb{E}\left[|X_t|^p\right] \leq \mathbb{E}\left[|X_0|^p\right] + c(p,C_T)t + c(p,C_T)\mathbb{E}\left[\int_0^t |X_u|^p\, du\right], \qquad 0 \leq t \leq T
$$

puis on obtient le résultat final en utilisant le lemme de Gronwall $\diamondsuit$

3.3 Existence et unicité de la solution

On établit tout d'abord un résultat d'existence et d'unicité sous une condition de Lipschitz uniforme, i.e. nous supposerons que le couple (f,g) vérifie :

(3.4) $\qquad \exists K, \forall t \geq 0, \forall x,y \in \mathbb{R}^d, |f(t,x) - f(t,y)| + |g(t,x) - g(t,y)| \leq K|x-y|$

et de plus

$$\forall T > 0, \int_0^T (|f(t,0)|^2 + \|g(t,0)\|^2)\, dt < \infty \tag{3.5}$$

Nous avons alors

<u>Théorème</u> 3.3.1. *Sous les hypothèses 3.4 et 3.5, pour tout point initial $x \in \mathbb{R}^d$, il existe une unique solution $\{X_t; t \geq 0\} \in (\Lambda^2)^d$ de l'EDS (3.1)*

Preuve :
Considérons l'application Φ de $(\Lambda^2)^d$ dans lui-même définie par

$$\forall U \in (\Lambda^2)^d, \Phi(U)_t = x + \int_0^t f(s, U_s)\, ds + \int_0^t g(s, U_s)\, dB_s.$$

En utilisant la proposition 2.5.2 page 64 et les conditions 3.4 et 3.5, il est facile de montrer que $\Phi(U) \in (\Lambda^2)^d$. Une solution de l'équation 3.1 est un point fixe de Φ. L'existence et l'unicité d'un point fixe va résulter du fait que pour tout $T > 0$, Φ est strictement contractante sur $(\Lambda^2)^d([0;T])$ muni de la norme

$$\|X\|_\beta = \left(\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{-\beta t}|X_t|\, dt\right]\right)^{1/2}$$

pour β choisi convenablement.
Soit $U, U' \in (\Lambda^2)^d$. Pour soulager l'écriture, on pose $\overline{U} = U - U'$, $\overline{f}_t = f(t,U_t) - f(t,U'_t)$, $\overline{g}_t = g(t,U_t) - g(t,U'_t)$, $\overline{\Phi}_t = \Phi(U)_t - \Phi(U')_t$. Il résulte de la formule d'Itô vectorielle appliquée au processus d'Itô $\overline{\Phi}$ et à la fonction $\Gamma(t,x) = e^{-\beta t}|x|^2$ que pour chaque $\beta \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} e^{-\beta t}|\overline{\Phi}_t|^2 &= -\int_0^t \beta e^{-\beta s}|\overline{\Phi}_s|^2\, ds + 2\int_0^t e^{-\beta s}\left\langle \overline{\Phi}_s, \overline{f}_s\right\rangle ds + 2\int_0^t e^{-\beta s}\left\langle \overline{\Phi}_s, \overline{g}_s\, dB_s\right\rangle \\ &\quad + \int_0^t e^{-\beta s} Tr(\overline{g}_s \overline{g}_s^*)\, ds \end{aligned}$$

Introduisons le temps d'arrêt T_n défini par

$$T_n = \inf\left\{t \geq 0; \int_0^t e^{-2\beta s}|(\overline{\Phi}_s, \overline{g}_s)|^2\, ds \geq n\right\}.$$

En écrivant l'expression précédente au point $T \wedge T_n$ et en prenant l'espérance, puis en minorant par 0 le terme $\mathbb{E}\left[e^{-\beta(T\wedge T_n)}|\overline{\Phi}_{T\wedge T_n}|^2\right]$, on obtient

$$\begin{aligned}
\beta\mathbb{E}\left[\int_0^{T\wedge T_n} e^{-\beta s}|\overline{\Phi}_s|^2\,ds\right] &\leq 2\mathbb{E}\left[\int_0^{T\wedge T_n} e^{-\beta s}\left\langle \overline{\Phi}_s, \overline{f}_s\right\rangle\,ds\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^{T\wedge T_n} e^{-\beta s}Tr(\overline{g}_s\overline{g}_s^*)\,ds\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\int_0^{T\wedge T_n} e^{-\beta s}|\overline{\Phi}_s|^2\,ds\right] + K^2\mathbb{E}\left[\int_0^{T\wedge T_n} e^{-\beta s}|\overline{U}|^2\,ds\right] \\
&\quad +K^2\mathbb{E}\left[\int_0^{T\wedge T_n} e^{-\beta s}|\overline{U}|^2\,ds\right] \text{ car } 2\langle x,y\rangle \leq |x|^2+|y|^2 \text{ et avec 3.4,}
\end{aligned}$$

En choisissant $\beta = 1 + 4K^2$, on obtient :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{T\wedge T_n} e^{-\beta s}|\overline{\Phi}_s|^2\,ds\right] \leq \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^{T\wedge T_n} e^{-\beta s}|\overline{U}|^2\,ds\right],$$

puis le lemme de Fatou assure que l'application Φ est bien contractante et ceci achève la démonstration $\diamondsuit$

Si l'on considère maintenant l'EDS

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s,X_s)\,ds + \int_0^t g(s,X_s)\,dB_s \tag{3.6}$$

où la condition initiale n'est plus déterministe mais est un vecteur aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable (et est donc indépendant du mouvement brownien $\{B_t\}$).

Si $\mathbb{E}\left[|X_0|^2\right] < \infty$ alors les conclusions et la preuve du théorème 3.3.1 peuvent être adaptées sans aucune modification.

Nous allons maintenant étendre les résultats précédents dans le cas de conditions de Lipschitz locales qui correspondent à la condition (3.3) dont on rappelle l'énoncé

$$\begin{cases} \forall r>0, \exists K_r>0, \forall x,y \in B(0;r), \forall t\geq 0, \\ |f(t,x)-f(t,y)| + \|g(t,x)-g(t,y)\| \leq C_r|x-y| \end{cases}$$

Proposition 3.3.2. *Supposons que le couple de fonctions (f,g) vérifie la condition (3.3), que X, X' soit deux processus vérifiant*

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s,X_s)\,ds + \int_0^t g(s,X_s)\,dB_s$$

et que $\mathbb{E}\left[|X_0 - X'_0|^p\right] < \infty$ *pour un* $p \geq 2$. *Si* T'_n *désigne le temps d'arrêt défini par*

$$T'_n = \inf\left\{t \geq 0; |X_t| \vee |X'_t| \geq n\right\}$$

et si K_n *est donnée par la condition 3.3, alors on a*

$$\mathbb{E}\left[|X_{t\wedge T'_n} - X'_{t\wedge T'_n}|^p\right] \leq \mathbb{E}\left[|X_0 - X'_0|^p\right] \exp\left(pK_n t + \frac{p(p-1)K_n^2}{2} t\right), t \geq 0$$

En particulier si la condition de Lipschitz est uniforme, on a :

$$\mathbb{E}\left[|X_t - X'_t|^p\right] \leq \mathbb{E}\left[|X_0 - X'_0|^p\right] \exp\left(pKt + \frac{p(p-1)K^2}{2} t\right), t \geq 0$$

Preuve :
Soit $T > 0$ et K_n donnée par la condition 3.3 pour la boule $B(0; n)$. Appliquons la formule d'Itô au processus $X - X'$ et à la fonction $\Phi(x) = |x|^p$, on a :

$$\begin{aligned}
|X_s - X'_s|^p &= |X_0 - X'_0|^p + p\int_0^s |X_u - X'_u|^{p-2} \left\langle X_u - X'_u, f(u, X_u) - f(u, X'u)\right\rangle du \\
&+ \int_0^s p|X_u - X'_u|^{p-2} \left\langle X_u - X'_u, (g(u, X_u) - g(u, X'_u))\, dB_u\right\rangle \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^s Tr\left(p|X_u - X'_u|^{p-2}(g(u, X_u) - g(u, X'_u))(g^*(u, X_u) - g^*(u, X'_u))\right) du \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^s p(p-2)|X_u - X'_u|^{p-4}(g(u, X_u) - g(u, X'_u), X_u - X'_u)^2\, du
\end{aligned}$$

On introduit le temps d'arrêt T_k défini par

$$T_k = \inf\left\{t \geq 0; \int_0^t |X_u - X'_u|^{2p-4} |\left\langle X_u - X'_u, (g(u, X_u) - g(u, X'_u))\right\rangle|^2\right\}$$

puis on prend la formule précédente au point $t \wedge T_k \wedge T'_n$ et on prend l'espérance de l'expression obtenue et on obtient :

$$\mathbb{E}\left[|X_{t\wedge T_k\wedge T'_n} - X'_{t\wedge T_k\wedge T'_n}|^p\right] \leq \mathbb{E}\left[|X_0 - X'_0|^p\right] + \left(pK_n + \frac{p(p-1)K_n^2}{2}\right)\int_0^{t\wedge T_k\wedge T'_n} \mathbb{E}\left[|X_u - X'_u|^p\right] du$$

pour $t \geq 0$ puis on utilise le lemme de Fatou (en k) pour obtenir

$$\mathbb{E}\left[|X_{t\wedge T_n'} - X'_{t\wedge T_n'}|^p\right] \leq \mathbb{E}\left[|X_0 - X_0'|^p\right] + \left(pK_n + \frac{p(p-1)K_n^2}{2}\right)\int_0^t \mathbb{E}\left[|X_{u\wedge T_n'} - X'_{u\wedge T_n'}|^p\right] du$$

et le lemme de Gronwall donne alors

$$\mathbb{E}\left[|X_{t\wedge T_n'} - X'_{t\wedge T_n'}|^p\right] \leq \mathbb{E}\left[|X_0 - X_0'|^p\right] \exp\left(pK_n t + \frac{p(p-1)K_n^2}{2} t\right)$$

d'où le résultat $\diamondsuit$

Cette proposition permet de démontrer l'unicité de l'éventuelle solution de l'EDS 3.6 sous l'hypothèse 3.3.

Théorème 3.3.3. *Sous les hypothèses 3.3,3.2 et 3.5 et si $X_0 \in L^2(\Omega)$, l'EDS 3.6 admet une unique solution dans $(\Lambda^2)^d$.*

Preuve :
L'unicité résulte de la proposition précédente. Soit f_n et g_n deux suites de fonctions coïncidant avec f et g sur $[0;n] \times B(0,n)$ et qui vérifient 3.2 avec la même constante C_t que f et g. Pour chaque n, soit $\{X_t^n, t \geq 0\}$ la solution de l'équation avec les coefficients f_n et g_n. Posons pour chaque n,

$$T_n = \inf\left\{t \geq 0, |X_t^n| \geq n\right\}.$$

On a clairement pour $m > n, X^m = X^n$ sur $[0;T_n]$ car la suite T_n est croissante. De plus il résulte de la proposition 3.2.2 que $\forall T > 0, \exists C(T)$ indépendant de n tel que

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t^n|^2\right] \leq C(T).$$

On en déduit que

$$\mathrm{P}\left(T_n \leq T\right) \leq \frac{C(T)}{n^2}$$

et donc que T_n converge P p.s. vers $+\infty$.

Le processus alors défini par $X_t = X_t^n$ sur $[0;T_n], n \in \mathbb{N}$ est une solution de notre équation qui est bien défini pour presque tout $\omega \in \Omega, \forall t \geq 0$.

3.4 Exemples

3.4.1 Processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Considérons l'EDS suivante en dimension un.

$$\text{(3.7)} \qquad \begin{cases} dX_t = \sigma dB_t - cX_t dt \\ X_0 = H \qquad\qquad \text{indépendant de } (B_t)_t \end{cases}$$

Posons $X_t = e^{-ct} Y_t$ et appliquons la formule d'Itô à Y_t.

$$dY_t = ce^{ct} X_t\, dt + e^{ct} dX_t$$

d'où

$$dY_t = e^{ct} \sigma dB_t$$

et par suite

$$Y_t = H + \sigma \int_0^t e^{cs}\, dB_s$$

$$X_t = He^{-ct} + \sigma e^{-ct} \int_0^t e^{cs}\, dB_s.$$

L'équation (3.7) porte le nom d'équation de Langevin et X est le processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

3.4.2 Processus de Black et Scholes

Considérons l'EDS suivante :

$$\text{(3.8)} \qquad \begin{cases} dX_t = X_t(\sigma dB_t + cdt) \\ X_0 = H \qquad\qquad \text{indépendant de } (B_t)_t \end{cases}$$

Posons $X_t = \exp(ct + \sigma B_t).Y_t$ et appliquons la formule d'Itô à Y_t. On obtient :

$$\begin{aligned} X_t \exp(-ct - \sigma B_t) &= H + \frac{1}{2} \int_0^t Tr \left(\begin{pmatrix} \sigma^2 X_s & -\sigma \\ -\sigma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma X_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \sigma X_s \end{pmatrix} \right) \exp(-cs - \sigma B_s)\, ds \\ &= H - \frac{\sigma^2}{2} \int_0^t \exp(-cs - \sigma B_s) X_s\, ds \end{aligned}$$

d'où

$$dY_t = -\frac{1}{2} \sigma^2 Y_t\, dt$$

Soit $Y_t = He^{-\frac{\sigma t}{2}}$ et $X_t = He^{\sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t + ct}$. Les trajectoires de X ont un signe constant et pour $t \uparrow \infty$, on a :

$$\begin{array}{ll} X_t \to 0 & \text{si } c < \frac{\sigma^2}{2} \\ |X_t| \to \infty & \text{si } c > \frac{\sigma^2}{2} \\ \overline{lim} = +\infty \text{ et } \underline{lim}|X_t| = 0 & \text{si } c = \frac{\sigma^2}{2} \end{array}$$

3.5 Dépendance par rapport aux conditions initiales

Définissons maintenant pour $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$, $\{X_s^{x,t}, s \geq 0\}$ comme étant la solution de l'EDS suivante qui part du point x au temps t :

$$X_s^{x,t} = x + \int_t^{t \vee s} f(r, X_r^{x,t})\, dr + \int_t^{t \vee s} g(r, X_r^{x,t})\, dB_r$$

Nous avons tout d'abord le résultat de continuité suivant par rapport aux conditions initiales :

Proposition 3.5.1. *Supposons que f et g vérifient les conditions (3.4) et (3.2). Pour chaque $T > 0, p \geq 2$ il existe une constante $c(p, T)$ telle que*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t \leq s \leq T} |X_s^{x,t} - X_s^{x',t'}|^p\right] \leq c(p, T)(1 + |x|^p + |x'|^p)(|t - t'|^{p/2} + |x - x'|^p)$$

Théorème 3.5.2. *Soit $\left\{Z_v; v \in [0; a]^k\right\}$ un processus à valeurs dans un espace de Banach pour lequel il existe trois constantes strictement positives γ, c, ε telle que*

$$\mathbb{E}\left[\|Z_v - Z_u\|^\gamma\right] \leq c|v - u|^{k+\varepsilon}, \ u, v \in [0; a]^k.$$

Alors il existe un processus $\left\{\tilde{Z}_v; v \in [0; a]^k\right\}$ tel que

i) $\tilde{Z}$ est une modification de Z

ii) $\mathbb{E}\left[\left(\sup_{v \neq u} \frac{\|\tilde{Z}_u - \tilde{Z}_v\|}{|u-v|^\alpha}\right)^\gamma\right] < \infty$,

pour tout $\alpha \in \left[0; \frac{\varepsilon}{\gamma}\right[$, ce qui implique en particulier que les trajectoires de $\tilde{Z}$ sont α-hölderiennes.

Ce dernier théorème est une sorte de généralisation du critère de Kolmogorov-Centsov que l'on a déjà vu. Il résulte aussi de ce théorème et de la proposition précédente que toute solution de l'EDS (3.1) admet une modification qui soit continue par rapport au conditions initiales, c'est-à-dire telle que l'application

$$(t, x, s) \mapsto \tilde{X}_s^{x,t}$$

soit presque sûrement continue. On choisira toujours par la suite une telle modification pour la solution d'une EDS.

3.6 Propriétés de la solution

On peut montrer en utilisant le lemme de Gronwall comme on l'a fait auparavant que

$$\forall t \geq 0, \mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq s \leq t} |X_s - X'_s|^p\right] \leq \mathbb{E}\left[|X_0 - X'_0|^p\right] C(p, t).$$

Il en résulte que si deux processus X et X' définis sur le même espace de probabilité sont solutions de la même EDS 3.1 par rapport au même processus B_t et a la même condition initiale H ont presque sûrement les mêmes trajectoires ie

$$\mathrm{P}\left(\forall t \geq 0, X_t = X'_t\right) = 1.$$

Cette propriété est appelée l'unicité trajectorielle.

Un autre type d'unicité est également intéressant, c'est l'unicité en loi.

Proposition 3.6.1. *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ et $(\Omega', \mathcal{F}', \mathrm{P}')$ deux espaces de probabilité sur lesquels deux mouvements browniens B_t et B'_t sont définis et deux variables aléatoires de même loi H et H' sont données de telle sorte que les hypothèses du théorème 3.3.3 soient vérifiées. Alors la solution X sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ et la solution X' sur $(\Omega', \mathcal{F}', \mathrm{P}')$ ont même loi (ie lois marginales).*

Preuve :
Comme on utilise le théorème de Picard pour démontrer l'existence des solutions, on sait que si l'on pose pour $X \in (\Lambda^2)^d$

$$\Phi(X)_t = X_0 + \int_0^t f(t, X_s)\, ds + \int_0^t g(s, X_s)\, dB_s$$

et

$$\Phi'(X)_t = X'_0 + \int_0^t f(t, X_s)\, ds + \int_0^t g(s, X_s)\, dB'_s$$

alors les suites $\Phi^n(0)$ et $\Phi'^n n(0)$ convergent vers les solutions X et X' pour la norme définie dans le théorème 3.3.1 et ceci entraîne la convergence en loi des processus. Or il est facile de vérifier que $\Phi^n(0)$ et $\Phi'^n(0)$ ont pour tout n les mêmes lois marginales, d'où le résultat $\diamondsuit$

Sous les hypothèses du théorème 3.3.3, notons $X_{x,t}$ la solution de l'équation

$$\left\{ \begin{array}{lcl} dX_t & = & f(X_t)\,dt + g(X_t)\,dB_t \\ X_0 & = & x \in \mathbb{R}^n \end{array} \right.$$

Remarquons aussi que si $u \in \mathbb{R}^+$ le processus $B'_t = B_{t+u} - B_u$ est un mouvement brownien indépendant de la tribu $\mathcal{F}_u$ et est $\mathcal{F}_{t+u}$-adapté.

Notons alors $X^u_{H,t}$ la solution de l'EDS avec H comme condition initiale et avec le brownien B'_t, autrement dit

$$X^u_{H,t} = H + \int_0^t f(X^u_{H,s})\,ds + \int_0^t g(X^u_{H,s})\,dB'_s.$$

Proposition 3.6.2. *On a P presque sûrement*

$$X^u_{X_{x,u},t} = X_{x,t+u}$$

Preuve :
Remarquons que

$$X_{x,t+u} = X_{x,u} + \int_u^{t+u} f(X_{x,s})\,ds + \int_u^{t+u} g(X_{x,s})\,dB_s$$

d'où on tire par un changement de variable dans les intégrales

$$X_{x,t+u} = X_{x,u} + \int_0^t f(X_{x,s+u})\,ds + \int_0^t g(X_{x,s+u})\,dB'_s$$

ce qui signifie exactement que $X_{x,t+u}$ est la solution de l'équation avec $H = X_{x,u}$ $\diamondsuit$

Notons P_t l'opérateur défini par

$$P_t f(x) = \mathbb{E}\left[f(X_{x,t})\right] \quad f \text{ borélienne bornée}$$

Enonçons tout d'abord le lemme suivant qui facilitera les calculs ultérieurs.

Lemme 3.6.3. *Si pour une fonction g mesurable en $(x,\omega) \in \mathbb{R}^k \times \Omega$, on a*

$$\mathbb{E}\left[g(x,\omega)|\mathcal{B}\right] = h(x,\omega)$$

alors pour toute variable aléatoire H $\mathcal{B}$-mesurable on a

$$\mathbb{E}\left[g(H,\omega)|\mathcal{B}\right] = h(H,\omega)$$

Preuve :
Vu le théorème de la classe monotone, il suffit de montrer le résultat pour les fonctions étagées :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[g(H_n,\omega)|\mathcal{B}\right] &= \mathbb{E}\left[g\left(\sum_{k=1}^{r_n}\lambda_n^k \mathbb{1}_{A_n^k},\omega\right)|\mathcal{B}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{r_n}\mathbb{1}_{A_n^k} g\left(\lambda_n^k,\omega\right)|\mathcal{B}\right] \\
&= \sum_{k=1}^{r_n}\mathbb{1}_{A_n^k}\mathbb{E}\left[g\left(\lambda_n^k,\omega\right)|\mathcal{B}\right] \\
&= \sum_{k=1}^{r_n}\mathbb{1}_{A_n^k} h(\lambda_n^k,\omega) \\
&= h\left(\sum_{k=1}^{r_n}\mathbb{1}_{A_n^k}\lambda_n^k,\omega\right) \\
&= h(H_n,\omega) \qquad \diamondsuit
\end{aligned}$$

On peut alors montrer la proposition suivante

Proposition 3.6.4. *Pour toute $f \in C_b(\mathbb{R}^k)$, on a*

$$\mathbb{E}\left[f(X_{x,t+u})|\mathcal{F}_u\right] = P_t f(X_{x,u})$$

Preuve :
Utilisons le lemme précédent avec

$$g(x,\omega) = f(X_{x,t}^u(\omega))$$

qui est bien presque sûrement une fonction continue de x d'après les propriétés des solutions d'une EDS, et avec

$$h(x,\omega) = \mathbb{E}\left[f(X^u_{x,t})|\mathcal{F}_u\right].$$

On obtient alors d'après le lemme et la proposition 3.6.2

$$h(X_{x,u},\omega) = \mathbb{E}\left[f(X_{x,t+u})|\mathcal{F}_u\right].$$

Mais $X^u_{x,t}$ est $\sigma(B'_s, s \leq t)$-mesurable donc est indépendant de $\mathcal{F}_u$ et par suite

$$h(x,\omega) = \mathbb{E}\left[f(X^u_{x,t})|\mathcal{F}_u\right] = \mathbb{E}\left[f(X^u_{x,t})\right].$$

Remaruons alors d'après la proposition 3.6.1 que $(X^u_{x,t})_t$ et $(X_{x,t})_t$ ont même loi et donc que

$$h(x,\omega) = \mathbb{E}\left[f(X_{x,t})\right].$$

Finalement on obtient

$$\mathbb{E}\left[f(X_{x,t+u})|\mathcal{F}_u\right] = P_t f(X_{x,u})$$

ce qui donne le résultat $\diamondsuit$

Chapitre 4

Propriétés de Markov des solutions des EDS

4.1 Processus de Markov

4.1.1 Définitions et exemples

Tous les processus sont définis sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ muni de la filtration $(\mathcal{F}_t)$.

<u>Définition</u> 4.1.2. *Un processus stochastique d-dimensionnel* $\{X_t, t \geq 0\}$ *adapté à la filtration* $(\mathcal{F}_t)$ *est appelé processus de Markov si pour tout* $0 \leq s < t, B \in \mathcal{B}_d$,

$$\mathrm{P}\left(X_t \in B | \mathcal{F}_s\right) = \mathrm{P}\left(X_t \in B | X_s\right)$$

Le processus de Markov $\{X_t, t \geq 0\}$ *est dit homogène si pour tout* $x \in \mathbb{R}^d, B \in \mathcal{B}_d$, *la quantité*

$$\mathrm{P}\left(X_t \in B | X_s = x\right)$$

ne dépend de (s, t) *que par la différence* $t - s$.

Soit $\{X_t, t \geq 0\}$ un processus de Markov homogène. On lui associe le semi-groupe $\{P_t, t \geq 0\}$ d'opérateurs linéaires bornés sur $\mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)$ défini par

$$(P_t f)(x) = \mathbb{E}\left[f(X_t) | X_0 = x\right], \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}.$$

La propriété de semi-groupe $P_{t+s} = P_t \circ P_s$ résulte de la propriété de Markov de $\{X_t, t \geq 0\}$. Le semi-groupe est dit de Feller si $P_t \in \mathcal{L}(C_b(\mathbb{R}^d))$.

Le générateur infinitésimal du semi-groupe est l'opérateur linéaire (généralement non borné) $(L, D(L))$ défini par :

$$\forall f \in D(L) \subset C_b(\mathbb{R}^d), t \geq 0, \frac{d}{dt}P_t(f) = P_t L f = L P_t f.$$

Proposition 4.1.3. *Un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ à valeurs dans (E, ε) est un processus de Markov de fonction de transition $P_{s,t}$ et de mesure initiale π si et seulement si*
$\forall 0 < t_1 < \cdots < t_n, \forall f_0, f_1, \ldots, f_n$ mesurables et bornées sur (E, ε),

$$\mathbb{E}\left[f_0(X_0)\ldots f_n(X_n)\right] = \int_E f_0(x)\left(\int_E f_1(x_1)\left(\ldots \int_E f_n(x_n)P_{t_{n-1},t_n}(x_{n-1}, dx_n)\right) P_{0,t_1}(x, dx_1)\right) d\pi(x)$$

Cette proposition permet de montrer par le théorème de Kolmogorov l'existence d'un processus de Markov de fonction de transition donnée et de mesure initiale donnée.

Le lemme suivant sera utile pour prouver le caractère markovien de certains processus.

Lemme 4.1.4. *Soient X et Y deux vecteurs aléaoires de dimensions respectives d et k, $\Phi : \mathbb{R}^{d+k} \to \mathbb{R}$ une application borélienne. Soit $\mathcal{G}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$ telle que*

i) X est $\mathcal{G}$ mesurable.

ii) Y et $\mathcal{G}$ sont indépendants.

Alors on a

$$\mathbb{E}\left[\Phi(X, Y)|\mathcal{G}\right] = \mathbb{E}\left[\Phi(X, Y)|X\right]$$

Preuve :
Les deux membres de l'égalité sont égaux à

$$\int_{\mathbb{R}^k} \Phi(X, y)\mathrm{P}_Y(dy) \quad \diamondsuit$$

Proposition 4.1.5. *Un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien d-dimensionnel $\{B_t, t \geq 0\}$ est un processus de Markov homogène de semi-groupe de transition P_t donné par :*

$$P_t f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} e^{\frac{-|x-y|^2}{2t}} f(y)\, dy \ \ \forall x \in \mathbb{R}^d, \forall f \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d).$$

De plus, le générateur infinitésimal est donné par

$$(L, D(L)) = \left(\frac{1}{2}\Delta, C_b^2(\mathbb{R}^d)\right)$$

Preuve :
Pour $A \in \mathcal{B}_d, t > 0, h > 0,$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(B_{t+h} \in A | \mathcal{F}_t\right) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A(B_{t+h} - B_t + B_t) | \mathcal{F}_t\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A(B_{t+h} - B_t + B_t) | B_t\right] \text{ par le lemme précédent} \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A(B_{t+h}) | B_t\right] \end{aligned}$$

Cherchons à déterminer le semi-groupe dans le cas de la dimension un pour simplifier les calculs. Soit $u \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[e^{iu(B_t - B_s)} | \mathcal{F}_f\right] &= \mathbb{E}\left[e^{iu(B_t - B_s)}\right] \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\frac{y^2}{2(t-s)}} e^{iuy}\, dy \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\mathbb{E}\left[e^{iuB_t} | \mathcal{F}_f\right] = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\frac{y^2}{2(t-s)}} e^{iu(B_s - y)}\, dy$$

Donc si f est de la forme

$$f(x) = \lambda_1 e^{iu_1 x} + \cdots + \lambda_n e^{iu_n x}$$

on a

$$\mathbb{E}\left[f(B_t) | \mathcal{F}_s\right] = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\frac{y^2}{2(t-s)}} f(B_s - y)\, dy.$$

Cette relation s'étend ensuite à $L^2(\mathbb{R})$ par densité et à $\mathcal{B}_b(\mathbb{R})$ par le théorème de la classe monotone.

Pour le générateur infinitésimal, on utilise la formule d'Itô : pour $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$ on a

$$f(B_t) = f(B_0) + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(B_s)\, dB_s^i + \frac{1}{2} \int_0^t \Delta(f)(B_s)\, ds$$

Les intégrales stochastiques du second membre sont des martingales de carré intégrable et nulles en 0 de sorte qu'en prenant l'espérance des deux membres, on obtient :

$$\mathbb{E}\left[f(B_t)\right] = \mathbb{E}\left[f(B_0)\right] + \int_0^t \frac{1}{2} \mathbb{E}\left[\Delta f(B_s)\right]\, ds$$

d'où

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{\mathbb{E}\left[f(B_t)\right] - \mathbb{E}\left[f(B_0)\right]}{t} = \frac{1}{2} \mathbb{E}\left[\Delta f(B_0)\right]$$

car les trajectoires sont continues et Δf est borné. Donc si δ_x est la mesure initiale,

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{P_t f(x) - f(x)}{t} = \frac{1}{2}\Delta f(x)$$

et on a le résultat $\diamondsuit$

4.1.6 Propriétés de Markov

Considérons maintenant la réalisation canonique d'un processus de Markov homogène $(X_t)_t$ à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$ admettant P_t pour semi-groupe de transition. Ceci signifie que pour chaque mesure initiale ν (probabilité sur $(E, \mathcal{E})$) on a construit par le théorème de Kolmogorov (donc E doit être métrique complet à base dénombrable d'ouverts muni de sa tribu borélienne) une probabilité P_ν sur

$$(\Omega, \mathcal{F}) = \left(E^{\mathbb{R}_+}, \mathcal{E}^{\otimes \mathbb{R}_+}\right)$$

telle que les applications coordonnées X_t soient sous P_ν un processus de Markov de semi-groupe de transition P_t.

Introduisons alors les fonctions $\theta_s\colon \Omega \to \Omega$ appelées opérateurs de translation définies par la relation

$$X_t(\theta_s(\omega)) = X_{t+s}(\omega), \forall \omega \in \Omega.$$

Il est facile de vérifier que $\forall s \in \mathbb{R}_+, \theta_s : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\Omega, \mathcal{F})$ est mesurable : il suffit de remarquer que les pré-images par θ_s des sous-ensembles de Ω de la forme

$$E \times \cdots \times A_{t_1} \times E \times \cdots \times A_{t_2} \times E \times \cdots \times A_{t_n} \times E \times E \times \dots \quad , n \in \mathbb{N}, A_{t_1}, \dots, A_{t_n} \in \mathcal{E}$$

sont dans $\mathcal{F}$. Donc si F est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{F})$ alors $F \circ \theta_s$ est encore une variable aléatoire mesurable sur $(\Omega, \mathcal{F})$. On a alors :

Proposition 4.1.7. Propriété de Markov simple :
Soit (X_t) un processus de Markov homogène admettant P_t comme semi-groupe de transition. Soient $\mathcal{F}_s = \sigma(X_u; u \leq s)$ et F une fonction mesurable bornée sur $(\Omega, \mathcal{F})$, on a

$$\mathbb{E}\left[F \circ \theta_s | \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}_{X_s}\left[F\right] \;\; P_\nu \;ps \;\; \textit{pour toute mesure initiale } \nu$$

Preuve : Si F est de la forme $f(X_t)$ f mesurable bornée on a :

$$\mathbb{E}\left[F \circ \theta_s | \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[f(X_{t+s} | \mathcal{F}_s\right] = P_t f(X_s) = \mathbb{E}_{X_s}\left[f(X_t)\right].$$

Si F est de la forme $F = f_1(X_{t_1})f_2(X_{t_2})\dots f_n(X_{t_n})$ on raisonne par récurrence sur n.

En effet, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[F \circ \theta_s | \mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[f_1(X_{t_1+s})f_2(X_{t_2+s})\dots f_n(X_{t_n+s})|\mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[f_1(X_{t_1+s})\dots f_{n-1}(X_{t_{n-1}+s})\mathbb{E}\left[f_n(X_{t_n+s})|\mathcal{F}_{t_{n-1}+s}\right]|\mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[f_1(X_{t_1+s})\dots f_{n-1}(X_{t_{n-1}+s})P_{t_n-t_{n-1}}f_n(X_{t_{n-1}+s})|\mathcal{F}_s\right] \\
&\overset{HR}{=} \mathbb{E}_{X_s}\left[f_1(X_{t_1})\dots f_{n-1}(X_{t_{n-1}})P_{t_n-t_{n-1}}f_n(X_{t_{n-1}})\right] \\
&= \mathbb{E}_{X_s}\left[f_1(X_{t_1})\dots f_{n-1}(X_{t_{n-1}})\mathbb{E}\left[f_n(X_{t_n})|X_{t_{n-1}}\right]\right] \\
&= \mathbb{E}_{X_s}\left[f_1(X_{t_1})\dots f_{n-1}(X_{t_{n-1}})\mathbb{E}\left[f_n(X_{t_n})|\mathcal{F}_{t_{n-1}}\right]\right] \\
&= \mathbb{E}_{X_s}\left[\mathbb{E}\left[f_1(X_{t_1})\dots f_{n-1}(X_{t_{n-1}})f_n(X_{t_n})|\mathcal{F}_{t_{n-1}}\right]\right] \\
&= \mathbb{E}_{X_s}\left[f_1(X_{t_1})\dots f_{n-1}(X_{t_{n-1}})f_n(X_{t_n})\right]
\end{aligned}$$

et le résultat général s'obtient ensuite par le théorème de la classe monotone $\diamondsuit$

La plupart des processus de Markov usuels possède une propriété plus forte que la propriété de Markov simple. Il s'agit du fait que dans la proposition précédente on peut remplacer l'instant s par une variable aléatoire T à condition que ce soit un temps d'arrêt.

Théorème 4.1.8. Propriété de Markov forte :
Nous faisons les hypothèses suivantes :

1. *L'espace d'état $(E, \mathcal{E})$ est un espace métrique complet à base dénombrable d'ouverts muni de sa tribu borélienne.*
2. *Les opérateurs P_t sont tels que $\forall f \in C_b(E), P_t f \in C_b(E)$.*
3. *$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, (X_t)_t, (P_\mu)_\mu)$ est la réalisation canonique d'un processus de Markov à valeurs dans E et admettant P_t comme semi-groupe de transition et $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s; s \leq t)$.*
4. *$(X_t)_t$ est à trajectoires continues à droite (c'est-à-dire que l'ensemble des trajectoires non continues à droite est de μ mesure nulle pour toute loi initiale μ).*

Sous ces hypothèses, soit T un temps d'arrêt de la famille $\mathcal{G}_t$ où $\forall t \geq 0, \mathcal{G}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$, alors pour toute F $\mathcal{F}$-mesurable bornée on a :

$$\mathbb{E}\left[F \circ \theta_T \mathbb{1}_{\{T<\infty\}}|\mathcal{G}_T\right] = \mathbb{1}_{\{T<\infty\}}\mathbb{E}_{X_T}\left[F\right] \;\; P_\mu \; ps, \forall \mu$$

en particulier quelle que soit f mesurable bornée de E dans $\mathbb{R}$

$$\mathbb{E}\left[f(X_{T+t})\mathbb{1}_{\{T<\infty\}}|\mathcal{G}_T\right] = \mathbb{1}_{\{T<\infty\}}\mathbb{E}_{X_T}\left[f(X_t)\right] \;\; P_\mu \; ps, \forall \mu$$

Preuve :
Par le théorème de la classe monotone, il suffit de démontrer la propriété lorsque F est de la forme $F = f_1(X_{t_1})\dots f_n(X_{t_n})$ avec $\forall i, f_i \in C_b(E)$ et par une récurrence similaire à la proposition précédente il suffit de le prouver pour une seule fonction. On suppose donc maintenant que F est de la forme $f(X_t)$ avec $f \in C_b(E)$.

On montre le résultat lorsque T est un $\mathcal{F}_t$ temps d'arrêt étagé ne prenant qu'un ensemble dénombrable de valeurs $(c_n)_n$, suite strictement croissante de réels. En effet, on a alors

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \mathbb{1}_{\{T=c_n\}} + \infty \mathbb{1}_{\{T=\infty\}},$$

et pour tout $A \in \mathcal{G}_T, A \in \mathcal{F}_T$ car :

$$A \cap \{T = c_n\} = (A \cap \{T > c_{n-1}\}) \cap \{T = c_n\} \in \mathcal{G}_{c_{n-1}} \cap \mathcal{F}_{c_n} \subset \mathcal{F}_{c_n}$$

Ainsi on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A f(X_{t+T})\mathbb{1}_{\{T<\infty\}}\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A \sum_{n=0}^{\infty} f(X_{t+c_n})\mathbb{1}_{\{T=c_n\}}\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{A\cap\{T=c_n\}} f(X_{t+c_n})\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{A\cap\{T=c_n\}} \mathbb{E}\left[f(X_{t+c_n})|\mathcal{F}_{c_n}\right]\right] \\
&\overset{prop\,4.1.7}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{A\cap\{T=c_n\}} \mathbb{E}_{X_{c_n}}\left[f(X_t)\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{T=c_n\}} \mathbb{E}_{X_{c_n}}\left[f(X_t)\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A \mathbb{E}_{X_T}\left[f(X_t)\right]\right]
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{T<\infty\}} f(X_{t+T})|\mathcal{G}_T\right] = \mathbb{1}_{\{T<\infty\}} \mathbb{E}_{X_T}\left[f(X_t)\right]$$

pour T temps d'arrêt à valeurs dans un ensemble dénombrable.

Ensuite, on considère un $\mathcal{G}_t$ temps d'arrêt T quelconque. On pose alors $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$T_n = \begin{cases} \frac{k+1}{n} & \text{si } \; T \in \left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right[\\ +\infty & \text{si } \; T = \infty \end{cases} .$$

Comme $\left\{T_n = \frac{k}{n}\right\} = \left\{T \in \left[\frac{k-1}{n}; \frac{k}{n}\right[\right\} \in \mathcal{F}_{k/n}$, $(T_n)_n$ est une suite décroissante de $\mathcal{F}_t$ temps d'arrêt qui converge presque sûrement vers T lorsque $n \to \infty$. Soit $A \in \mathcal{G}_T$ alors $A \in \mathcal{G}_{T_n}$ car $T \leq T_n$ et en appliquant ce qui précède, on obtient :

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\{T_n<\infty\}} f(X_{t+T_n})\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\{T_n<\infty\}} \mathbb{E}_{X_{T_n}}\left[f(X_t)\right]\right] \tag{4.1}$$

On remarque que $X_{t+T_n} \to X_{t+T}$ lorsque $n \to \infty$ car T_n converge presque sûrement vers T en lui restant supérieur et (X_t) est presque sûrement à trajectoires continues à droite, puis $f(X_{t+T_n}) \to f(X_{t+T})$ en restant majoré en module par une constante car $f \in C_b(E)$.
Ensuite $\mathbb{E}_{X_{T_n}}(f(X_t)) = P_t f(X_{T_n}) \to P_t f(X_T)$ car $P_t f \in C_b(E)$ et aussi en restant majoré en module par une constante. Le théorème de convergence dominée permet alors de passer à la limite dans 4.1 pour obtenir :

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\{T<\infty\}} f(X_{t+T})\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\{T<\infty\}} \mathbb{E}_{X_T}\left[f(X_t)\right]\right]$$

qui est exactement le résultat demandé $\diamondsuit$

Remarque 4.1.9. *Dire que T est un temps d'arrêt de $\mathcal{G}_t$ signifie que*

$$\forall t \geq 0, \{T \leq t\} \in \mathcal{G}_t$$

et ceci est équivalent à dire que

$$\forall t \geq 0, \{T < t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Les temps d'arrêt de $\mathcal{F}_t$ sont des temps d'arrêt de $\mathcal{G}_t$.

Remarque 4.1.10. *Notons que les hypothèses précédentes sont vérifiées pour les processus de Markov associés à une équation différentielle stochastique à coefficients lipschitziens qui sont donc fortement markoviens.*

4.2 Générateur infinitésimal des solutions des EDS

Nous avons montré à la proposition 3.6.4 que toute solution d'une EDS de la forme

$$\begin{cases} dX_t &= f(X_t)dt + g(X_t)dB_t \\ X_0 &= H \in \mathcal{F}_0 \end{cases}$$

est un processus de Markov homogène à trajectoires continues, de semi-groupe de transition donnée par

$$P_t\varphi(x) = \mathbb{E}\left[\varphi(X_{x,t})\right].$$

Proposition 4.2.1. *Soit $\varphi \in C_b^2(\mathbb{R}^n)$. Avec les notations précédentes, on a*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \ \lim_{t \to 0} \frac{P_t\varphi(x) - \varphi(x)}{t} = A\varphi(x)$$

où l'opérateur A est elliptique donné par

$$A\varphi(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)$$

où la matrice $n \times n$ $a(x)$ est donnée par

$$a(x) = g(x)g^*(x) \quad \left(a_{ij}(x) = \sum_{k=1}^{d} g_{ik}(x) g_{jk}(x) \right)$$

et est donc semi-définie positive.

Preuve :
Comme φ est de classe C^2 on peut lui appliquer la formule d'Itô :

$$\begin{aligned} \varphi(X_t) &= \varphi(X_0) + \sum_{i=1}^{n} \int_0^t f_i(X_s) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(X_s)\, ds + \int_0^t \nabla\varphi(X_s) g(X_s)\, dB_s \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t Tr\left(\Delta\varphi(X_s) g(X_s) g^*(X_s) \right)\, ds \end{aligned}$$

Les intégrales stochastiques du second membre sont des martingales de carré intégrable du fait des hypothèses sur φ et g, et sont nulles en 0. De plus les intégrands des intégrales traditionnelles sont bornés. Si nous prenons l'espérance sous $X_0 = x$, on obtient par continuité des trajectoires que

$$\lim_{t \to 0} \frac{\mathbb{E}_x \left[\varphi(X_t) \right] - \varphi(x)}{t} = A\varphi(x),$$

ce qui est bien le résultat annoncé $\diamondsuit$

4.3 La formule de Feynman-Kac

On va maintenant donner une introduction à une formule due originalement à Feynman et Kac, qui donne une expression probabiliste des solutions de certaines équations différentielles paraboliques linéaires. Nous considérerons des équations différentielles paraboliques définies sur l'espace tout entier. Fixons un certain temps $T > 0$. Soit $c, h : [0; T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ et $\Phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ des applications continues qui sont telles qu'il existe des constantes $K, k > 0$ telles que

$$|c(t,x)| \leq K, \quad |h(t,x)| + |\Phi(x)| \leq K(1 + |x|^k), \ (t,x) \in [0;T] \times \mathbb{R}^d$$

Considérons alors l'équation différentielle parabolique suivante pour $0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}^d$

$$\text{(4.2)} \qquad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + (Lu)(t,x) + c(t,x)u(t,x) + h(t,x) = 0 \\ u(T,x) = \Phi(x) \end{cases}$$

On pose pour $0 \leq s, t \leq T$, $X_s^{t,x}$ est la solution de l'EDS partant de x à l'instant t :

$$X_s^{t,x} = x + \int_t^{t \vee s} f(r, X_r^{t,x})\, dr + \int_t^{t \vee s} g(r, X_r^{t,x})\, dB_r.$$

Pour $(t,x) \in [0;T] \times \mathbb{R}^d$ on définit alors

$$\text{(4.3)} \qquad u(t,x) = \mathbb{E}\left[\Phi(X_T^{t,x}) e^{\int_t^T c(s, X_s^{t,x})\, ds} + \int_t^T h(s, X_s^{t,x}) e^{\int_s^t c(r, X_r^{t,x})\, dr}\, ds\right]$$

Proposition 4.3.1. *Soit $u \in C^{1,2}([0;T] \times \mathbb{R}^d)$ une solution de (4.2) qui satisfait aussi la condition*

$$|(\nabla_x ug(t,x)| \leq K'(1 + |x|^{k'}), \ (t,x) \in [0;T] \times \mathbb{R}^d$$

pour des certaines constantes $k', K' > 0$. Alors $u(t,x)$ satisfait la formule de Feynman-Kac, c'est-à-dire que $u(t,x)$ est donné par (4.3).

Preuve :
Appliquons une première fois la formule d'Itô à la fonction $u(s,x)$ et au processus d'Itô $X_s^{x,t}$, on obtient

$$\begin{aligned} du(s, X_s^{x,t}) &= \frac{\partial u}{\partial s}(s, X_s^{x,t})ds + \left\langle \nabla_x u(s, X_s^{x,t}), f(s, X_s^{x,t}) \right\rangle ds + \left\langle \nabla_x u(s, X_s^{x,t}), g(s, X_s^{x,t}) dB_s \right\rangle \\ &\qquad + Lu(s, X_s^{x,t})ds \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial s} + Lu\right)(s, X_s^{x,t})ds + \left\langle \nabla_x u(s, X_s^{x,t}), g(s, X_s^{x,t}) dB_s \right\rangle \end{aligned}$$

Puis utilisons encore une fois la formule d'Itô d'intégration par partie, on a :

$$\begin{aligned}
d\left(u(s,X_s^{x,t})e^{\int_t^s c(r,X_r^{x,t})\,dr}\right) &= u(s,X_s^{x,t})d\left(e^{\int_t^s c(r,X_r^{x,t})\,dr}\right)+e^{\int_t^s c(r,X_r^{x,t})\,dr}du(s,X_s^{x,t}) \\
&\quad +\left\langle u(s,X_s^{x,t}),e^{\int_t^s c(r,X_r^{x,t})\,dr}\right\rangle_s \text{ (et ce dernier terme est nul)} \\
&= u(s,X_s^{x,t})d\left(e^{\int_t^s c(r,X_r^{x,t})\,dr}\right)+e^{\int_t^s c(r,X_r^{x,t})\,dr}du(s,X_s^{x,t}) \\
&= u(s,X_s^{x,t})c(s,X_s^{x,t})e^{\int_t^s c(r,X_r^{x,t})\,dr}ds+e^{\int_t^s c(r,X_r^{x,t})\,dr}\left(\frac{\partial u}{\partial s}+Lu\right)(s,X \\
&\quad +e^{\int_t^s c(r,X_r^{x,t})\,dr}\left\langle\nabla_x u(s,X_s^{x,t}),g(s,X_s^{x,t})dB_s\right\rangle
\end{aligned}$$

En utilisant alors (4.2) on a :

$$d\left(u(s,X_s^{x,t})e^{\int_t^s c(r,X_r^{x,t})\,dr}\right) = -h(s,X_s^{x,t})e^{\int_t^s c(r,X_r^{x,t})\,dr}+e^{\int_t^s c(r,X_r^{x,t})\,dr}\left\langle\nabla_x u(s,X_s^{x,t}),g(s,X_s^{x,t})dB\right.$$

soit en appliquant ceci entre t et T,

$$\begin{aligned}
u(t,x) &= \Phi(X_T^{x,t})e^{\int_t^T c(r,X_r^{x,t})\,dr}+\int_t^T h(s,X_s^{x,t})e^{\int_t^s c(r,X_r^{x,t})\,dr}\,ds \\
&\quad -\int_t^T e^{\int_t^s c(r,X_r^{x,t})\,dr}\left\langle\nabla_x u(s,X_s^{x,t}),g(s,X_s^{x,t})dB_s\right\rangle
\end{aligned}$$

Or, vu les hypothèses faites sur $\nabla_x u(t,x)g$ et $c(t,x)$, l'intégrale stochastique du membre de droite est une martingale de carré intégrable entre 0 et T, et est presque sûrement nulle en T donc on peut prendre l'espérance de cette intégrale et celle-ci est nulle. En utilisant de même les hypothèses de domination faites sur les fonctions en jeu et le fait que

$$\forall k'>0,\mathbb{E}\left[\sup_{t\le s\le T}|X_s^{x,t}|^{k'}\right]<\infty$$

(car la condition initiale est une constante x et donc appartient à $L^{k'}(\Omega)$!), les espérances des termes restants sont bien définies et finalement on obtient

$$u(t,x)=\mathbb{E}\left[\Phi(X_T^{x,t})e^{\int_t^T c(r,X_r^{x,t})\,dr}+\int_t^T h(s,X_s^{x,t})e^{\int_t^s c(r,X_r^{x,t})\,dr}\,ds\right]$$

ce qui est bien le résultat demandé $\diamondsuit$

Enonçons maintenant le résuktat principal de cette section :

Théorème 4.3.2. Formule de Feynman-Kac
La quantité $u(t,x)$ définie par la formule (4.3) est une fonction continue de $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$ possédant une croissance au plus polynômiale en l'infini et c'est l'unique solution de viscosité de l'EDP (4.2), parmi les fonctions u qui satisfont $\sup\limits_{0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}^d} u(t,x)e^{-A|x|} < \infty$ pour un $A > 0$.

Avant de prouver ce théorème il faut définir la notion de solution de viscosité de (4.2).

Définition 4.3.3. Solution de viscosité
• $u \in C([0;T] \times \mathbb{R}^d)$ *est appelée une sous-solution de viscosité (4.2) si*

i) $u(T,x) \leq \Phi(x), x \in \mathbb{R}^d$

ii) Pour tout $\varphi \in C^{1,2}([0;T] \times \mathbb{R}^d$, *pour tout maximum local* $(t,x) \in [0;T] \times \mathbb{R}^d$ *de la fonction* $u - \varphi$,

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,x) - L\varphi(t,x) - (cu)(t,x) - h(t,x) \leq 0.$$

• $u \in C([0;T] \times \mathbb{R}^d)$ *est appelée une sur-solution de viscosité (4.2) si*

i) $u(T,x) \geq \Phi(x), x \in \mathbb{R}^d$

ii) Pour tout $\varphi \in C^{1,2}([0;T] \times \mathbb{R}^d$, *pour tout minimum local* $(t,x) \in [0;T] \times \mathbb{R}^d$ *de la fonction* $u - \varphi$,

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,x) - L\varphi(t,x) - (cu)(t,x) - h(t,x) \geq 0.$$

• $u \in C([0;T] \times \mathbb{R}^d)$ *est appelée solution de viscosité de (4.2) si c'est à la fois une sur et sous solution de viscosité.*

Remarque 4.3.4. *Une solution classique de (4.2) est bien une solution de viscosité.*
Toute solution de viscosité de classe $C^{1,2}$ est une solution classique.

Preuve du théorème 4.3.2 :
L'unicité de la solution de viscosité peut être prouvée par les méthodes de viscosité et sera ici admise. La proposition (4.3.1) montre toutefois l'unicité pour les solutions classiques.

Ensuite, considérons u donnée par la formule (4.3). La continuité de u résulte de la continuité du processus $(X_s^{x,t})_s$ par rapport aux conditions initiales (voir proposition (3.5.1) page 84).

Comme $X_T^{x,T} = x$, on a bien $u(T,x) = \Phi(x)$. Nous alons maintenant prouver le $ii)$ de la propriété de sous-solution (la propriété de sur solution étant analogue).

Soit $\varphi \in C^{1,2}([0;T] \times \mathbb{R}^d)$ et (t,x) un maximum local de la fonction $u - \varphi$. On va supposer que $u(t,x) = \varphi(t,x)$ quitte à translater d'une constante (notre problème est invariant par translation de φ).

Raisonnons par l'absurde, on suppose que :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,x) + L\varphi(t,x) + (cu)(t,x) + h(t,x) < 0.$$

Alors il existe $0 < \delta \leq T - t$ tel que pour tous $s \in [t, t+\delta]$, $|y - x| \leq \delta$,

$$u(s,y) \leq \varphi(s,y)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(s,x) + L\varphi(s,x) + (cu)(s,x) + h(s,x) < 0.$$

Soit $\tau \triangleq \inf\{s; t < s \leq t+\delta; |X_s^{x,t} - x| > \delta\}$. Reprenant la preuve de la proposition 4.3.1, on obtient que $\forall z \in [t,T]$

$$\begin{aligned} u(t,x) &= u(z, X_z^{x,t}) e^{\int_t^z c(r,X_r^{x,t})\,dr} + \int_t^z h(r, X_r^{x,t}) e^{\int_t^r c(u,X_u^{x,t})\,du}\,ds \\ &\quad - \int_t^z e^{\int_t^r c(u,X_u^{x,t})\,du} \left\langle \nabla_x u(r, X_r^{x,t}), g(r, X_r^{x,t}) dB_r \right\rangle \end{aligned}$$

En remplaçant z par le temps d'arrêt borné τ,t par $s \wedge \tau$ où $s \in [t,T]$, puis x par $X_{s\wedge\tau}^{x,t}$ dans l'expression précédente puis en utilisant le fait que

$$X_r^{t, X_{s\wedge\tau}^{x,t}} = X_r^{x,t}, \forall r \geq s \wedge \tau$$

d'après la propriété de Markov forte du processus de diffusion $X^{x,t}$ et en prenant l'espérance du tout (l'intégrale stochastique est une martingale continu vu les hypothèses sur les fonctions mises en jeu donc celle-ci disparaît par le théorème d'arrêt), on obtient :

$$\mathbb{E}\left[u(s\wedge\tau, X_{s\wedge\tau}^{x,t})\right] = \mathbb{E}\left[u(\tau, X_\tau^{x,t}) e^{\int_{s\wedge\tau}^\tau c(r,X_r^{x,t})\,dr} + \int_{s\wedge\tau}^\tau h(r, X_r^{x,t}) e^{\int_{s\wedge\tau}^r c(u,X_u^{x,t})\,du}\,dr\right]$$

Par un raisonnement analogue on montre que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\varphi(s\wedge\tau, X_{s\wedge\tau}^{x,t})\right] &= \mathbb{E}\Bigg[\varphi(\tau, X_\tau^{x,t}) e^{\int_{s\wedge\tau}^\tau c(r,X_r^{x,t})\,dr} \\ &\quad - \int_{s\wedge\tau}^\tau \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} + L\varphi + c\varphi\right)(r, X_r^{x,t}) e^{\int_{s\wedge\tau}^r c(u,X_u^{x,t})\,du}\,dr | \mathcal{F}_s\Bigg] \end{aligned}$$

Définissons

$$\beta_s \stackrel{\triangle}{=} -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} + L\varphi + cu + h\right)(s, X_s^{x,t}), t \leq s \leq \tau$$

Il résulte des inégalités précédentes que $\beta_s > 0$ et si l'on pose $Y_s \stackrel{\triangle}{=} (\varphi - u)(s \wedge \tau, X_{s\wedge\tau}^{x,t}), \Gamma_{a,b} \stackrel{\triangle}{=} e^{\int_a^b c(u, X_u^{x,t})\, du}, t \leq a \leq b \leq t + \delta$. Nous avons

$$\mathbb{E}\left[Y_s\right] = \mathbb{E}\left[Y_\tau \Gamma_{s\wedge\tau,\tau} + \int_{s\wedge\tau}^{\tau} (\beta_s - c(r, X_r^{x,t}) Y_r) \Gamma_{s\wedge\tau,r}\, dr\right].$$

En différenciant, on obtient

$$\frac{d}{ds}\mathbb{E}\left[Y_s\right] = -\mathbb{E}\left[\beta_s \mathbb{1}_{\{s<\tau\}}\right],$$

et de là on déduit

$$Y_t = \mathbb{E}\left[Y_\tau + \int_t^\tau \beta_s\, ds\right].$$

Comme $Y_\tau \geq 0, \beta_s > 0, \tau > t$ P ps, on en déduit que $Y_t > 0$ et ceci contredit le fait que $\varphi(t,x) = u(t,x)$ d'où

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,x) + L\varphi(t,x) + (cu)(t,x) + h(t,x) \geq 0.$$

et u est une sous solution de viscosité $\diamondsuit$