

Rapport de stage de DEA
en Mathématiques Appliquées

**HOMOGENEISATION EN MILIEU PERIODIQUE ET
ALEATOIRE**

présenté par

RHODES Rémi

sous la direction de Monsieur PARDOUX

Contents

1	Résultats préliminaires	1
1.1	Le problème de Dirichlet	1
1.1.1	Existence et unicité des solutions	1
1.1.7	Régularité des solutions	6
1.1.12	Théorie P	9
1.1.16	Le cas du tore	12
1.2	Le théorème de Hille-Yosida	13
1.3	EDS dépendant d'un paramètre	16
1.4	Ergodicité et processus de Markov	20
1.4.1	Systèmes ergodiques	20
1.4.6	Systèmes canoniques et processus de Markov	22
1.5	Inégalités d'Aronson	25
1.6	Temps de sortie d'un ouvert	25
2	Homogénéisation en milieu périodique: cas elliptique	28
2.1	Introduction	28
2.2	Mesure invariante	30
2.3	Mesure invariante: 2 ^{eme} méthode	33
2.4	Le théorème ergodique	36
2.5	L'équation de Poisson	38
2.6	Homogénéisation des EDP paraboliques linéaires	40
3	Homogénéisation en milieu périodique: cas dégénéré	47
3.1	Introduction	47
3.2	Mesure invariante	48
3.3	L'équation de Poisson	50
3.4	Homogénéisation des EDP elliptiques	53
3.5	Homogénéisation des EDP paraboliques	56
4	Homogénéisation en milieu aléatoire	60
4.1	Le milieu aléatoire	60
4.2	Diffusion en milieu aléatoire	61
4.3	Ergodicité	63

4.4	Solution de l'équation de Poisson	64
4.5	Homogénéisation	68
4.6	Ajout d'un terme différentiel d'ordre un	77

Chapter 1

Résultats préliminaires

1.1 Le problème de Dirichlet

1.1.1 Existence et unicité des solutions

Tout d'abord un rappel qui sera utile par la suite:

Proposition 1.1.2. Inégalité de Poincaré

Si D est un ouvert borné de \mathbb{R}^d (ou plus généralement, si l'une des projections de D sur les axes de coordonnées est bornée) alors il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de D telle que:

$$\forall u \in H_0^1(D), \|u\|_{L^2(D)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(D)}$$

Si D est borné, on peut prendre $C = \text{diam}(D)$.

Pour une preuve de ce résultat, voir [Hirsch] ■

On énonce maintenant les propriétés d'existence et d'unicité d'une solution u à l'équation aux dérivées partielles elliptique de la forme:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} Lu &= f, \text{ où } f \in L^2(D) \\ Lu &= \sum_{1 \leq i, j \leq d} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} u \right) - cu - \sum_{i=1}^d b_i \frac{\partial}{\partial x_i} u \end{aligned}$$

Hypothèse 1.1.3. Les hypothèses sont les suivantes:

- D est un ouvert borné de \mathbb{R}^d .
- Les fonctions a_{ij} ($1 \leq i, j \leq d$), b_i ($1 \leq i \leq d$) et c sont des éléments de $L^\infty(D)$.

• On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que:

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, (a\xi, \xi) \geq \alpha|\xi|^2$$

(L'opérateur L est alors dit uniformément elliptique).

$\forall \lambda > 0$, on définit la forme bilinéaire suivante sur $H_0^1(D)$:

$$\forall u, v \in H_0^1(D), \varepsilon_\lambda(u, v) = (a\nabla u, \nabla v)_{L^2(D)} + (cu, v)_{L^2(D)} + (b.\nabla u, v)_{L^2(D)} + \lambda(u, v)_{L^2(D)}$$

Théorème 1.1.4. *Il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $\forall \lambda > \lambda_0, \forall f \in L^2(D)$, il existe un unique $u = T_\lambda(f) \in H_0^1$ tel que*

$$\forall v \in H_0^1(D), \varepsilon_\lambda(u, v) = (f, v)_{L^2(D)}$$

$\forall \lambda > \lambda_0$, l'opérateur T_λ est appelé la résolvante et est un opérateur compact de $L^2(D)$ dans $L^2(D)$.

Preuve :

En remarquant que $\forall \varepsilon > 0, \forall a, b \in \mathbb{R}$ on a

$$ab \leq \frac{1}{2\varepsilon}a^2 + \frac{\varepsilon}{2}b^2$$

et en posant $B = \max(\|a_{ij}\|_\infty, \|b_i\|_\infty, \|c\|_\infty; 1 \leq i, j \leq d)$ on obtient que:

$$\forall u \in H_0^1(D), (b.\nabla u, u)_{L^2(D)} \geq -\frac{B}{2\varepsilon} \|\nabla u\|_{L^2(D)}^2 - \frac{B\varepsilon}{2} \|u\|_{L^2(D)}^2$$

On a alors $\forall \varepsilon > 0, \forall u \in H_0^1(D)$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\lambda(u, u) &= (a\nabla u, \nabla u)_{L^2(D)} + (cu, u)_{L^2(D)} + (b.\nabla u, u)_{L^2(D)} + \lambda \|u\|_{L^2(D)}^2 \\ &\geq \alpha \|\nabla u\|_{L^2(D)}^2 - B \|u\|_{L^2(D)}^2 - \frac{B}{2\varepsilon} \|\nabla u\|_{L^2(D)}^2 - \frac{B\varepsilon}{2} \|u\|_{L^2(D)}^2 + \lambda \|u\|_{L^2(D)}^2 \\ &= \left(\alpha - \frac{B}{2\varepsilon} \right) \|\nabla u\|_{L^2(D)}^2 + \left(\lambda - B - \frac{B\varepsilon}{2} \right) \|u\|_{L^2(D)}^2 \end{aligned}$$

Il suffit alors de commencer par choisir $\varepsilon > 0$ tel que $(\alpha - \frac{B}{2\varepsilon}) > 0$ puis de choisir λ_0 tel que $\lambda - B - \frac{B\varepsilon}{2} = 0$. La forme bilinéaire ε_λ est alors coercive $\forall \lambda > \lambda_0$. Comme elle est clairement continue, et que $\forall f \in L^2(\Omega)$ l'application $\varphi_f : H_0^1(D) \rightarrow H_0^1(D)$ est linéaire continue, on

$$v \mapsto (f, v)_{L^2(D)}$$

applique le théorème de Lax-Milgram. (Dans le cas $\lambda = \lambda_0$, la forme bilinéaire est aussi coercive grâce à l'inégalité de Poincaré (voir 1.1.2)).

On a alors $\forall f \in L^2(D), \forall v \in H_0^1(D), \forall \lambda \geq \lambda_0, \varepsilon_\lambda(T_\lambda(f), v) = (f, v)$. On en déduit

$$\begin{aligned} m\|T_\lambda(f)\|_{H_0^1(D)}^2 &\leq \varepsilon_\lambda(T_\lambda(f), T_\lambda(f)) = (f, T_\lambda(f))_{L^2(D)} \leq \|f\|_{L^2(D)}\|T_\lambda(f)\|_{L^2(D)} \\ &\leq C\|f\|_{L^2(D)}\|T_\lambda(f)\|_{H_0^1(D)} \end{aligned}$$

d'où

$$\forall \lambda \geq \lambda_0, \forall f \in L^2(D), \|T_\lambda(f)\|_{H_0^1(D)} \leq \frac{C}{m}\|f\|_{L^2(D)}$$

et $T_\lambda : L^2(D) \rightarrow H_0^1(D)$ est continu, puis comme l'injection canonique de $H_0^1(D) \rightarrow L^2(D)$ est compacte (théorème de Rellich-Kondrachov en supposant que le bord est régulier, voir [Brezis]) on en déduit la compacité de l'opérateur $T_\lambda : L^2(D) \rightarrow L^2(D)$ ■

REMARQUE: Si dans le théorème précédent on a: $b = 0$ et si par exemple on a: $c \leq 0$ alors $\lambda_0 = 0$ convient.

On remarque que $u \in H_0^1(D)$ est solution de (1.1) si et seulement si

$$\forall v \in H_0^1(D), \varepsilon_0(u, v) = (-f, v)_{L^2(D)}.$$

Pour $f \in L^2(D)$, on note E_f l'espace des solutions de (1.1).

Théorème 1.1.5. $\forall f \in L^2(D)$, E_f est un sous-espace affine de $H_0^1(D)$ de dimension finie.

De plus, $\forall f \in L^2(D)$, il existe une unique solution dans $H_0^1(D)$ au problème (1.1) si et seulement si $E_0 = \{0\}$.

Preuve : (voir également [Brezis],[Gilbarg & Trudinger] ou [Friedman2])

Pour vérifier la première assertion, il suffit bien sûr de montrer que E_0 est de dimension finie, et ceci se fait en utilisant la compacité de T_{λ_0} .

En effet, on a

$$\begin{aligned} u \in E_0 &\Leftrightarrow \forall v \in H_0^1(D), \varepsilon_0(u, v) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall v \in H_0^1(D), \varepsilon_{\lambda_0}(u, v) = \lambda_0(u, v) = \lambda_0 \varepsilon_{\lambda_0}(T_{\lambda_0}(u), v) \\ &\Leftrightarrow \forall v \in H_0^1(D), \varepsilon_{\lambda_0}(u - \lambda_0 T_{\lambda_0}(u), v) = 0 \\ &\Leftrightarrow T_{\lambda_0}(u) = \frac{1}{\lambda_0}u \\ &\Leftrightarrow u \in \text{Ker}(T_{\lambda_0} - \lambda_0^{-1}\text{Id}) \end{aligned}$$

Or T_{λ_0} étant compact, $\text{Ker}(T - \lambda_0^{-1}\text{Id})$ est de dimension finie.

On a la deuxième affirmation car $T = T_{\lambda_0}$ est compact d'où:

$$\begin{aligned} E_0 = \{0\} &\Leftrightarrow \text{Ker}(T - \lambda_0^{-1}\text{Id}) = \{0\} \\ &\Leftrightarrow T - \lambda_0^{-1}\text{Id} \text{ est injectif} \\ &\Leftrightarrow T - \lambda_0^{-1}\text{Id} \text{ est bijectif} \end{aligned}$$

Donc ceci équivaut encore à : $\forall f \in L^2(D)$, il existe un unique $u \in H_0^1(D)$ tel que $T(u) - \lambda_0^{-1}u = T(f)$, expression encore équivalente à : $\forall f \in L^2(D)$, $\exists! u \in H_0^1(D)$, $Lu = f$ ■

On donne pour finir cette section le principe du maximum pour un opérateur elliptique d'ordre 2 de la forme

$$(1.2) \quad Lu = \sum_{1 \leq i, j \leq d} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^d b_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

$$\exists \alpha > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^d, (a\xi, \xi) \geq \alpha |\xi|^2$$

où les coefficients de L sont supposés bornés. Celui-ci sert à montrer, avec les notations du théorème précédent, que $E_0 = \{0\}$.

Théorème 1.1.6. Principe du maximum faible

On suppose que D est un ouvert borné de \mathbb{R}^d . Soit $u \in H^1(D)$ tel que $Lu = 0$ (ie Lu est la distribution nulle) alors pour presque tout $x \in D$:

$$\inf_{\partial D} u^- \leq u(x) \leq \sup_{\partial D} u^+$$

où $\sup_{\partial D} u = \inf \{l \in \mathbb{R}; (u - l)^+ \in H_0^1(D)\}$.

Preuve :

On rappelle tout d'abord que $H^1(D)$ est un espace réticulé et que si $u \in H^1(D)$ alors

$$\forall i = 1, \dots, d, D_i u^+ = \mathbb{1}_{\{u > 0\}} D_i u.$$

Soit $u \in H^1(D)$ tel que $Lu \geq 0$ (ie la distribution est une forme linéaire positive). Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe k tel que $\sup_{\partial D} u^+ \leq k < \sup_{\Omega} u$ et posons $v = (u - k)^+$.

On a $\nabla v = \nabla(u - k) \mathbb{1}_{\{u - k > 0\}} = \nabla u \mathbb{1}_{\{u > k\}}$. On a alors (M est une borne essentielle pour les coefficients de b)

$$\sum_{i,j=1,d} \int_D a_{ij} D_j v D_i u \, dx \leq M \int_D v |Dv| \, dx,$$

et par l'ellipticité de L on a

$$\alpha \|Dv\|_2^2 \leq M \|v\|_2 \|Dv\|_2$$

de telle sorte que

$$\|Dv\|_2 \leq \frac{M}{\alpha} \|v\|_2.$$

En utilisant les inégalités de Sobolev (le bord est supposé assez régulier) pour $d \geq 3$, on obtient

$$\|v\|_{2d/(d-2)} \leq C \|v\|_2 \stackrel{Holder}{\leq} C |\text{Supp}(v)|^{1/n} \|v\|_{2d/(d-2)}$$

où $C = C(d, M, \alpha)$, donc

$$|\text{Supp}(v)| \geq C^{-n}.$$

Dans le cas $d \leq 2$, une inégalité de la même forme avec $C = C(d, M, \alpha, |D|)$ résulte des inégalités de Sobolev en remplaçant $2d/(d-2)$ par n'importe quel nombre plus grand que 2.

Comme ces inégalités sont indépendantes de k , elles restent vérifiées lorsque k tend vers $\sup_D u$. Ainsi, la fonction u atteint son suprémum sur un ensemble de mesure strictement positive et est bornée (sinon $u = \infty$ sur un ensemble de mesure non nulle).

Fixons $k = l \triangleq \sup_{\partial D} u^+$ et posons $V = \sup_D v = \sup_{\Omega}(u - l) > 0$. Comme $Lu \geq 0$, en posant

$$\bar{v} = \frac{v}{V + \varepsilon - v}$$

on a pour $\varepsilon > 0$:

$$(a\nabla u, \nabla \bar{v}) = (b\nabla u, \bar{v})$$

d'où

$$\sum_{i,j=1}^d \int_D a_{ij} D_i u D_j \bar{v} \leq M \sum_{i=1}^d \int_D \bar{v} |D u| dx$$

soit

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^d \int_D a_{ij} \frac{D_i v D_j v}{(V + \varepsilon - v)^2} dx &\leq M \int_D \frac{v}{V + \varepsilon - v} |D u| dx \\ &= M \int_D \frac{v}{V + \varepsilon - v} |D v| \mathbb{1}_{\{u > l\}} dx + M \int_D \frac{v}{V + \varepsilon - v} |D u| \mathbb{1}_{\{u \leq l\}} dx \\ &\leq M \int_D \frac{v}{V + \varepsilon - v} |D v| dx \\ &\leq MV \int_D \frac{|D v|}{V + \varepsilon - v} dx. \end{aligned}$$

Posons

$$w_\varepsilon = \ln \frac{V + \varepsilon}{V + \varepsilon - v} \in H_0^1(D).$$

En utilisant l'inégalité précédente et l'ellipticité

$$\alpha \int_D |D w_\varepsilon|^2 dx \leq MV \int_D |D w_\varepsilon| dx$$

ainsi

$$\|D w_\varepsilon\|_2 \leq \frac{MV}{\alpha} |D|^{1/2}.$$

Comme D est borné, on en déduit

$$\|w_\varepsilon\|_2 \leq C$$

où $C = C(d, M, V, \alpha, |D|)$ et en faisant tendre ε vers 0, il en découle que la fonction w_0 est intégrable sur D . Mais alors v ne peut être égal à V que sur un ensemble de mesure nulle, ce qui est en contradiction avec les conclusions précédentes ■

1.1.7 Régularité des solutions

Plaçons nous dans un contexte un peu plus général que la section précédente. Les hypothèses sont les suivantes. On considère l'équation

$$(1.3) \quad Lu = f, f \in L^2(D)$$

où D est un ouvert de \mathbb{R}^d , $u \in W^{1,2}(D)$ et L est un opérateur du second ordre de la forme suivante:

$$Lu = D_i(a_{ij}D_ju + b_iu) + c_iD_iu + du$$

avec L uniformément elliptique sur D ($\forall x \in \mathbb{R}^d, \sum a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2, \forall \xi \in \mathbb{R}^d$), les coefficients $a_{ij}, b_i, c_i, d, i, j = 1, \dots, d$ sont uniformément lipschitziens sur D et il existe $\Lambda, \nu \geq 0$ tels que $\forall x \in D$

$$\sum |a_{ij}(x)|^2 \leq \Lambda^2, \quad \lambda^{-2} \sum (|b_i(x)|^2 + |c_i(x)|^2) + \lambda^{-1}|d(x)| \leq \nu^2.$$

Les coefficients $c_i, d, i = 1, \dots, d$ sont donc en particulier essentiellement bornés sur D .

Dans le domaine des équations aux dérivées partielles, la différentiabilité faible ou classique des fonctions considérées peut souvent être déduite de considérations portant sur le quotient de différence. Plus précisément, soit u une fonction définie sur D et e_i le vecteur coordonnée unitaire dans la direction x_i . On définit le quotient différence dans la direction e_i par:

$$(1.4) \quad \Delta_i^h u(x) = \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h}, h \neq 0.$$

Nous aurons besoin des deux lemmes suivants portant sur le quotient différence de fonctions appartenant à certains espaces de Sobolev.

Lemme 1.1.8. *Soit $u \in W^{1,p}(D)$. Alors $\Delta_i^h u \in L^p(D')$ pour tout $D' \subseteq D$ satisfaisant $h < \text{dist}(D', \partial D)$, et nous avons*

$$(1.5) \quad \|\Delta_i^h u\|_{L^p(D')} \leq \|D_i u\|_{L^p(D)}.$$

Preuve :

Supposons tout d'abord que $u \in C^1(D) \cap W^{1,p}(D)$. Alors

$$\begin{aligned} \Delta_i^h u(x) &= \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h} \\ &= \frac{1}{h} \int_0^h D_i u(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \xi, x_{i+1}, \dots, x_n) d\xi \end{aligned}$$

et d'après l'inégalité de Hölder

$$|\Delta_i^h u(x)|^p \leq \frac{1}{h} \int_0^h |D_i u(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \xi, x_{i+1}, \dots, x_n)|^p d\xi,$$

et ainsi

$$\int_{D'} |\Delta_i^h u(x)|^p dx \leq \frac{1}{h} \int_0^h \int_{D'} |D_i u|^p dx d\xi \leq \int_D |D_i u|^p dx$$

On en déduit le cas général pour les fonctions de $W^{1,p}(D)$ avec des arguments de densité ■

Lemme 1.1.9. Soit $u \in L^p(D)$, $1 < p < \infty$ et supposons qu'il existe une constante K telle que $\Delta_i^h u \in L^p(D')$ et $\|\Delta_i^h u\|_{L^p(D')} \leq K$ pour tout $h > 0$ et $D' \subseteq D$ satisfaisant $h < \text{dist}(D', \partial D)$. Alors $D_i u$ satisfait $\|D_i u\|_{L^p(D)} \leq K$.

Preuve :

Par la faible compacité des sous-ensembles bornés de $L^p(D')$, il existe une suite $(h_m)_m$ tendant vers 0 et une fonction $v \in L^p(D)$ telle que $\|v\|_p \leq K$ et $\forall \varphi \in C_0^1(D)$

$$\int_D \varphi \Delta_i^{h_m} u \, dx \rightarrow \int_D \varphi v \, dx.$$

Alors pour $h_m < \text{dist}(\text{supp}(\varphi), \partial D)$, on a

$$\int_D \varphi \Delta_i^{h_m} u \, dx = - \int_D u \Delta_i^{h_m} \varphi \, dx \rightarrow - \int_D u D_i \varphi \, dx.$$

Ainsi

$$\int_D \varphi v \, dx = - \int_D u D_i \varphi \, dx$$

et ainsi $v = D_i u$ ■

Nous pouvons maintenant démontrer le

Théorème 1.1.10. Soit $u \in W^{1,2}(D)$ une solution de l'équation $Lu = f$ dans D où $f \in L^2(D)$. Alors pour tout domaine $D' \subseteq D$ tel que $d' = \text{dist}(D', \partial D) > 0$, nous avons $u \in W^{2,2}(D')$ et

$$\|u\|_{W^{2,2}(D')} \leq C(\|u\|_{W^{1,2}(D)} + \|f\|_{L^2(D)})$$

pour une constante $C = C(d, \lambda, K, d')$ où

$$K = \max \left\{ \|a_{ij}, b_i\|_{C^{0,1}(\bar{D})}, \|c_i, d\|_{L^\infty(D)} \right\} \text{ et } d' = \text{dist}(D', \partial D).$$

De plus u satisfait l'équation

$$Lu = \sum_{i,j} a_{ij} D_{ij} u + \sum_{i,j} (D_j a_{ji} + b_i + c_i) D_i u + \sum_i (D_i b_i + d) u = f$$

presque partout sur D .

Preuve :

Par la suite, on utilise la convention de sommation suivant les indices répétés. Nous avons l'identité intégrale suivante:

$$(1.6) \quad \int_D a_{ij} D_j u D_i v \, dx = \int_D g v \, dx, \forall v \in C_c^1(D)$$

où $g = (b_i + c_i)D_i u + (D_i b_i + d)u - f \in L^2(D)$.

Pour $|2h| < \text{dist}(\text{supp}(v), \partial D)$, remplaçons v par son quotient de différence $\Delta_k^{-h}v$ pour un $k, 1 \leq k \leq d$. On obtient alors

$$\begin{aligned} \int_D \Delta_k^h(a_{ij}D_j u)D_i v \, dx &= - \int_D a_{ij}D_j u D_i \Delta_k^{-h}v \, dx \\ &= - \int_D g \Delta_k^{-h}v \, dx. \end{aligned}$$

Comme

$$\Delta_k^h(a_{ij}D_j u)(x) = a_{ij}(x + he_k)\Delta_k^h D_j u(x) + \Delta_k^h a_{ij}(x)D_j u(x)$$

on a alors

$$\int_D a_{ij}(x + he_k)D_j \Delta_k^h u D_i v \, dx = - \int_D (\bar{g} \cdot Dv + g \Delta_k^{-h}v) \, dx$$

où $\bar{g} = (\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_d)$ et $\bar{g}_i = \Delta_k^h a_{ij}D_j u$. En utilisant (1.6) et le lemme 1.1.8, on obtient

$$\begin{aligned} \int_D a_{ij}(x + he_k)D_j \Delta_k^h u D_i v \, dx &\leq (\|\bar{g}\|_2 + \|g\|_2)\|Dv\|_2 \\ &\leq (C(d)K\|u\|_{W^{1,2}(D)} + \|f\|_2)\|Dv\|_2. \end{aligned}$$

Prenons maintenant une fonction $\eta \in C_c^1(D)$ satisfaisant $0 \leq \eta \leq 1$, et posons $v = \eta^2 \Delta_k^h u$. On obtient en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \lambda \int_D |\eta D \Delta_k^h u|^2 \, dx &\leq \int_D \eta^2 a_{ij}(x + he_k)\Delta_k^h D_i u \Delta_k^h D_j u \, dx \\ &= \int_D a_{ij}(x + he_k)D_j \Delta_k^h u (D_i v - 2\Delta_k^h u \eta D_i \eta) \, dx \\ &\leq (C(d)K\|u\|_{W^{1,2}(D)} + \|f\|_2)(\|\eta D \Delta_k^h u\|_2 + 2\|\Delta_k^h u D \eta\|_2) \\ &\quad + C(d)K\|\eta D \Delta_k^h u\|_2 \|\Delta_k^h u D \eta\|_2 \end{aligned}$$

A l'aide des inégalités de convexité, on a alors

$$\begin{aligned} \|\eta D \Delta_k^h u\|_2 &\leq C(\|u\|_{W^{1,2}(D)} + \|f\|_2 + \|\Delta_k^h u D \eta\|_2) \\ &\leq C(1 + \sup_D |D \eta|)(\|u\|_{W^{1,2}(D)} + \|f\|_2) \end{aligned}$$

à l'aide du lemme 1.1.8, où $C = C(d, \lambda, K)$. La fonction η peut maintenant être choisie de telle sorte $\eta = 1$ sur D' et $|D \eta| \leq 2/d'$ où $d' = \text{dist}(D', \partial D)$. Avec le lemme 1.1.9 on obtient $Du \in W^{1,2}(D')$ pour tout $D' \subseteq D$ tel que $d' = \text{dist}(D', \partial D) > 0$ donc $u \in W^{2,2}(D')$. Finalement $Lu \in L_{loc}^2$ et $Lu = f$ presque partout sur D ■

On a aussi le résultat de régularité suivant concernant les espaces de Hölder. La démonstration de ce résultat se trouve dans [Gilbarg & Trudinger] page 192 théorème 8.24.

Théorème 1.1.11. *Supposons que l'opérateur L satisfait les hypothèses précédentes et que la fonction $g \in L^{q/2}(D)$ pour un $q > n$. Alors si $u \in W^{1,2}(D)$ satisfait l'équation $Lu = g$ sur D , on a, pour tout ouvert $D' \subseteq D$ tel que $d' = \text{dist}(D', \partial D) > 0$, l'estimation:*

$$\|u\|_{C^\alpha(\overline{D}')} \leq C(\|u\|_{L^2(D)} + k)$$

où $C = C(d, \Lambda/\lambda, \nu, q, d')$, $\alpha = \alpha(d, \Lambda/\lambda, \nu d') > 0$ et $k = \lambda^{-1}\|g\|_{q/2}$.

1.1.12 Théorie P

Soit D un ouvert borné de \mathbb{R}^d . On s'intéresse maintenant à l'existence et à l'unicité d'une solution $u \in W_0^{1,p}(D)$ à l'équation $B(u, \varphi) = F(\varphi)$, $\forall \varphi \in W_0^{1,q}(D)$ où B est une forme de Dirichlet uniformément elliptique de la forme

$$B(\varphi, \psi) = \sum_{\substack{|\alpha| \leq 1 \\ |\beta| \leq 1}} (a_{\alpha\beta} D^\alpha \varphi, D^\beta \psi),$$

dont les coefficients appartiennent à $L^\infty(D)$ et ceux d'ordre maximal sont uniformément continus.

La théorie L^2 repose essentiellement sur le fait que les espaces considérés sont des espaces de Hilbert et l'on dispose donc d'une représentation des formes linéaires par le théorème de représentation de Riesz.

L'idée pour la théorie L^p est alors de suivre le raisonnement précédant en donnant tout d'abord une représentation du dual de $W_0^{1,p}(D)$ puis de généraliser le théorème de Lax-Milgram.

Les démonstrations de certains résultats ne sont pas données mais se trouvent dans [Simader].

Dans toute cette section, on notera $(\varphi, \psi)_0 = \int \varphi(x)\psi(x) dx$.

Théorème 1.1.13 (Théorème de représentation). *Soient $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$ des nombres réels tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, et $m \geq 1$ un entier. Supposons que ∂D est de classe C^m .*

Alors pour chaque $g \in W_0^{m,p}$, on pose

$$\forall f \in W_0^{m,q}, F_g(f) = \sum_{|\alpha|=m} (D^\alpha g, D^\alpha f) \triangleq (f, g)_m.$$

On définit ainsi une forme linéaire continue sur $W_0^{m,q}$. Réciproquement, pour chaque forme linéaire F sur $W_0^{m,q}$, il existe un unique $g \in W_0^{m,p}$ tel que

$$\forall f \in W_0^{m,q}, F(f) = (g, f)_m.$$

De plus, il existe une constante $K = K(n, m, p, \Omega)$ telle que:

$$K\|g\|_{W_0^{m,p}} \leq \|F\|_{(W_0^{m,q})^*} \leq \|g\|_{W_0^{m,p}}.$$

g est appelé l'élément générateur de F .

On s'intéresse maintenant à une généralisation du théorème de Lax-Milgram.

Théorème 1.1.14. Soient $1 < p < \infty, 1 < q < \infty$ des nombres réels tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On suppose ∂D de classe C^1 . Soit B une forme bilinéaire continue sur $W_0^{1,p}(D) \times W_0^{1,q}(D)$.

Alors il existe deux opérateurs linéaires continus $T_r : W_0^{1,r}(D) \rightarrow W_0^{1,r}(D)$ ($r = p$ ou q) tels que:

$$B(u, v) = (T_p u, v) = (u, T_q v)_m$$

pour tout $(u, v) \in W_0^{1,p}(D) \times W_0^{1,q}(D)$. De plus, on a

$$\|T_r\|_{W_0^{1,r} \rightarrow W_0^{1,r}} \leq \frac{C}{K}$$

où K est la constante du théorème précédent et C est la constante apparaissant dans la définition de la continuité de B .

Si de plus, il existe deux constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ telles que:

$$(1.7) \quad \forall u \in W_0^{1,p}(D), \quad C_1 \|u\|_{W_0^{1,p}} \leq \sup_{\varphi \in S_q} |B(u, \varphi)|$$

et

$$(1.8) \quad \forall v \in W_0^{1,q}(D), \quad C_2 \|v\|_{W_0^{1,q}} \leq \sup_{\psi \in S_p} |B(\psi, v)|,$$

où S_r désigne la boule unité de $W_0^{1,r}(D)$, alors les opérateurs T_r sont des isomorphismes topologiques de $W_0^{1,r}(D)$. Plus précisément, pour chaque $F \in (W_0^{1,q})^*$ (resp $G \in (W_0^{1,p})^*$), il existe un unique $u \in W_0^{1,p}(D)$ (resp $v \in W_0^{1,q}(D)$) tel que

$$\forall \varphi \in W_0^{1,q}(D), \quad B(u, \varphi) = F(\varphi)$$

$$(\forall \psi \in W_0^{1,p}(D), \quad B(\psi, v) = G(\psi))$$

avec $\|u\|_{W_0^{1,p}} \leq \frac{1}{KC_1} \|F\|_{(W_0^{1,q})^*}$ (resp $\|v\|_{W_0^{1,q}} \leq \frac{1}{KC_2} \|G\|_{(W_0^{1,p})^*}$).

Preuve :

La première partie du théorème résulte du théorème de représentation. Passons à la seconde partie. Il est facile de voir que les opérateurs T_r sont à image fermée (vu (1.7)). Supposons par exemple que $T_p(W_0^{1,p}) \not\subseteq W_0^{1,p}$. Alors il existe une forme linéaire F sur $W_0^{1,p}$ non nulle, s'annulant sur $T_p(W_0^{1,p})$. D'après le théorème de représentation, il existe $w \in W_0^{1,q}(D) \setminus \{0\}$ tel que $F = F_w$. Alors $\forall \varphi \in W_0^{1,p}(D)$, on a

$$\begin{aligned} 0 &= F(T_p(\varphi)) \\ &= (T_p \varphi, w)_m \\ &= B(\varphi, w) \end{aligned}$$

Or, d'après (1.7), ceci entraîne $w = 0$, ce qui est une contradiction ■

On suppose maintenant que D est un ouvert borné de \mathbb{R}^d et que

$$B(\varphi, \psi) = \sum_{\substack{i=1,d \\ j=1,d}} \int_D a_{ij}(x) D_i \varphi(x) D_j \psi(x) dx + \sum_{i=1}^d \int_D b_i(x) D_i \varphi(x) \psi(x) dx,$$

est une forme de Dirichlet elliptique, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \sum_{i,j=1,d} a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2$$

et que les coefficients $a_{ij} \in L^\infty(D)$ et sont lipschitziens sur \bar{D} . Il est alors clair que B définit une forme linéaire continue sur $W_0^{1,p}(D) \times W_0^{1,q}(D)$ (les coefficients sont bornés).

La démarche à suivre est alors similaire à la méthode L^2 . On montre (voir [Simader]) qu'il existe $\lambda_0 \geq 0$ tel que $\forall \lambda \geq \lambda_0$, la forme bilinéaire définie par

$$B_\lambda(u, v) = B(u, v) + \lambda(u, v)_0, \quad \forall (u, v) \in W_0^{1,p}(D) \times W_0^{1,q}(D)$$

vérifie les hypothèses du théorème 1.1.14. Appliquant alors l'alternative de Fredholm, on montre que l'équation ($F \in (W_0^{1,q}(D))^*$)

$$B(u, \varphi) = F(\varphi), \quad \forall \varphi \in W_0^{1,q}(D)$$

a une solution $u \in W_0^{1,p}(D)$ si et seulement si $F(\psi) = 0$ pour tout $\psi \in N$, où

$$N = \{ \psi \in W_0^{1,q}(D); B(\varphi, \psi) = 0, \forall \varphi \in W_0^{1,p}(D) \}.$$

Si de plus, $\dim(N) = 0$ alors cette solution est unique.

Pour déterminer l'allure de N , on voudrait appliquer le principe du maximum, qui n'a été démontré que pour les fonctions $u \in W^{1,2}$. Or, on a

Théorème 1.1.15. *Sous les hypothèses précédentes, soient $1 < q < \infty$ et $u \in W_0^{1,q}(D)$ tels que*

$$B(\varphi, u) = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(D)$$

Alors $u \in W_0^{1,q'}(D)$ pour tout q' tel que $1 < q' < \infty$.

Preuve :

Soit λ_0 le réel défini dans les lignes ci-dessus. On a

$$B_{\lambda_0}(\varphi, u) = \lambda_0(\varphi, u)_0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(D)$$

et soit

$$F(\varphi) = \lambda_0(\varphi, u)_0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(D).$$

Comme $u \in W_0^{1,q}(D)$, par le théorème de Sobolev-Kondrashov, $u \in L^{q_1}(D)$ pour q_1 arbitraire si $q \geq d$ et $q_1 = \frac{qd}{d-q}$ si $q < d$. Soit $1 < p_1 < \infty$ tel que $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = 1$. Alors $\lambda_0 u \in L^{p_1}(D)$ donc $F \in (W_0^{1,q_1})^*$. Donc il existe un unique $v \in W_0^{1,q_1}(D)$ tel que $B_{\lambda_0}(\varphi, v) = F(\varphi)$ pour tout $\varphi \in W_0^{1,p_1}(D)$. Comme $q_1 \geq q$, $v \in W_0^{1,q}(D)$ et $B_{\lambda_0}(\varphi, u - v) = 0$ pour tout $\varphi \in C_0^\infty(D)$, ce qui donne $u = v \in W_0^{m,q_1}(D)$.

Dans le cas $q \geq d$, le théorème est démontré car $q_1 \geq q$ peut être choisi arbitraire. Dans le cas $q < d$, si nous répétons l'argument précédent, on obtient $u \in W_0^{1,q_2}(D)$ où q_2 est arbitraire si $q_1 \geq d$ et $q_2 = \frac{dq_1}{d-q_1} = \frac{dq}{d-2q}$. Soit k entier tel que $(k-1)q < d$ et $kq \geq d$. Après k étapes, on se retrouve donc dans le cas $q_k \geq d$ et le théorème est démontré ■

Soit alors $u \in N$, le théorème précédent assure alors que $u \in W_0^{1,2}(D)$ et avec le principe du maximum faible, u est nulle. Ainsi $\forall f \in L^p(D)$, il existe une unique solution $u \in W_0^{1,p}(D)$ à l'équation

$$B(u, \varphi) = (f, \varphi)_0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(D)$$

D'autre part, une généralisation immédiate du théorème 1.1.10 au cas L^p montre que $u \in W_{loc}^{2,p}$.

1.1.16 Le cas du tore

Soit $f \in L^p(\mathbb{T}^d)$. On veut résoudre le problème

$$Lu = f$$

sur le tore où

$$Lu = \sum_{i,j} D_j(a_{ij}D_i u) + \sum_i b_i D_i u.$$

Le raisonnement fait précédemment peut d'adapter au cas du tore jusqu'à l'alternative de Fredholm. En effet, le principe du maximum ne donne plus: $Lu = 0 \Rightarrow u = 0$. Par contre, en utilisant la compacité du tore et ce même principe du maximum, on montre que les seules fonctions vérifiant $Lu = 0$ sont les constantes. Comme

$$\text{Dim}(\text{Ker } L^*) = \text{Dim}(\text{Ker } L) = 1$$

et que

$$\text{Im}(L) = (\text{Ker } L^*)^\perp$$

on en déduit qu'il existe $m \in W^{1,q}(\mathbb{T}^d)$ non nulle telle que l'équation

$$Lu = f$$

admette une solution si et seulement si

$$\int_{\mathbb{T}^d} f(x)m(x) dx = 0.$$

Dans ce cas cette solution est unique à une constante additive près.

En ce qui concerne les dérivées secondes dans le cas du tore, on obtient un résultat un peu plus fort que sur un ouvert borné de \mathbb{R}^d . En effet, comme \mathbb{T}^d est une C^∞ variété réelle de dimension d compacte, $\forall x \in \mathbb{T}^d$, il existe une carte locale (U_x, ψ_x) et un ouvert $U'_x \subset U_x$ tels que $x \in U'_x$ et $d(\psi_x(U'_x), \partial\psi_x(U_x)) > 0$. Comme

$$\mathbb{T}^d = \bigcup_{x \in \mathbb{T}^d} U'_x$$

et que le tore est compact, on peut en extraire un sous-recouvrement fini du tore que l'on note $\{x_1, \dots, x_N\}$. On applique alors les résultats de la section précédente et on obtient que si $u \in W^{1,p}(\mathbb{T}^d)$ vérifie $Lu = f$ alors $\forall i = 1, \dots, N$, $u|_{U'_{x_i}} \in W^{2,p}(U'_{x_i})$. Comme

$$\mathbb{T}^d \subset \bigcup_{i=1}^N U'_{x_i}$$

le résultat est démontré.

Supposons maintenant que $f \in \bigcap_{p>1} L^p(\mathbb{T}^d)$. Il est facile de vérifier que les fonctions m_p définies ci-dessus sont en fait identiques et définissent une seule et même fonction m . Supposons donc que

$$\int_{\mathbb{T}^d} f(x)m(x) dx = 0.$$

Il faut alors combiner les résultats obtenus pour chaque p et en remarquer que les solutions du problème

$$(W_p) \quad \text{Il existe } u_p \in W^{1,p}(\mathbb{T}^d) \text{ tel que } B(u_p, \varphi) = (f, \varphi), \quad \forall \varphi \in W^{1,q}(\mathbb{T}^d)$$

sont identiques (B est la forme bilinéaire associée à L). Notons u la solution commune. Alors

$$u \in \bigcap_{p>1} W^{2,p}(\mathbb{T}^d).$$

Ceci nous permettra d'appliquer la formule de Krylov à des fonctions qui sont les solutions de ce type de problème.

1.2 Le théorème de Hille-Yosida

On procède juste ici à quelques rappels. On peut trouver les démonstrations de tout ce qui va suivre dans [Brezis].

Dans tout ce qui suit, H désigne un espace de Hilbert. Si A est un opérateur non-borné, on désigne par $D(A)$ son domaine de définition.

Définition 1.2.1. Opérateurs monotones

Soit $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur linéaire non-borné.

On dit que A est **monotone** si

$$(Av, v) \geq 0, \forall v \in D(A).$$

On dit que A est **maximal monotone** si de plus $\text{Im}(I + A) = H$ ie

$$\forall f \in H, \exists v \in D(A), v + Av = f.$$

On a alors le théorème important suivant:

Théorème 1.2.2. Hille-Yosida

Soit A un opérateur maximal monotone dans un espace de Hilbert H . Alors pour tout $u_0 \in D(A)$, il existe une fonction

$$u \in C^1([0, +\infty[; H) \cap C([0, +\infty[; D(A))$$

unique telle que

$$(1.9) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0 \text{ sur } [0, +\infty[\\ u(0) = u_0 \text{ (donnée initiale).} \end{cases}$$

De plus on a

$$|u(t)| \leq |u_0| \text{ et } \left| \frac{du}{dt}(t) \right| = |Au(t)| \leq |Au_0|, \forall t \geq 0$$

REMARQUE: (semi-groupes de contraction)

Soit $t \geq 0$, on considère l'opérateur linéaire

$$\begin{array}{ccc} S_A(t) : D(A) & \rightarrow & D(A) \\ u_0 & \mapsto & u(t) \end{array}$$

où $u(t)$ est la solution donnée par le théorème précédent. Etant donné que $|S_A(t)u_0| \leq |u_0|$, on peut prolonger $S_A(t)$ par continuité et densité en un opérateur linéaire continu de H dans lui-même. On vérifie facilement que le prolongement $S_A(t)$ possède les propriétés suivantes:

1. Pour chaque $t \geq 0$, $S_A(t) : H \rightarrow H$ est une contraction.
2.
$$\begin{cases} S_A(t_1 + t_2) = S_A(t_1) \circ S_A(t_2) \quad \forall t_1, t_2 \geq 0 \\ S_A(0) = I \end{cases}$$
3. $\lim_{t \searrow 0} |S_A(t)u_0 - u_0| = 0 \quad \forall u_0 \in H.$

Une famille $(S(t))_{t \geq 0}$ d'opérateurs de $\mathcal{L}(H)$ définie pour chaque valeur du paramètre $t \geq 0$ et vérifiant 1), 2), 3) est, par définition, un **semi-groupe continu de contraction**.

On peut montrer (Hille-Yosida) qu'inversement, étant donné un semi-groupe continu de contraction $(S(t))_{t \geq 0}$, il existe un opérateur monotone maximal A unique tel que $S(t) = S_A(t)$ pour tout $t \geq 0$.

REMARQUE: Soit A un opérateur maximal monotone et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La résolution de l'équation

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au + \lambda u = 0 \text{ sur } [0, +\infty[\\ u_0 = u(0) \end{cases}$$

se ramène très simplement au théorème 1.2.2 grâce à l'artifice suivant. On pose

$$v(t) = e^{\lambda t} u(t).$$

Alors v vérifie

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} + Av = 0 \text{ sur } [0, +\infty[\\ u_0 = v(0) \end{cases}$$

On va maintenant étudier plus en profondeur la régularité de la solution u donnée par le théorème 1.2.2. Pour cela on définit par récurrence l'espace

$$D(A^k) = \{v \in D(A^{k-1}); Av \in D(A^{k-1})\}.$$

On vérifie aisément que $D(A^k)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v)_{D(A^k)} = \sum_{j=0}^k (A^j u, A^j v).$$

Théorème 1.2.3. On suppose que $u_0 \in D(A^k)$ avec $k \geq 2$. Alors la solution u du problème (1.9) vérifie de plus

$$u \in C^{k-j}([0, +\infty[; D(A^j)) \text{ pour } j = 0, 1, \dots, k.$$

Le cas où A est auto-adjoint est intéressant car il permet de s'affranchir de l'hypothèse $u_0 \in D(A)$:

Théorème 1.2.4. Soit A un opérateur maximal monotone et autoadjoint dans un espace de Hilbert H . Alors pour tout $u_0 \in H$, il existe une fonction

$$u \in C^1(]0, +\infty[; H) \cap C(]0, +\infty[; D(A)) \cap C([0, +\infty[; H)$$

unique telle que

$$(1.10) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0 \text{ sur }]0, +\infty[\\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

De plus on a

$$|u(t)| \leq |u_0| \text{ et } \left| \frac{du}{dt}(t) \right| = |Au(t)| \leq \frac{1}{t} |u_0|, \forall t > 0$$

$$u \in C^k(]0, +\infty[; D(A^l)) \quad \forall k, l \text{ entiers.}$$

REMARQUE: Le théorème de Hille-Yosida reste valable dans un espace de Banach E avec des opérateurs A vérifiant $\overline{D(A)} = E$ et pour tout $\lambda > 0$, $I + \lambda A$ est bijectif de $D(A)$ sur E avec $\|(I + \lambda A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq 1$.

1.3 EDS dépendant d'un paramètre

On considère l'EDS suivante:

$$(1.11) \quad X_t^{x,s} = x + \int_s^t b(r, X_r^{x,s}) dr + \int_s^t \sigma(r, X_r^{x,s}) dB_r$$

où $\{B_t; t \geq 0\}$ est un mouvement brownien standard k -dimensionnel et

$$b : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \sigma : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times k}$$

sont des fonctions aléatoires progressivement mesurables qui vérifient:

$\forall T > 0, \exists K > 0$ (qui dépend de T) tel que:

$$(1.12) \quad |b(t, x)| \leq K(1 + |x|), \quad |\sigma(t, x)| \leq K(1 + |x|)$$

$$(1.13) \quad |b(t, x) - b(t, x')| \leq K|x - x'|, \quad |\sigma(t, x) - \sigma(t, x')| \leq K|x - x'|.$$

Théorème 1.3.1. Soit $(b_\alpha(t, x))_{\alpha \geq 0}, (\sigma_\alpha(t, x))_{\alpha \geq 0}$ deux familles de fonctions satisfaisant les hypothèses (1.12) et (1.13) avec une constante K indépendante de α . Soit x_α une famille de variables aléatoires \mathcal{F}_0 mesurable vérifiant $\sup_{\alpha \geq 0} \mathbb{E} [|x_\alpha|^2] \leq C$.

On suppose aussi que: $\forall N > 0, \forall t \in [s, T], \forall \varepsilon > 0,$

$$(1.14) \quad \lim_{\alpha \downarrow 0} \mathbb{P} \left(\sup_{|x| \leq N} |\sigma_\alpha(t, x) - \sigma_0(t, x)| > \varepsilon \right) = 0,$$

$$(1.15) \quad \lim_{\alpha \downarrow 0} \mathbb{P} \left(\sup_{|x| \leq N} |b_\alpha(t, x) - b_0(t, x)| > \varepsilon \right) = 0.$$

On suppose également que:

$$(1.16) \quad \lim_{\alpha \downarrow 0} \mathbb{E} (|x_\alpha - x_0|^2) = 0.$$

On note X_t^α la solution de:

$$(1.17) \quad X_t^\alpha = x_\alpha + \int_s^t b_\alpha(r, X_r^\alpha) dr + \int_s^t \sigma_\alpha(r, X_r^\alpha) dB_r.$$

Alors

$$\sup_{s \leq t \leq T} \mathbb{E} [|X_t^\alpha - X_t^0|^2] \rightarrow 0 \text{ lorsque } \alpha \downarrow 0.$$

Preuve :

On suppose pour simplifier que $s = 0$. On écrit:

$$X_t^\alpha - X_t^0 = \eta_t^\alpha + \int_0^t [b_\alpha(r, X_r^\alpha) - b_\alpha(r, X_r^0)] dr + \int_0^t [\sigma_\alpha(r, X_r^\alpha) - \sigma_\alpha(r, X_r^0)] dB_r$$

où

$$\eta_t^\alpha = x_\alpha - x_0 + \int_0^t [b_\alpha(r, X_r^0) - b_0(r, X_r^0)] dr + \int_0^t [\sigma_\alpha(r, X_r^0) - b_0(r, X_r^0)] dr$$

En utilisant les hypothèses (1.12) et (1.13), on a:

$$\mathbb{E} [|X_t^\alpha - X_t^0|^2] \leq 2\mathbb{E} [|\eta_t^\alpha|^2] + c \int_0^t \mathbb{E} [|X_r^\alpha - X_r^0|^2] dr$$

Si on prouve que

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E} [|\eta_t^\alpha|^2] \rightarrow 0 \text{ lorsque } \alpha \rightarrow 0$$

le lemme de Gronwall assurera alors le résultat. Or

$$\mathbb{E} \left[\left| \int_0^t [b_\alpha(r, X_r^0) - b_0(r, X_r^0)] dr \right|^2 \right] \leq t \mathbb{E} \left[\int_0^t |b_\alpha(r, X_r^0) - b_0(r, X_r^0)|^2 dr \right]$$

et l'intégrand de l'espérance est majoré par $2K \int_0^t (1 + |X_s^0|)^2 ds$ (qui est intégrable) et converge en probabilité vers 0 quand $\alpha \rightarrow 0$ vu (1.15). Le théorème de convergence dominée de Lebesgue montre alors que

$$\mathbb{E} \left[\left| \int_0^t [b_\alpha(r, X_r^0) - b_0(r, X_r^0)] dr \right|^2 \right] \rightarrow 0 \text{ lorsque } \alpha \rightarrow 0.$$

En remarquant que

$$\mathbb{E} \left[\left| \int_0^t [\sigma_\alpha(r, X_r^0) - \sigma_0(r, X_r^0)] dB_r \right|^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^t |\sigma_\alpha(r, X_r^0) - \sigma_0(r, X_r^0)|^2 dr \right],$$

le même type d'arguments montre que

$$\mathbb{E} \left[\left| \int_0^t [\sigma_\alpha(r, X_r^0) - \sigma_0(r, X_r^0)] dB_r \right|^2 \right] \rightarrow 0 \text{ lorsque } \alpha \rightarrow 0.$$

Finalement, en utilisant aussi (1.16), on obtient:

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E} [|\eta_t^\alpha|^2] \rightarrow 0 \text{ lorsque } \alpha \rightarrow 0$$

d'où le résultat ■

On suppose maintenant également que les applications

$$x \mapsto b(t, x) \text{ et } x \mapsto \sigma(t, x)$$

sont de classe C^1 pour tout $t \geq 0$.

Théorème 1.3.2. *Sous les hypothèses précédentes alors les dérivées $\frac{\partial X_t^{x,s}}{\partial x_i}$ existent au sens $L^2(\Omega)$ et la fonction $Y_t^i = \frac{\partial X_t^{x,s}}{\partial x_i}$ satisfait l'équation différentielle stochastique suivante:*

$$(1.18) \quad Y_t^i = e_i + \int_s^t Y_r^i \cdot \nabla_x b(r, X_r^{x,s}) dr + \int_s^t Y_r^i \cdot \nabla_x \sigma(r, X_r^{x,s}) dB_r.$$

Preuve :

On suppose $i = 1$ pour simplifier et on pose $h = (h_1, 0, \dots, 0)$ où $h_1 \neq 0$. Alors:

$$\begin{aligned} \frac{X_t^{x+h,s} - X_t^{x,s}}{h_1} &= e_1 + \frac{1}{h_1} \int_s^t [b(r, X_r^{x+h,s}) - b(r, X_r^{x,s})] dr \\ &\quad + \frac{1}{h_1} \int_s^t [\sigma(r, X_r^{x+h,s}) - \sigma(r, X_r^{x,s})] dB_r \end{aligned}$$

L'EDS (1.18) admet une unique solution avec $i = 1$ que l'on appelle Y^1 . Nous allons terminer la preuve en appliquant le théorème 1.3.1 avec $\alpha = h_1$. On remarque:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_1} \int_s^t [b(r, X_r^{x+h,s}) - b(r, X_r^{x,s})] dr &= \frac{1}{h_1} \int_s^t \left(\int_0^1 \nabla_x b(X_r^{x,s} + u(X_r^{x+h,s} - X_r^{x,s})) du \right) \\ &\quad \times \frac{X_r^{x+h,s} - X_r^{x,s}}{h_1} dr. \end{aligned}$$

On obtient également une expression similaire pour l'intégrale stochastique. Ainsi la fonction

$$Z_t^\alpha = \frac{X_t^{x+h,s} - X_t^{x,s}}{h_1}$$

satisfait l'équation (1.17) avec

$$b_\alpha(t, z) = \int_0^1 \nabla_x b(X_t^{x,s} + u\alpha z) du \cdot z$$

$$b_\alpha(t, z) = \int_0^1 \nabla_x \sigma(X_t^{x,s} + u\alpha z) du \cdot z$$

Si $\alpha = 0$, on a $Z_t^0 = Y_t^1$.

On rappelle que l'on a $\forall T > 0$,

$$\mathbb{E} \left[\sup_{s \leq t \leq T} |X_t^{x,s} - X_t^{y,s}|^2 \right] \leq C(|x - y|^2 + |T - s|).$$

En utilisant ce rappel et la continuité de $\nabla_x b$ et $\nabla_x \sigma$, on a bien (1.14) et (1.15) et le résultat découle alors du théorème 1.3.1 ■

On énonce maintenant un théorème dont la preuve se ramène à la précédente.

Théorème 1.3.3. *Supposons que les dérivées partielles $D_x^\alpha b(t, x)$, $D_x^\alpha \sigma(t, x)$ existent, sont continues pour $|\alpha| \leq 2$ et vérifient*

$$|D_x^\alpha b(t, x)| + |D_x^\alpha \sigma| \leq K_0(1 + |x|)^\beta \quad (|\alpha| \leq 2)$$

où K_0, β sont des constantes positives.

Alors les dérivées partielles $\frac{\partial X_t^{x,s}}{\partial x_i \partial x_j}$ existent au sens $L^2(\Omega)$ et elles satisfont le système différentiel stochastique avec coefficients aléatoires obtenu en appliquant formellement $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$ à la formule (1.11).

Théorème 1.3.4. *Soit $f(x)$ une fonction de classe C^1 et satisfaisant*

$$|D^\alpha f(x)| \leq C(1 + |x|)^\beta \quad (|\alpha| \leq 1)$$

où C, β sont des constantes positives. On suppose également que les hypothèses du théorème 1.3.3 sont vérifiées pour $|\alpha| \leq 1$ et on pose

$$(1.19) \quad \Phi(x) = \mathbb{E} [f(X_t^{x,s})].$$

Alors $\Phi(x)$ est continûment différentiable et les dérivées peuvent être calculées en différentiant le membre de droite dans (1.19) sous le signe intégral.

De plus, on a

$$|D^\alpha \Phi(x)| \leq C_0(1 + |x|)^\gamma \quad |\alpha| \leq 1,$$

où C_0, γ sont des constantes positives.

Preuve :

Nous prouverons que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \mathbb{E} \left[\nabla f(X_t^{x,s}) \cdot \frac{\partial X_t^{x,s}}{\partial x_i} \right].$$

On suppose pour simplifier que $i = 1$ et posons $h = (h_1, 0, \dots, 0)$. Alors

$$\begin{aligned} \Phi(x+h) - \Phi(x) &= \mathbb{E} \left[f(X_t^{x+h,s}) - f(X_t^{x,s}) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^1 \nabla f(X_t^{x,s} + u(X_t^{x+h,s} - X_t^{x,s})) \cdot (X_t^{x+h,s} - X_t^{x,s}) du \right]. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = \mathbb{E} \left[\int_0^1 \nabla f(X_t^{x,s} + u(X_t^{x+h,s} - X_t^{x,s})) du \cdot \frac{X_t^{x+h,s} - X_t^{x,s}}{h} \right]$$

Lorsque $h \rightarrow 0$,

$$\frac{X_t^{x+h,s} - X_t^{x,s}}{h} \rightarrow \frac{\partial X_t^{x,s}}{\partial x_1} \text{ dans } L^2(\Omega).$$

Ensuite si l'on pose

$$\psi_h \triangleq \int_0^1 \nabla f(X_t^{x,s} + u(X_t^{x+h,s} - X_t^{x,s})) du$$

on a $\psi_h \rightarrow \nabla_x f(X_t^{x,s})$ dans $L^2(\Omega)$ car $X_t^{x+h,s} \rightarrow X_t^{x,s}$ dans $L^2(\Omega)$ donc en probabilité et par suite $\psi_h \rightarrow \nabla_x f(X_t^{x,s})$ en probabilité. De plus en utilisant les majorations sur les dérivées partielles de f , il existe C_1 tel que

$$\mathbb{E} [|\psi_h - \nabla_x f(X_t^{x,s})|^4] \leq C_1$$

et ceci entraîne que $\psi_h \rightarrow \nabla_x f(X_t^{x,s})$ dans $L^2(\Omega)$.

On peut itérer ce raisonnement pour obtenir des résultats sur des dérivées d'ordre supérieur ■

1.4 Ergodicité et processus de Markov

1.4.1 Systèmes ergodiques

Soit $S = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \theta_t)$ un système dynamique qui consiste en un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et un groupe de transformations inversibles et mesurables $\theta_t, t \in \mathbb{R}$ de Ω dans Ω préservant la mesure \mathbb{P} :

$$\forall A \in \mathcal{F}, \forall t \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(\theta_t A) = \mathbb{P}(A)$$

Le groupe $\theta_t, t \in \mathbb{R}$ induit un groupe de transformations linéaires $T_t, t \in \mathbb{R}$ sur l'espace de Hilbert $H = L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ par la formule

$$T_t \xi(\omega) = \xi(\theta_t \omega), \forall \xi \in H, \forall \omega \in \Omega, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Nous noterons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire sur H . Il est clair que les opérateurs $T_t, t \in \mathbb{R}$ sont unitaires et que $T_t^* = T_{-t}$.

Un système dynamique $S = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \theta_t)$ est dit continu si

$$\lim_{t \rightarrow 0} T_t \xi = \xi, \forall \xi \in H$$

Nous ne considérons par la suite que des systèmes dynamiques continus.

Définition 1.4.2. Un système dynamique $S = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \theta_t)$ est dit **ergodique** si

$$\forall A, B \in \mathcal{F}, \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbb{P}(\theta_t A \cap B) dt = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B)$$

ou bien de façon équivalente:

$$\forall \xi, \eta \in H, \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \langle T_t \xi, \eta \rangle dt = \langle \xi, 1 \rangle \langle 1, \eta \rangle$$

Nous aurons besoin par la suite de la caractérisation suivante des systèmes ergodiques:

Théorème 1.4.3. *Soit S un système dynamique continu. Alors S est ergodique si et seulement si les seules fonctions T_t -invariantes, ie telles que $T_t\xi = \xi, \forall t \in \mathbb{R}$, sont les constantes.*

Preuve :

Pour prouver le théorème 1.4.3 nous aurons besoin du théorème ergodique de Birkhoff dont la preuve peut être trouvée dans n'importe quel ouvrage sur la théorie ergodique, par exemple cf [Petersen] théorème 2.3 .

Théorème 1.4.4 (théorème ergodique de Birkhoff). *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, $\theta : \Omega \rightarrow \Omega$ une transformation préservant la mesure. Alors $\forall \xi \in H = L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ il existe $\xi^* \in H$ telle que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \xi(\theta^k(\omega)) = \xi^*(\omega), \quad \mathbb{P} \text{ p.s. et dans } H.$$

De plus, on a

$$\xi^*(\omega) = \xi^*(\theta(\omega)), \quad \mathbb{P} \text{ p.s.}$$

et

$$\mathbb{E}[\xi] = \mathbb{E}[\xi^*].$$

Preuve du théorème 1.4.3:

Supposons que les constantes sont les seules fonctions T_t -invariantes. Nous allons montrer que:

$$\forall \xi, \eta \in H, \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \langle T_t \xi, \eta \rangle dt = \langle \xi, 1 \rangle \langle 1, \eta \rangle$$

Pour tout nombre positif h , on définit

$$\xi_h = \int_0^h T_t \xi dt,$$

et on considère θ_h qui est une transformation préservant la mesure sur Ω . Alors

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \xi_h(\theta_h^k(\omega)) = \frac{1}{n} \int_0^{nh} T_t \xi(\omega) dt, \quad \omega \in \Omega,$$

et d'après le théorème de Birkhoff, il existe $\xi_h^* \in H$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_0^{nh} T_t \xi dt = \xi_h^*, \quad \text{dans } H \text{ et } \mathbb{P} \text{ p.s.}$$

On en déduit que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T T_t \xi dt = \frac{1}{h} \xi_h^* \text{ dans } H \text{ et } \mathbb{P} \text{ ps.}$$

En particulier, on a $\xi_h^* = h\xi_1^*$ et en utilisant le théorème 1.4.4, $T_h\xi_h^* = \xi_h^*$, ce qui donne $T_h\xi_1^* = \xi_1^*$, $\forall h \geq 0$, et ainsi ξ_1^* est une fonction constante égale à son espérance $\langle \xi, 1 \rangle$.

Réciproquement, si S est ergodique et $T_t\xi = \xi$ pour tout $t \geq 0$, on a $\forall \xi, \eta \in H$

$$\langle \xi, \eta \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \langle T_t\xi, \eta \rangle dt = \langle \xi, 1 \rangle \langle 1, \eta \rangle = \langle \langle \xi, 1 \rangle 1, \eta \rangle$$

et on en déduit que $\xi = \langle \xi, 1 \rangle 1$ est une fonction constante ■

Soit S un système dynamique continu. Un ensemble $A \in \mathcal{F}$ est dit invariant par rapport à S si

$$\forall t \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(\theta_t A) = \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\theta_t A \cap A).$$

On a alors le résultat important suivant:

Théorème 1.4.5. *Soit S un système dynamique continu. S est ergodique si et seulement si pour tout ensemble invariant A , on a $\mathbb{P}(A) = 0$ ou bien $\mathbb{P}(A) = 1$.*

Preuve :

Si S est ergodique et A est invariant. Alors $T_t \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_A$ \mathbb{P} p.s. , d'où

$$\mathbb{P}(A)^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbb{P}(\theta_t A \cap A) dt = \mathbb{P}(A)$$

et il en découle que $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$.

Réciproquement, si ξ est une fonction θ_t invariante pour tout $t \in \mathbb{R}$, alors ξ est constante (facile à vérifier!) donc S est ergodique ■

1.4.6 Systèmes canoniques et processus de Markov

Etant donné un processus de Markov $\{X_t, t \geq 0\}$ à valeurs dans un espace polonais E possédant une probabilité invariante μ , on va lui associer, de manière unique, un système dynamique $(\Omega, \mathcal{F}, \theta_t, \mathbb{P}^\mu)$ sur l'espace $\Omega = E^{\mathbb{R}}$.

On introduit alors un groupe de transformations mesurables et inversibles $\theta_t, t \in \mathbb{R}$ de Ω dans Ω :

$$\theta_t \omega(s) = \omega(t + s), t, s \in \mathbb{R}.$$

On note P^μ la loi produit de μ sur Ω . Le processus $\{X_t, t \geq 0\}$ est alors stationnaire:

$$\mathbb{P}(X \in \theta_t \Gamma) = \mathbb{P}(X \in \Gamma), \forall t \in \mathbb{R}, \forall \Gamma \in \mathcal{B}(E)^{\otimes \mathbb{R}},$$

et les transformations $\theta_t, t \in \mathbb{R}$ préserve la mesure \mathbb{P}^μ . En conséquence, si μ est invariante, le quadruplet $S^\mu = (\Omega, \mathcal{F}, \theta_t, \mathbb{P}^\mu)$ définit un système dynamique associé à $\{X_t, t \geq 0\}$.

Proposition 1.4.7. *Le système dynamique S^μ est continu:*

$$\lim_{s \rightarrow t} T_s \xi = T_t \xi, \xi \in H^\mu.$$

Preuve :

Il suffit de prouver l'assertion précédente pour tout ξ appartenant à un sev dense de $H^\mu = L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu^{\otimes \mathbb{R}})$. Soit H^0 l'ensemble de tous les ξ de la forme

$$\xi(\omega) = f(\omega(t_1), \dots, \omega(t_n)), \omega \in \Omega,$$

où f est une fonction uniformément continue et bornée sur E^n et $t_1 < \dots < t_n$. H^0 est dense dans H^μ et si $\xi \in H^0$, alors soit $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ le module d'uniforme continuité de f pour ε . On a pour $t > s$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^\mu [|T_s \xi - T_t \xi|^2] &\leq \mathbb{E}^\mu [|f(\omega(t_1 + t), \dots, \omega(t_n + t)) - f(\omega(t_1 + s), \dots, \omega(t_n + s))|^2] \\ &\leq \varepsilon^2 \mathbb{P}^\mu (d(\omega(t_i + t), \omega(t_i + s)) < \delta; \forall i = 1, \dots, n) \\ &\quad + 2\|f\|_\infty \sum_{i=1}^n \mathbb{P}^\mu (d(\omega(t_i + t), \omega(t_i + s)) \geq \delta) \\ &\leq \varepsilon^2 + 2\|f\|_\infty \sum_{i=1}^n \mathbb{P}^\mu (d(\omega(t_i + t), \omega(t_i + s)) \geq \delta) \end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de montrer que

$$\mathbb{P}^\mu (d(\omega(t_i + t), \omega(t_i + s)) \geq \delta) \xrightarrow[t \downarrow s]{} 0.$$

Or

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^\mu (d(\omega(t_i + t), \omega(t_i + s)) \geq \delta) &= \mathbb{E}^\mu [\mathbb{P}^\mu (d(\omega(t_i + t), \omega(t_i + s)) \geq \delta | \mathcal{F}_{s+t_i})] \\ &= \mathbb{E}^\mu [P_{t-s}(X_{s+t_i}, B(X_s, \delta)^c)] \end{aligned}$$

d'après la propriété de Markov, où $P_t(x, dy)$ désignent les probabilités de transition du processus $\{X_t, t \geq 0\}$. Or on a

$$\lim_{t \downarrow s} P_{t-s}(x, B(x, \delta)^c) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

donc le théorème de convergence dominée de Lebesgue permet de conclure ■

Nous prouvons maintenant le résultat principal concernant l'ergodicité d'une mesure invariante. (μ est dite ergodique si le système S^μ est ergodique).

Théorème 1.4.8. Soit $\{X_t, t \geq 0\}$ un processus de Markov et μ une mesure de probabilité invariante. Les conditions suivantes sont équivalentes:

- (i) μ est ergodique.
- (ii) Si $\varphi \in L^2(E, \mu)$ et $P_t \varphi = \varphi$, μ p.s. pour tout $t > 0$ alors φ est constante μ p.s. .
- (iii) Si pour un ensemble $\Gamma \in \mathcal{B}(E)$ et pour tout $t > 0$, $P_t \mathbb{1}_\Gamma = \mathbb{1}_\Gamma$, μ p.s. alors $\mu(\Gamma) = 0$ ou $\mu(\Gamma) = 1$.

(iv) Pour tout $\varphi \in L^2(E, \mu)$,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T P_s \varphi ds = \langle \varphi, 1 \rangle \text{ dans } L^2(E, \mu).$$

Preuve :

Les équivalences (i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii) résultent de ce qui précède. Montrons que (i) \Leftrightarrow (iv).

Supposons tout d'abord que μ est ergodique. Soit $\varphi, \psi \in L^2(E, \mu)$ et définissons $\xi(\omega) = \varphi(\omega_0), \eta(\omega) = \psi(\omega_0), \omega \in \Omega$. Grâce à l'ergodicité du système dynamique S^μ ,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \langle T_s \xi, \eta \rangle_{H^\mu} ds = \langle \xi, 1 \rangle \langle 1, \eta \rangle.$$

Or

$$\begin{aligned} \langle T_s \xi, \eta \rangle_{H^\mu} &= \mathbb{E}^\mu [\varphi(X_s) \psi(X_0)] \\ &= \langle P_s \varphi, \psi \rangle_{L^2(E, \mu)} \end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T P_s \varphi ds = \langle \varphi, 1 \rangle \text{ faiblement dans } L^2(E, \mu).$$

Il reste à prouver que la convergence est forte. Soit $\varphi = \mathbb{1}_\Gamma, \Gamma \in \mathcal{B}(E)$. Nous avons alors $P_s \varphi(x) = P_s(x, \Gamma)$ et par invariance de μ ,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{T} \int_0^T P_s \varphi ds \right\| &\leq \frac{1}{T} \int_0^T \|P_s \varphi\|_{L^2(E, \mu)} ds \\ &= \mu(\Gamma) \\ &= \|\varphi\|_{L^2(E, \mu)} \end{aligned}$$

Ainsi pour $\varphi = \mathbb{1}_\Gamma, \Gamma \in \mathcal{B}(E)$,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T P_s \varphi ds = \langle \varphi, 1 \rangle$$

fortement dans $L^2(E, \mu)$. Comme les fonctions indicatrices forment un sous-ensemble dense dans $L^2(E, \mu)$, on obtient (iv) pour tout $\varphi \in L^2(E, \mu)$.

Réciproquement supposons que (iv) soit vérifié et que $\varphi \in L^2(E, \mu)$ vérifie $\forall t \geq 0, P_t \varphi = \varphi$. Alors

$$\varphi = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T P_s \varphi ds \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \langle \varphi, 1 \rangle_{L^2(E, \mu)}$$

et ainsi φ est constante ■

Un exposé beaucoup plus complet de la théorie ergodique des processus markoviens peut être trouvée dans [Da Prato & Zabczyk].

1.5 Inégalités d'Aronson

Considérons l'opérateur différentiel du second ordre

$$L = \nabla \cdot (a \nabla)$$

où $a : \mathbb{R}^d \rightarrow M_d(\mathbb{R})$ est mesurable, symétrique et satisfait la condition d'ellipticité:

$$\lambda I \leq a(\cdot) \leq \frac{1}{\lambda} I$$

(au sens des matrices positives) où $\lambda \in]0; 1]$. Alors le processus de diffusion associé à L possède une densité $p(t, x, y)$ et on démontre qu'il existe $M = M(\lambda, d)$ telle que

$$\forall t > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}^d, \frac{1}{Mt^{d/2}} \exp(-M|y-x|^2/t) \leq p(t, x, y) \leq \frac{M}{t^{d/2}} \exp(-|y-x|^2/Mt).$$

Ces estimations sont appelées les estimations d'Aronson.

Si l'on suppose également que $b : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ est une fonction mesurable bornée alors $\forall T > 0$, il existe $M = M(\lambda, b, d, T)$ telle que la densité p du processus de diffusion associé à l'opérateur

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \right) + \sum_i b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

vérifie également les inégalités suivantes pour $0 < t \leq T, x, y \in \mathbb{R}^d$,

$$\frac{1}{Mt^{d/2}} \exp(-M|y-x|^2/t) \leq p(t, x, y) \leq \frac{M}{t^{d/2}} \exp(-|y-x|^2/Mt).$$

Pour les démonstrations de ces résultats, voir [Stroock1].

1.6 Temps de sortie d'un ouvert

Considérons le processus de diffusion X_t associée à l'EDS

$$dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dB_t$$

où b, σ vérifient les conditions d'existence d'un tel processus et $\{B_t; t \geq 0\}$ est un mouvement brownien standard d -dimensionnel sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose de plus que $a = {}^t\sigma \cdot \sigma$ vérifie la condition d'ellipticité:

$$\exists \lambda > 0, \forall x \in \mathbb{R}^d, \forall \xi \in \mathbb{R}^d, (a(x)\xi, \xi) \geq \lambda |\xi|^2.$$

Soit D un ouvert borné de \mathbb{R}^d , on pose

$$\tau_D = \inf \{t > 0; X_t \notin D\}.$$

On note également $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s; s \leq t)$ et $\mathcal{F}_\infty = \sigma(X_s; s \geq 0)$.

Lemme 1.6.1 (Loi 0-1). Soit $H \in \bigcap_{t>0} \mathcal{F}_t$. Alors $\mathbb{P}_x(H) = 0$ ou $\mathbb{P}_x(H) = 1$.

Preuve :

Par la propriété de Markov forte, on a

$$\mathbb{E}_x[\theta_t \eta | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}_{X_t}[\eta]$$

pour toute variable aléatoire bornée \mathcal{F}_∞ mesurable sur Ω . Ceci implique que

$$\int_H \theta_t \eta d\mathbb{P}_x = \int_H \mathbb{E}_{X_t}[\eta] d\mathbb{P}_x, \quad \forall t.$$

On suppose tout d'abord que $\eta = \eta_k = g_1(X_{t_1}) \dots g_k(X_{t_k})$, où chaque g_i est bornée et continue. En faisant tendre t vers 0, on obtient:

$$\int_H \eta d\mathbb{P}_x = \lim_{t \rightarrow 0} \int_H \theta_t \eta d\mathbb{P}_x = \lim_{t \rightarrow 0} \int_H \mathbb{E}_{X_t}[\eta] d\mathbb{P}_x = \mathbb{P}_x(H) \mathbb{E}_x[\eta]$$

par la continuité de Feller du semi-groupe et le théorème de convergence dominée. En approximant η par des fonctions de la forme η_k on conclut

$$\int_H \eta d\mathbb{P}_x = \mathbb{P}_x(H) \mathbb{E}_x[\eta]$$

pour toute variable aléatoire \mathcal{F}_∞ -mesurable bornée η . Si l'on applique ceci à $\eta = \mathbb{1}_H$ on obtient

$$\mathbb{P}_x(H) = \mathbb{P}_x(H)^2$$

et ceci termine la preuve ■

Corollaire 1.6.2. Soit $y \in \mathbb{R}^d$. Alors

$$\text{ou bien } \mathbb{P}_y(\tau_D = 0) = 0 \text{ ou } \mathbb{P}_y(\tau_D = 0) = 1.$$

Preuve :

$$H = \{\omega \in \Omega; \tau_D = 0\} \in \bigcap_{t>0} \mathcal{F}_t \quad \blacksquare$$

En d'autres termes ou bien presque toutes les trajectoires partant de y restent dans D pour une période de temps strictement positive ou bien presque toutes les trajectoires partant de y quittent D immédiatement. Dans ce dernier cas nous dirons que le point y est régulier ie

Définition 1.6.3. Un point $y \in \mathbb{R}^d$ est dit régulier pour D (par rapport à X_t) si

$$\mathbb{P}_y(\tau_D = 0) = 1.$$

Sinon y est dit irrégulier.

REMARQUE: Il est évident que la régularité d'un point est une propriété locale. Ainsi $a \in \partial D$ est régulier pour D si et seulement si a est régulier pour $(a + B(0; r)) \cap D$, pour un $r > 0$.

Pour $y \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, on définit le cône $C(y, \theta)$ de direction y et d'ouverture θ par

$$C(y, \theta) = \{x \in \mathbb{R}^d; (x, y) \geq \|x\| \|y\| \cos \theta\}.$$

Définition 1.6.4. On dira que le point $a \in \partial D$ satisfait la condition de cône de Zaremba s'il existe $y \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ et $0 < \theta < \pi$ tel que le cône translaté $a + C(y, \theta)$ soit contenu dans $\mathbb{R}^d \setminus D$.

Théorème 1.6.5 (Cône de Zaremba). Si un point $a \in \partial D$ satisfait la condition du cône de Zaremba alors il est régulier.

Preuve :

On suppose $a + C(y, \theta) \subset \mathbb{R}^d \setminus D$, où $y \neq 0$ et $0 < \theta < \pi$. Soit $t \leq T$, d'après les estimations d'Aronson il existe M tel que $\forall t \leq T$,

$$p(t, x, y) \geq \frac{M}{t^{d/2}} \exp(-|y - x|^2/Mt).$$

Comme le changement de variables $z = \frac{x}{M\sqrt{t}}$ envoie le cône dans lui-même, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_a(X_t \in a + C(y, \theta)) &\geq \int_{a+C(y, \theta)} \frac{M}{t^{d/2}} \exp(-|y - a|^2/Mt) dy \\ &= \int_{C(y, \theta)} \frac{M}{t^{d/2}} \exp(-|y|^2/Mt) dy \\ &= \int_{C(y, \theta)} M \exp(-|z|^2) dz \triangleq q > 0 \end{aligned}$$

où q est indépendant de t . Or

$$\mathbb{P}_a(\tau_D \leq t) \geq \mathbb{P}_a(X_t \in C(y, \theta)) = q,$$

et en faisant tendre $t \downarrow 0$, on conclut que $\mathbb{P}_a(\tau_D = 0) > 0$. La régularité résulte alors de la loi 0-1 ■.

REMARQUE: Si, pour un $a \in \partial D$ et pour un $r > 0$, le point a satisfait la condition du cône de Zaremba pour l'ensemble $(a + B(0, r)) \cap D$, alors a est régulier pour D .

D'autre part, on remarque que la régularité d'un point ne dépend pas du processus de diffusion considéré pourvu que ces coefficients vérifient les hypothèses ci-dessus et en particulier la condition d'ellipticité.

Chapter 2

Homogénéisation en milieu périodique: cas elliptique

Ce chapitre est consacré à la preuve des formules d'homogénéisation pour les opérateurs sous forme divergence à coefficients périodiques. Les coefficients sont également supposés assez réguliers pour que l'on puisse considérer le processus de diffusion comme solution de l'équation différentielle stochastique associée. Une approche plus générale sans hypothèse de régularité des coefficients est possible à l'aide de la théorie des processus de Markov associés à une forme de Dirichlet [Fukushima].

La condition d'ellipticité va jouer un rôle important dans ce chapitre. D'autre part, la périodicité des coefficients va conduire à considérer un processus de diffusion sur le tore, ce qui permettra d'utiliser la compacité de ce dernier, notamment en ce qui concerne l'existence d'une mesure invariante pour le processus de diffusion. On établit ensuite un théorème ergodique pour ce processus et à l'aide de la formule de Feynmann-Kac, on en déduit les propriétés d'homogénéisation.

2.1 Introduction

On considère l'EDS suivante:

$$(2.1) \quad X_t^\varepsilon = x + \int_0^t c\left(\frac{X_s^\varepsilon}{\varepsilon}\right) ds + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t b\left(\frac{X_s^\varepsilon}{\varepsilon}\right) ds + \int_0^t \sigma\left(\frac{X_s^\varepsilon}{\varepsilon}\right) dB_s$$

où $\{B_t; t \geq 0\}$ est un mouvement brownien d -dimensionnel standard, $c: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $b: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ et $\sigma: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ sont mesurables et bornées, périodiques de période 1 dans chaque direction. On suppose également que $\sigma(x)$, $b(x)$ et $c(x)$ sont localement lipschitziennes et que

$$(2.2) \quad \sum_{j=1}^d \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} \in L^\infty(\mathbb{R}^d), \quad i = 1, \dots, d$$

De plus, on se place sous la condition suivante:

Hypothèse 2.1.1. CAS ELLIPTIQUE Il existe $\alpha > 0$ tel que

$$a(x) \geq \alpha \text{Id}, \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Soit $\tilde{X}_t^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} X_{\varepsilon^2 t}^\varepsilon$. On remarque que:

$$\tilde{X}_t^\varepsilon = \frac{x}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon^2 t} c(\tilde{X}_{s/\varepsilon^2}^\varepsilon) ds + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^{\varepsilon^2 t} b(\tilde{X}_{s/\varepsilon^2}^\varepsilon) ds + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon^2 t} \sigma(\tilde{X}_{s/\varepsilon^2}^\varepsilon) dB_s.$$

Effectuons maintenant le changement de variable $r = s/\varepsilon^2$. En ce qui concerne l'intégrale stochastique, si l'on pose $B_r^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} B_{\varepsilon^2 r}$ (c'est un mouvement brownien), on a

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon^2 t} \sigma(\tilde{X}_{s/\varepsilon^2}^\varepsilon) dB_s = \int_0^t \sigma(\tilde{X}_r^\varepsilon) dB_r^\varepsilon$$

Ainsi on obtient

$$(2.3) \quad \tilde{X}_t^\varepsilon = \frac{x}{\varepsilon} + \varepsilon \int_0^t c(\tilde{X}_r^\varepsilon) dr + \int_0^t b(\tilde{X}_r^\varepsilon) dr + \int_0^t \sigma(\tilde{X}_r^\varepsilon) dB_r^\varepsilon.$$

Comme il y a unicité en loi pour les solutions des EDS, indépendamment du brownien considéré, on oubliera par la suite la dépendance en ε du brownien.

Ce qui va suivre concerne l'étude des propriétés ergodiques des processus $\left\{ \tilde{X}_t^\varepsilon; t \geq 0 \right\}_{\varepsilon \geq 0}$.

Comme les coefficients de (2.3) sont périodiques, nous considérerons le processus $\left\{ \tilde{X}_t^\varepsilon; t \geq 0 \right\}$ comme un processus de diffusion (et donc un processus markovien) à valeurs dans le tore $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$. En fait, la projection sur le tore du processus de diffusion solution de (2.3) à valeurs dans \mathbb{R}^d est solution de l'EDS (2.3) considérée comme équation sur le tore. On remarque également que le générateur infinitésimal du processus $\left\{ \tilde{X}_t^\varepsilon; t \geq 0 \right\}$ est l'opérateur du second ordre suivant:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} L_\varepsilon &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d (b_i(x) + \varepsilon c_i(x)) \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \right) + \sum_{i=1}^d (\tilde{b}_i(x) + \varepsilon c_i(x)) \frac{\partial}{\partial x_i} \end{aligned}$$

où $\tilde{b}_i(x) = b_i(x) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}(x)$ et l'adjoint L_ε^* de L_ε est:

$$(2.5) \quad L_\varepsilon^* = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \right) - \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left((\tilde{b}_i(x) + \varepsilon c_i(x)) \cdot \right).$$

2.2 Mesure invariante

Nous prouvons tout d'abord:

Lemme 2.2.1. $\forall \varepsilon \geq 0$, le processus de diffusion à valeurs dans \mathbb{T}^d $\{X_t^\varepsilon; t \geq 0\}$ possède une mesure invariante μ_ε .

Preuve :

Le résultat provient du fait que $\{\tilde{X}_t^\varepsilon; t \geq 0\}$ est un processus de Feller homogène à valeurs dans un ensemble compact.

Soit ν la loi de \tilde{X}_0^ε . Pour chaque $t > 0$, Γ sous-ensemble borélien de \mathbb{T}^d , soit

$$\mu_t(\Gamma) = \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{P}_\nu \left(\tilde{X}_s^\varepsilon \in \Gamma \right) ds$$

Comme $\{\mu_t; t > 0\}$ est une famille de probabilités sur un ensemble compact \mathbb{T}^d , il existe une suite $(t_n)_n$ croissant vers ∞ et une mesure de probabilité μ sur \mathbb{T}^d (Banach-Alaoglu + la suite est tendue) telles que

$$\mu_{t_n} \longrightarrow \mu, n \rightarrow \infty.$$

Soit $f \in C(\mathbb{T}^d)$. L'application $x \mapsto \mathbb{E}_x \left[f(\tilde{X}_t^\varepsilon) \right]$ est continue. Ainsi

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\nu \left[f(\tilde{X}_t^\varepsilon) \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mu_{t_n}} \left[f(\tilde{X}_t^\varepsilon) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} \mathbb{E}_\nu \left[P_t(f)(\tilde{X}_s^\varepsilon) \right] ds \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} \mathbb{E}_\nu \left[f(\tilde{X}_{t+s}^\varepsilon) \right] ds \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{t_n} \int_t^{t+t_n} \mathbb{E}_\nu \left[f(\tilde{X}_s^\varepsilon) \right] ds \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{t_n} \int_0^{t+t_n} \mathbb{E}_\nu \left[f(\tilde{X}_s^\varepsilon) \right] ds \\ &= \int_{\mathbb{T}^d} f(x) d\mu(x) \end{aligned}$$

et μ est invariante ■

L'unicité de la mesure invariante va résulter d'un résultat un peu plus fort. Prouvons tout d'abord

Proposition 2.2.2. $\forall \varepsilon \in [0, 1]$, le processus de Feller homogène $\{\tilde{X}_t^\varepsilon; t \geq 0\}$ possède une densité de transition $p_\varepsilon(t, x, y)$ qui est telle que pour chaque $t > 0$, il existe $c_t > 0$ tel que

$$p_\varepsilon(t, x, y) \geq c_t, \forall \varepsilon \in [0, 1], \forall x, y \in \mathbb{T}^d$$

Preuve :

Sous les hypothèses du cas elliptique, ceci résulte des inégalités d'Aronson (section 1.5) qui assurent que pour une diffusion à valeurs dans \mathbb{R}^d avec un générateur de forme divergence non dégénéré,

$$(2.6) \quad \frac{1}{Mt^{d/2}} \exp(-M|y-x|^2/t) \leq p_\varepsilon(t, x, y) \leq \frac{M}{t^{d/2}} \exp(-|y-x|^2/Mt).$$

La densité du processus sur le tore étant supérieure à celle du processus sur \mathbb{R}^d , on a bien le résultat ■

Nous avons maintenant besoin du

Lemme 2.2.3. *Pour tout $t > 0$ et $x, x' \in \mathbb{T}^d$, on a*

$$\|p_\varepsilon(t, x, \cdot) - p_\varepsilon(t, x', \cdot)\|_{L^1(\mathbb{T}^d)} \leq 2(1 - c_1)^{[t]}$$

Preuve :

Définissons tout d'abord un couplage de $(X_n^x, X_n^{x'}, n = 0, \dots, [t])$. Considérons une application $F_\varepsilon: \mathbb{T}^d \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{T}^d$, telle que si η possède une distribution uniforme sur $[0, 1]$, la variable aléatoire $F_\varepsilon(x, \eta)$ possède la densité de probabilité $\frac{p_\varepsilon(1, x, y) - c_1}{1 - c_1}$.

Soit $(U_1, \xi_1, \eta_1, \eta'_1, \dots, U_n, \xi_n, \eta_n, \eta'_n, \dots)$ des variables aléatoires indépendantes telles que les variables aléatoires ξ_n sont uniformément distribuées sur \mathbb{T}^d , les variables η_n, η'_n sont uniformément distribuées sur $[0, 1]$ et

$$U_n = \begin{cases} 1 & \text{avec probabilité } c_1 \\ 0 & \text{avec probabilité } 1 - c_1 \end{cases}$$

On définit alors les suites $X_n^x, X_n^{x'}, n \geq 1$ par récurrence. Pour tout $n \geq 0$, si $X_n^x = X_n^{x'}$, alors on pose $X_{n+1}^x = X_{n+1}^{x'} = F_\varepsilon(X_n^x, \eta_{n+1})$, sinon on pose

$$\begin{cases} X_{n+1}^x = U_{n+1}\xi_{n+1} + (1 - U_{n+1})F_\varepsilon(X_n^x, \eta_{n+1}) \\ X_{n+1}^{x'} = U_{n+1}\xi_{n+1} + (1 - U_{n+1})F_\varepsilon(X_n^{x'}, \eta'_{n+1}) \end{cases}$$

On montre par récurrence que X_n^x et $X_n^{x'}$ ont bien les lois voulues. Ainsi on a

$$\mathbb{P}(X_n^x \neq X_n^{x'}) = \mathbb{P}(U_1 = 0, \dots, U_n = 0) = (1 - c_1)^n.$$

De façon similaire, on définit $F_{t-[t]}(x, \cdot)$ de telle sorte que $F_{t-[t]}(x, \eta)$ possède la densité de probabilité $p_\varepsilon(t - [t], x, y)$ et si $X_{[t]}^x = X_{[t]}^{x'}$ alors on pose $X_t^x = X_t^{x'} = F_{t-[t]}(X_{[t]}^x, \eta_{[t]+1})$, sinon

$$\begin{cases} X_t^x = F_{t-[t]}(X_{[t]}^x, \eta_{[t]+1}) \\ X_t^{x'} = F_{t-[t]}(X_{[t]}^{x'}, \eta'_{[t]+1}) \end{cases}$$

On a alors

$$\mathbb{P} \left(X_t^x \neq X_t^{x'} \right) = \mathbb{P} \left(X_{[t]}^x \neq X_{[t]}^{x'} \right) = (1 - c_1)^{[t]}.$$

Or:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^d} |p_\varepsilon(t, x, y) - p_\varepsilon(t, x', y)| dy &= \sup_{A \subset \mathbb{T}^d} |\mathbb{P}(X_t^x \in A) - \mathbb{P}(X_t^{x'} \in A)| \\ &\leq 2\mathbb{P} \left(X_t^x \neq X_t^{x'} \right) \\ &\leq 2(1 - c_1)^{[t]} \end{aligned}$$

d'où le résultat ■

Corollaire 2.2.4. *Les probabilités de transition convergent en variation totale vers la mesure invariante à la vitesse exponentielle.*

Preuve :

On a:

$$\begin{aligned} \|\mu_t^\varepsilon(x, \cdot) - \mu_\infty^\varepsilon\|_{TV} &= \int_{\mathbb{T}^d} |p_\varepsilon(t, x, y) - p_\varepsilon(y)| dy \\ &= \int_{\mathbb{T}^d} |p_\varepsilon(t, x, y) - \int_{\mathbb{T}^d} p_\varepsilon(t, x', y) d\mu(x')| dy \\ &= \int_{\mathbb{T}^d} \left| \int_{\mathbb{T}^d} (p_\varepsilon(t, x, y) - p_\varepsilon(t, x', y)) d\mu(x') \right| dy \\ &\leq 2(1 - c_1)^{[t]} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Corollaire 2.2.5. *La mesure invariante est unique.*

Preuve :

Soit μ^ε et ν^ε deux mesures invariantes. Alors:

$$\begin{aligned} \|\mu^\varepsilon - \nu^\varepsilon\|_{TV} &= \sup_{A \subset \mathbb{T}^d} |\mu^\varepsilon(A) - \nu^\varepsilon(A)| \\ &= \sup_{A \subset \mathbb{T}^d} |\mu^\varepsilon(P_t^\varepsilon A) - \nu^\varepsilon(P_t^\varepsilon A)| \\ &= \sup_{A \subset \mathbb{T}^d} \left| \int_A \left(\int_{\mathbb{T}^d} p_\varepsilon(t, x, y) d\mu^\varepsilon(x) - \int_{\mathbb{T}^d} p_\varepsilon(t, x', y) d\nu^\varepsilon(x') \right) dy \right| \\ &= \int_{\mathbb{T}^d} \left| \int_{\mathbb{T}^d} p_\varepsilon(t, x, y) d\mu^\varepsilon(x) - \int_{\mathbb{T}^d} p_\varepsilon(t, x', y) d\nu^\varepsilon(x') \right| dy \\ &= \int_{\mathbb{T}^d} \left| \int_{\mathbb{T}^d} \int_{\mathbb{T}^d} p_\varepsilon(t, x, y) d\mu^\varepsilon(x) d\nu^\varepsilon(x') \right. \\ &\quad \left. - \int_{\mathbb{T}^d} \int_{\mathbb{T}^d} p_\varepsilon(t, x', y) d\nu^\varepsilon(x') d\mu^\varepsilon(x) \right| dy \\ &\leq \int_{\mathbb{T}^d} \int_{\mathbb{T}^d} \int_{\mathbb{T}^d} |p_\varepsilon(t, x, y) - p_\varepsilon(t, x', y)| dy d\nu^\varepsilon(x') d\mu^\varepsilon(x) \\ &\leq 2(1 - c_1)^{[t]} \end{aligned}$$

pour tout $t > 0$ ■

Corollaire 2.2.6. *Il existe une constante $\rho > 0$ telle que pour tout $\varepsilon \geq 0$ et $f \in L^\infty(\mathbb{T}^d)$,*

$$\left| \mathbb{E} \left[f(\tilde{X}_t^\varepsilon) \right] - \int_{\mathbb{T}^d} f(x) d\mu^\varepsilon(x) \right| \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)} e^{-\rho[t]}$$

Preuve :

Résulte immédiatement des corollaires précédents ■

REMARQUE: *Les calculs fait précédemment montrent aussi que*

$$\left| \mathbb{E}_x \left[f(\tilde{X}_t^\varepsilon) \right] - \int_{\mathbb{T}^d} f(x) d\mu^\varepsilon(x) \right| \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)} e^{-\rho[t]}$$

uniformément en $x \in \mathbb{T}^d$.

2.3 Mesure invariante: 2^{eme} méthode

On va exposer une autre façon d'obtenir le corollaire 2.2.6. Reprenons le travail effectué à la section 1.1 avec $H^1(\mathbb{T}^d)$ ($= W^{1,2}(\mathbb{T}^d)$). Nous voyons que l'opérateur T_λ du théorème 1.1.4 est, pour $\lambda \geq \lambda_0$, en fait l'inverse de $\lambda - L$ et est lié au semi-groupe P_t par

$$T_\lambda f(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathbb{E}_x \left[f(\tilde{X}_t) \right] dt.$$

Soit L^* l'adjoint formel de L :

$$(2.7) \quad L^* = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq d} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{i,j}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \right) - \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} (b_i \cdot)$$

Rappel de la section 1.1:

En utilisant l'alternative de Fredholm aux opérateurs T_λ pour λ assez grand, on obtient que les espaces $\text{Ker } L$ et $\text{Ker } L^*$ sont tous deux de dimension finie et de même dimension. Or d'après le principe du maximum 1.1.6 page 4 et la périodicité des fonctions, le premier de ces noyaux est formé des constantes sur le tore. Il est donc de dimension 1. En conséquence, il existe une solution $m \in H^1(\mathbb{T}^d) \setminus \{0\}$ à l'équation

$$L^* m = 0.$$

Lemme 2.3.1. *Cette solution m peut être choisie positive et telle que*

$$\int_{\mathbb{T}^d} m(x) dx = 1.$$

Preuve :

Soit $\lambda \geq \lambda_0$ et u la solution de l'équation

$$(\lambda - L^*)u = \lambda|m|.$$

On remarque que

$$(\lambda - L^*)(u + m) = \lambda(|m| + m),$$

$$(\lambda - L^*)(u - m) = \lambda(|m| - m).$$

Or si u est positive, $T_\lambda u$ est positive. Ainsi $u \geq m$ et $u \geq -m$, d'où $u \geq |m|$. D'autre part, on a

$$\int_{\mathbb{T}^d} L^*u(x) dx = \langle L^*u, 1 \rangle = \langle u, L1 \rangle = 0.$$

Ainsi, $\int_{\mathbb{T}^d} u(x) dx = \int_{\mathbb{T}^d} |m|(x) dx$ donc $u = |m|$ presque partout. En reportant dans la première équation, cela nous donne

$$L^*|m| = 0.$$

On peut donc choisir m positive non nulle. Par suite, on peut aussi fixer

$$\int_{\mathbb{T}^d} m(x) dx = 1$$

et cette dernière condition assure l'unicité d'une telle fonction m ■

Proposition 2.3.2. *La mesure de probabilité m est invariante pour le semi-groupe $(P_t)_t$.*

Preuve :

En effet,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{T}^d} P_t f(x) m(x) dx = \int_{\mathbb{T}^d} L P_t f(x) m(x) dx = \int_{\mathbb{T}^d} P_t f(x) L^* m(x) dx = 0$$

et $P_0 f(x) = f(x)$ ■

On montre alors que la densité de probabilité m est bornée de la façon suivante:

Corollaire 2.3.3. *Il existe deux constantes strictement positives δ et K telles que*

$$\delta \leq m(x) \leq K, pp.$$

Preuve :

Soit $E = \{x; m(x) < \delta\}$ où δ est donné par les estimations d'Aronson, ie

$$p(1, x, y) \geq \delta, \forall x, y \in \mathbb{T}^d.$$

Si par l'absurde la mesure de Lebesgue de E est strictement positive, alors

$$\begin{aligned}
 \delta|E| &= \int_{\mathbb{T}^d} \delta \mathbb{1}_E(x) dx \\
 &> \int_{\mathbb{T}^d} \mathbb{1}_E(x) m(x) dx \\
 &= \int_{\mathbb{T}^d} \int_{\mathbb{T}^d} p(1, x, y) \mathbb{1}_E(y) m(x) dx dy \\
 &\geq \delta|E|
 \end{aligned}$$

d'où une contradiction. Le même raisonnement conduit à $m(x) \leq K$ pour presque tout $x \in \mathbb{T}^d$ ■

Lemme 2.3.4. Pour tout $u \in L^\infty(\mathbb{T}^d) \cap \text{Dom}(L)$,

$$(2.8) \quad (Lu, u)_{L_m^2(\mathbb{T}^d)} = -\frac{1}{2}(a\nabla u, \nabla u)_{L_m^2(\mathbb{T}^d)}$$

Preuve :

Soit $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^d)$, alors

$$\begin{aligned}
 \varepsilon(\varphi, m\varphi) &= \frac{1}{2}(a\nabla\varphi, \nabla(m\varphi))_{L^2(\mathbb{T}^d)} - (b \cdot \nabla\varphi, m\varphi)_{L^2(\mathbb{T}^d)} \\
 &= \frac{1}{2}(a\nabla\varphi, \nabla(m)\varphi)_{L^2(\mathbb{T}^d)} + \frac{1}{2}(a\nabla\varphi, m\nabla\varphi)_{L^2(\mathbb{T}^d)} - (b \cdot \nabla\varphi, m)_{L^2(\mathbb{T}^d)} \\
 &= \frac{1}{2}(a\nabla\varphi, \nabla m)_{L^2(\mathbb{T}^d)} + \frac{1}{2}(a\nabla\varphi, \nabla\varphi)_{L_m^2(\mathbb{T}^d)} - \frac{1}{2}(b \cdot \nabla(\varphi^2), m)_{L^2(\mathbb{T}^d)} \\
 &= \frac{1}{4}(a\nabla(\varphi^2), \nabla m)_{L^2(\mathbb{T}^d)} + \frac{1}{2}(a\nabla\varphi, \nabla\varphi)_{L_m^2(\mathbb{T}^d)} + \frac{1}{2}(\nabla(\varphi^2), bm)_{L^2(\mathbb{T}^d)} \\
 &= \frac{1}{2}(a\nabla\varphi, \nabla\varphi)_{L_m^2(\mathbb{T}^d)} - \frac{1}{2}(\varphi^2, L^*m)_{L^2(\mathbb{T}^d)} \\
 &= \frac{1}{2}(a\nabla\varphi, \nabla\varphi)_{L_m^2(\mathbb{T}^d)}
 \end{aligned}$$

Comme $C^\infty(\mathbb{T}^d)$ est dense dans $H_0^1(\mathbb{T}^d)$, l'égalité précédente est vrai pour $\varphi \in H^1(\mathbb{T}^d)$ ■

On introduit maintenant la famille d'opérateurs $L_\varepsilon = L + \varepsilon \sum_{i=1}^d c_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ qui sont les générateurs

des processus $\{\tilde{X}_t^\varepsilon; t \geq 0\}$. On note $(P_t^\varepsilon)_t$ les semi-groupes respectifs de ces processus de diffusion sur le tore.

Proposition 2.3.5. Il existe deux constantes K et ρ qui dépendent seulement de a, b, c, d telles que:

$$\sup_{x \in \mathbb{T}^d} \left| \mathbb{E}_x \left[f(\tilde{X}_t^\varepsilon) \right] - \int_{\mathbb{T}^d} f(x) m(x) dx \right| \leq K \|f\|_{L^2(\mathbb{T}^d)} e^{-C(\varepsilon)t}$$

où $C(\varepsilon)$ converge vers ρ lorsque ε tend vers 0.

Preuve :

Soit $f \in C_0^\infty(\mathbb{T}^d)$ telle que $\int_{\mathbb{T}^d} f(x)m(x) dx = 0$. Soit $\delta^\varepsilon(t) = \|P_t^\varepsilon f\|_{L_m^2(\mathbb{T}^d)}^2$. A l'aide du corollaire 2.3.3 et du lemme 2.3.4, on a

$$\begin{aligned} \frac{d\delta^\varepsilon}{dt}(t) &= 2 \left\langle \frac{\partial P_t^\varepsilon f}{\partial t}, P_t^\varepsilon f \right\rangle_{L_m^2(\mathbb{T}^d)} \\ &= 2 \langle L_\varepsilon P_t^\varepsilon f, P_t^\varepsilon f \rangle_{L^2(\mathbb{T}^d)} \\ &= - \int_{\mathbb{T}^d} \langle a \nabla P_t^\varepsilon f, \nabla P_t^\varepsilon f \rangle m(x) dx + \varepsilon \int_{\mathbb{T}^d} \sum_{i=1}^d c_i(x) \frac{\partial P_t^\varepsilon}{\partial x_i}(x) P_t^\varepsilon f(x) m(x) dx \\ &\leq -\lambda \|\nabla P_t^\varepsilon f\|_{L_m^2(\mathbb{T}^d)}^2 + \varepsilon \|c\|_\infty \|\nabla P_t^\varepsilon f\|_{L_m^2(\mathbb{T}^d)} \|P_t^\varepsilon f\|_{L_m^2(\mathbb{T}^d)} \end{aligned}$$

En combinant le résultat du corollaire 2.3.3 et l'inégalité de Poincaré, on obtient

$$\|\nabla P_t^\varepsilon f\|_{L_m^2(\mathbb{T}^d)} \geq \frac{\delta C}{K} \|P_t^\varepsilon f\|_{L_m^2(\mathbb{T}^d)}$$

d'où

$$\frac{d\delta^\varepsilon}{dt}(t) \leq -C(\varepsilon)\delta^\varepsilon(t),$$

avec $C(\varepsilon)$ convergeant vers $\rho > 0$. Comme $\delta^\varepsilon(0) = \|f\|_{L_m^2(\mathbb{T}^d)}$, on a

$$\delta^\varepsilon(t) \leq \|f\|_{L_m^2(\mathbb{T}^d)} \exp(-C(\varepsilon)t) \leq K \|f\|_{L^2(\mathbb{T}^d)} \exp(-C(\varepsilon)t).$$

Le résultat est démontré par densité ■

2.4 Le théorème ergodique

On notera $\{X_t^\varepsilon; t \geq 0\}$ la solution de l'EDS (2.1). On appellera p_ε la densité de la mesure invariante μ^ε de $\{\tilde{X}_t^\varepsilon; t \geq 0\}$ et on écrira p pour p_0 .

Proposition 2.4.1. *Soit $f \in L^\infty(\mathbb{T}^d)$. On désigne par $\{X_t^\varepsilon; t \geq 0\}$ le processus solution de (2.1). Alors*

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t f \left(\frac{X_s^\varepsilon}{\varepsilon} \right) ds - t \int_{\mathbb{T}^d} f(x)p(x) dx \right)^2 \right] \rightarrow 0$$

quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Preuve :

Remarquons tout d'abord que pour toute fonction g intégrable, on a

$$\left(\int_a^b g(x) dx \right)^2 = 2 \int_a^b g(x) \int_a^x g(y) dy dx$$

(d'après le théorème de Fubini).

On remarque, quitte à poser

$$\bar{f} = f - \int_{\mathbb{T}^d} f(x)p(x) dx,$$

qu'il suffit de démontrer le résultat pour les fonctions f telles que

$$\int_{\mathbb{T}^d} f(x)p(x) dx = 0.$$

Soit $f \in L^\infty(\mathbb{T}^d)$ telle que

$$\int_{\mathbb{T}^d} f(x)p(x) dx = 0.$$

Posons $A_\varepsilon = \int_{\mathbb{T}^d} f(x)p_\varepsilon(x) dx$. Etant donné le théorème sur les EDS à paramètres, la fonction $\varepsilon \mapsto \tilde{X}_t^\varepsilon \in L^2(\mathbb{T}^d)$ est continue donc

$$A_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(\int_0^t f(\tilde{X}_u^\varepsilon) du \right)^2 \right] &= 2\mathbb{E} \left[\int_0^t \int_0^s f(\tilde{X}_s^\varepsilon) f(\tilde{X}_u^\varepsilon) du ds \right] \\ &= 2 \int_0^t \int_0^s \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[f(\tilde{X}_s^\varepsilon) | \mathcal{F}_u \right] f(\tilde{X}_u^\varepsilon) \right] du ds \\ &= 2 \int_0^t \int_0^s \mathbb{E} \left[(P_{s-u}f)(\tilde{X}_u^\varepsilon) f(\tilde{X}_u^\varepsilon) \right] du ds \\ &\leq 2\|f\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)} \int_0^t \int_0^s \mathbb{E} \left[(P_{s-u}f)(\tilde{X}_u^\varepsilon) \right] du ds \\ &\stackrel{(2.2.6)}{=} 2c\|f\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)}^2 \int_0^t \int_0^s e^{-\rho(s-u)} du ds \\ &\quad + 2c\|f\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)}^2 \int_0^t \int_0^s \int_{\mathbb{T}^d} f(x)p_\varepsilon(x) dx du ds \\ &= 2c\|f\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)}^2 \rho^{-2}(-1 + \rho t + e^{-\rho t}) + c\|f\|_\infty^2 t^2 A_\varepsilon. \end{aligned}$$

En conséquence,

$$\mathbb{E} \left[\left(\varepsilon^2 \int_0^{t/\varepsilon^2} f(\tilde{X}_u^\varepsilon) du \right)^2 \right] \leq 2c\|f\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)}^2 \rho^{-2}(-\varepsilon^4 + \rho\varepsilon^2 t + \varepsilon^4 e^{-\rho t/\varepsilon^2}) + c\|f\|_\infty^2 t^2 A_\varepsilon \rightarrow 0$$

lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ ■

REMARQUE: On peut aussi montrer à l'aide de la remarque 2.2 que l'on a

$$\mathbb{E}_x \left[\left(\int_0^t f \left(\frac{X_s^\varepsilon}{\varepsilon} \right) ds - t \int_{\mathbb{T}^d} f(x)p(x) dx \right)^2 \right] \rightarrow 0$$

uniformément en $x \in \mathbb{R}^d$.

2.5 L'équation de Poisson

Le corollaire 2.2.6 va nous servir à exprimer les solutions de l'équation de Poisson sur le tore \mathbb{T}^d , associée à l'opérateur L .

On note maintenant $p = p_0$, $\mu = \mu^0$ et $\tilde{X} = \tilde{X}^0$.

Le problème est le suivant. Soit $f \in L^\infty(\mathbb{T}^d)$, qui satisfait

$$(2.9) \quad \int_{\mathbb{T}^d} f(x)p(x) dx = 0.$$

Comme L est un opérateur non-borné fermé à domaine dense, il existe (voir [Brezis] page 28) une solution \hat{f} unique à une constante additive près telle que:

$$(2.10) \quad L\hat{f}(x) + f(x) = 0, \quad x \in \mathbb{T}^d.$$

On fixe cette constante en imposant

$$(2.11) \quad \int_{\mathbb{T}^d} \hat{f}(x) d\mu(x) = 0.$$

Cette façon de fixer la constante sert, à l'aide de la proposition 2.4.1, à garantir l'intégrabilité de la fonction $u(t, x)$ du théorème suivant.

Théorème 2.5.1. Soit $f \in L^\infty(\mathbb{T}^d)$ qui satisfait la condition (2.9). Alors \hat{f} définie par

$$\hat{f}(x) = \int_0^\infty \mathbb{E}_x [f(\tilde{X}_t)] dt$$

est une solution de (2.10). De plus, on a

$$\hat{f} \in \bigcap_{p \geq 1} W^{2,p}(\mathbb{T}^d).$$

Preuve :

Considérons l'équation aux dérivées partielles parabolique suivante

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) - Lu(t, x) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{T}^d \\ u(0, x) = f(x), & x \in \mathbb{T}^d \end{cases}$$

Cette équation a une solution dans

$$C(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{T}^d)) \cap C^1(\mathbb{R}_+^*; L^2(\mathbb{T}^d)) \cap C(\mathbb{R}_+^*; H^1(\mathbb{T}^d))$$

qui est donnée par la formule de Feynmann-Kac : $u(t, x) = \mathbb{E}_x [f(\tilde{X}_t)]$.

D'après le corollaire 2.2.6 avec $\varepsilon = 0$, $u(t, \cdot) \rightarrow 0$ dans $L^\infty(\mathbb{T}^d)$ à la vitesse exponentielle lorsque $t \rightarrow \infty$ et si l'on pose $v(t, x) = \int_0^t u(s, x) ds$ on a:

$$\|v(t, \cdot)\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{T}^d} |v(t, x)| \leq C$$

et

$$v(t, x) \rightarrow v(x) = \int_0^\infty \mathbb{E}_x [f(\tilde{X}_t)] dt, \text{ quand } t \rightarrow \infty.$$

D'après le théorème de Banach-Alaoglu, il existe une suite $(t_n)_n$ telle que $t_n \nearrow \infty$ et $v(t_n, \cdot) \rightarrow v$ pour la topologie *-faible de $L^\infty(\mathbb{T}^d)$.

Comme $u(t, x) = f(x) + Lv(t, x)$, on a:

$$\forall \varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^d), (u(t_n), \varphi) = (v(t_n), L^* \varphi) + (f, \varphi)$$

et en faisant tendre n vers ∞ , on obtient que:

$$\forall \varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^d), (v, L^* \varphi) + (f, \varphi) = 0.$$

Or on sait déjà que $v \in L^2(\mathbb{T}^d)$ et

$$\forall \varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^d), (\hat{f}, L^* \varphi) + (f, \varphi) = 0,$$

donc

$$\forall \varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^d), (v - \hat{f}, L^* \varphi) = 0.$$

d'où $v - \hat{f} \in (\text{Im}(L^*))^\perp$ dans $L^2(\mathbb{T}^d)$, et $v - \hat{f} \in \ker(L)$ ie $v = \hat{f}$ a une constante additive près et comme

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^d} v(x) p(x) dx &= \int_{\mathbb{T}^d} \int_0^\infty P_t f(x) dt p(x) dx \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{T}^d} P_t f(x) p(x) dx dt \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{T}^d} f(x) p(x) dx dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

on a bien $\hat{f} = \int_0^\infty \mathbb{E}_x [f(\tilde{X}_t)] \in H^1(\mathbb{T}^d)$.

Pour obtenir le fait que $v \in \bigcap_{p \geq 1} W^{2,p}(\mathbb{T}^d)$ voir la section 1.1 ■

2.6 Homogénéisation des EDP paraboliques linéaires

Les fonctions a, b, c vérifient les conditions des sections précédentes. Considérons des fonctions e et $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ mesurables et bornées, périodiques de période 1 dans chaque direction et $g \in C(\mathbb{R}^d)$ qui croît au plus polynômiallement en l'infini. Pour tout $\varepsilon > 0$, on considère l'équation aux dérivées partielles:

$$(2.12) \quad \begin{cases} \frac{\partial u^\varepsilon(t, x)}{\partial t} = \mathcal{L}_\varepsilon u^\varepsilon(t, x) + \left(\frac{1}{\varepsilon}e\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)u^\varepsilon(t, x), & t > 0, x \in \mathbb{R}^d, \\ u^\varepsilon(0, x) = g(x), & x \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

où

$$\mathcal{L}_\varepsilon = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d \left(\frac{1}{\varepsilon}b_i \left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + c_i \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

On suppose que

$$\forall i = 1, \dots, d, \int_{\mathbb{T}^d} b_i(x) d\mu(x) = 0, \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{T}^d} e(x) d\mu(x) = 0,$$

où μ est la probabilité invariante du processus $\tilde{X}_t = \tilde{X}_t^0, t \geq 0$ de générateur donné par

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Si l'on pose

$$Y_t^\varepsilon = \int_0^t \left[\frac{1}{\varepsilon} e \left(\frac{X_s^\varepsilon}{\varepsilon} \right) + f \left(\frac{X_s^\varepsilon}{\varepsilon} \right) \right] ds, \quad t \geq 0,$$

alors la solution de (2.12) est donnée d'après la formule de Feynmann-Kac par

$$u^\varepsilon(t, x) = \mathbb{E} [g(X_t^\varepsilon) \exp(Y_t^\varepsilon)]$$

où X_t^ε est la solution de (2.1).

Soit

$$\hat{e}(x) = \int_0^\infty \mathbb{E}_x [e(\tilde{X}_t)] dt, \quad \hat{b}_i(x) = \int_0^\infty \mathbb{E}_x [b_i(\tilde{X}_t)] dt, \quad i = 1, \dots, d, \quad x \in \mathbb{T}^d$$

les solutions des équations de Poisson

$$L\hat{e} + e(x) = 0, \quad L\hat{b}_i(x) + b_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, d.$$

On pose:

$$\begin{aligned} A &= \int_{\mathbb{T}^d} (I + {}^t\nabla\hat{b}) \cdot a \cdot (I + \nabla\hat{b})(x) d\mu(x) \\ C &= \int_{\mathbb{T}^d} (I + {}^t\nabla\hat{b})(c + a \cdot \nabla\hat{e})(x) d\mu(x) \\ D &= \int_{\mathbb{T}^d} \left(\frac{1}{2} {}^t\nabla\hat{e} \cdot a \nabla\hat{e} + f + {}^t\nabla\hat{e} \cdot c \right) (x) d\mu(x) \end{aligned}$$

En utilisant les formules d'Itô et de Feynmann-Kac, on montre que

$$u(t, x) = \mathbb{E} \left[g(x + Ct + A^{\frac{1}{2}} B_t) \right] e^{Dt}$$

est la solution de

$$(2.13) \quad \begin{cases} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d A_{ij} \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d C_i \frac{\partial u(t, x)}{\partial x_i} + Du(t, x) \\ u(0, x) = g(x), x \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

Théorème 2.6.1. *Pour tout $t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d$, on a*

$$u^\varepsilon(t, x) \rightarrow u(t, x)$$

lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Preuve :

Posons $\bar{X}_t^\varepsilon = \frac{X_t^\varepsilon}{\varepsilon}$,

$$\hat{X}_t^\varepsilon = X_t^\varepsilon + \varepsilon \left(\hat{b}(\bar{X}_t^\varepsilon) - \hat{b}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right)$$

$$\hat{Y}_t^\varepsilon = Y_t^\varepsilon + \varepsilon \left(\hat{e}(\bar{X}_t^\varepsilon) - \hat{e}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right)$$

Rappelons que d'après le théorème 2.5.1, les fonctions \hat{e} et $\hat{b}_i, i = 1, \dots, d$ sont bornées sur le tore. Ainsi on a $|\hat{X}_t^\varepsilon - X_t^\varepsilon| + |\hat{Y}_t^\varepsilon - Y_t^\varepsilon| \leq C\varepsilon$ et la limite de $u^\varepsilon(t, x)$ est la même que

$$\hat{u}^\varepsilon(t, x) = \mathbb{E} \left[g(\hat{X}^\varepsilon) \exp(\hat{Y}^\varepsilon) \right].$$

Nous savons aussi par le théorème 2.5.1 que les fonctions \hat{e} et $\hat{b}_i, i = 1, \dots, d$ appartiennent à $\bigcap_{p \geq 1} W^{2,p}(\mathbb{T}^d)$. On applique alors une extension de la formule d'Itô due à Krylov (voir [Krylov]) qui donne

$$\begin{aligned} \hat{e}(\bar{X}_t^\varepsilon) - \hat{e}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t {}^t \nabla \hat{e}(\bar{X}_s^\varepsilon) \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon} b(\bar{X}_s^\varepsilon) + c(\bar{X}_s^\varepsilon) \right) ds + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t {}^t \nabla \hat{e}(\bar{X}_s^\varepsilon) \cdot \sigma(\bar{X}_s^\varepsilon) dB_s \\ &\quad + \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^t \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(\bar{X}_s^\varepsilon) \frac{\partial^2 \hat{e}}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{X}_s^\varepsilon) ds \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t {}^t \nabla \hat{e}(\bar{X}_s^\varepsilon) \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon} b(\bar{X}_s^\varepsilon) + c(\bar{X}_s^\varepsilon) \right) ds + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t {}^t \nabla \hat{e}(\bar{X}_s^\varepsilon) \cdot \sigma(\bar{X}_s^\varepsilon) dB_s \\ &\quad - \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^t {}^t \nabla \hat{e}(\bar{X}_s^\varepsilon) \cdot b(\bar{X}_s^\varepsilon) ds - \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^t e(\bar{X}_s^\varepsilon) ds \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \left({}^t \nabla \hat{e}(\bar{X}_s^\varepsilon) \cdot c(\bar{X}_s^\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon} e(\bar{X}_s^\varepsilon) \right) ds + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t {}^t \nabla \hat{e}(\bar{X}_s^\varepsilon) \cdot \sigma(\bar{X}_s^\varepsilon) dB_s \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\hat{Y}_t^\varepsilon = \int_0^t ({}^t\nabla\hat{e}(\bar{X}_s^\varepsilon) \cdot c(\bar{X}_s^\varepsilon) + f(\bar{X}_s^\varepsilon)) ds + \int_0^t {}^t\nabla\hat{e}(\bar{X}_s^\varepsilon) \cdot \sigma(\bar{X}_s^\varepsilon) dB_s.$$

Introduisons une nouvelle probabilité $\tilde{\mathbb{P}}$ (qui dépend de ε) définie par:

$$\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \exp \left(\int_0^t ({}^t\nabla\hat{e} \cdot \sigma)(\bar{X}_s^\varepsilon) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t ({}^t\nabla\hat{e} \cdot a \cdot \nabla\hat{e})(\bar{X}_s^\varepsilon) ds \right).$$

Alors

$$u^\varepsilon(t, x) = \tilde{\mathbb{E}} \left[g(\hat{X}_t^\varepsilon) \exp \left(\int_0^t ({}^t\nabla\hat{e} \cdot c + f + \frac{1}{2} {}^t\nabla\hat{e} \cdot a \cdot \nabla\hat{e})(\bar{X}_s^\varepsilon) ds \right) \right].$$

En procédant avec \hat{X}_t^ε comme avec \hat{Y}_t^ε , on obtient:

$$\hat{X}_t^\varepsilon = x + \int_0^t (c(\bar{X}_s^\varepsilon) + {}^t\nabla\hat{b} \cdot c(\bar{X}_s^\varepsilon)) ds + \int_0^t (\sigma(\bar{X}_s^\varepsilon) + {}^t\nabla\hat{b} \cdot \sigma(\bar{X}_s^\varepsilon)) dB_s,$$

ce qui peut encore s'écrire:

$$\hat{X}_t^\varepsilon = x + \int_0^t (I + {}^t\nabla\hat{b})(c + a \cdot \nabla\hat{e})(\bar{X}_s^\varepsilon) ds + \int_0^t (I + {}^t\nabla\hat{b})\sigma(\bar{X}_s^\varepsilon) d\tilde{B}_s$$

où

$$\tilde{B}_t = B_t - \int_0^t ({}^t\nabla\hat{e} \cdot \sigma)(\bar{X}_s^\varepsilon) ds.$$

En fait, d'après le théorème de Girsanov, $\tilde{\mathbb{P}}$ est une probabilité sous laquelle \tilde{B}_t est un mouvement brownien standard d -dimensionnel.

Admettons pour le moment le lemme suivant:

Lemme 2.6.2. *Les convergences suivantes ont lieu en $\tilde{\mathbb{P}}$ probabilité, pour tout $t \geq 0$*

$$(i) \sup_{0 \leq s \leq t} \left| \int_0^s (I + {}^t\nabla\hat{b})(c + a \cdot \nabla\hat{e})(\bar{X}_r^\varepsilon) dr - Cs \right| \rightarrow 0$$

$$(ii) \int_t^{t'} (I + {}^t\nabla\hat{b}) \cdot a \cdot (I + \nabla\hat{b})(\bar{X}_s^\varepsilon) ds \rightarrow A(t' - t)$$

$$(iii) \int_0^t (f + {}^t\nabla\hat{e} \cdot c + \frac{1}{2} {}^t\nabla\hat{e} \cdot a \cdot \nabla\hat{e})(\bar{X}_s^\varepsilon) ds \rightarrow Dt$$

Etant donnée la partie (i) du lemme 2.6.2, il suffit, pour montrer que le processus $\{\hat{X}_t^\varepsilon; t \geq 0\}$ converge en loi quand $\varepsilon \rightarrow 0$ vers le processus gaussien

$$\left\{ x + Ct + A^{\frac{1}{2}} B_t; t \geq 0 \right\},$$

de montrer le lemme suivant:

Lemme 2.6.3. *On a :*

$$\int_0^\cdot (I + {}^t\nabla\hat{b}) \cdot \sigma(\bar{X}_s^\varepsilon) d\tilde{B}_s \rightarrow A^{1/2}B. ,$$

lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ au sens de la convergence en loi dans l'espace $C([0, t]; \mathbb{R}^d)$.

Le théorème résulte alors de (iii), du fait que $\mathbb{E} [g(x + Ct + A^{1/2}B_t)e^{Dt}] < \infty$ ■

Preuve du lemme 2.6.2:

On remarque tout d'abord par la proposition 2.4.1 que (i) (sans le sup), (ii) et (iii) ont lieu sous \mathbb{P} . Il reste à montrer que ce résultat reste vrai sous $\tilde{\mathbb{P}}$ (qui dépend en fait de ε). Montrons le par exemple pour (ii).

On pose pour une constante $\eta > 0$

$$K_\varepsilon = \left\{ \left| \int_t^{t'} (I + {}^t\nabla\hat{b}) \cdot a \cdot (I + \nabla\hat{b})(\bar{X}_s^\varepsilon) ds - A(t' - t) \right| \geq \eta \right\}$$

On sait déjà que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}(K_\varepsilon) = 0.$$

On note $Z_t^\varepsilon = \frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_t}$. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\tilde{\mathbb{P}}(K_\varepsilon) = \tilde{\mathbb{E}}[\mathbb{1}_{K_\varepsilon}] = \mathbb{E}[Z_t^\varepsilon \mathbb{1}_{K_\varepsilon}] \leq \mathbb{P}(K_\varepsilon)^{1/2} \mathbb{E}[(Z_t^\varepsilon)^2].$$

Or si l'on pose $\varphi_s = {}^t\nabla\hat{e} \cdot \sigma(\bar{X}_s^\varepsilon)$ on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(Z_t^\varepsilon)^2] &= \mathbb{E} \left[\exp \left(2 \int_0^t \varphi_s dB_s - \int_0^t \|\varphi_s\|^2 ds \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\exp \left(2 \int_0^t \varphi_s dB_s - 4 \int_0^t \|\varphi_s\|^2 ds \right) \exp \left(3 \int_0^t \|\varphi_s\|^2 ds \right) \right] \\ &\stackrel{C-S}{\leq} \mathbb{E} \left[\exp \left(4 \int_0^t \varphi_s dB_s - 8 \int_0^t \|\varphi_s\|^2 ds \right) \right]^{\frac{1}{2}} \mathbb{E} \left[\exp \left(6 \int_0^t \|\varphi_s\|^2 ds \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\stackrel{prop2.4.1}{\leq} \mathbb{E} \left[\exp \left(6t \int_{\mathbb{T}^d} {}^t\nabla\hat{e} \cdot a \cdot \nabla\hat{e}(x) p(x) dx \right) \right] (1 + o(1)) \end{aligned}$$

On a utilisé que $\nabla\hat{e}$ est borné. En effet, on sait que $e \in \bigcap_{p \geq 1} W^{2,p}(\mathbb{T}^d) \subset C^1(\bar{\Omega})$ d'après les injections sur les espaces de Sobolev.

Pour ce qui est de (i), le même raisonnement montre qu'il suffit de le vérifier sous \mathbb{P} . Pour cela, on définit $\tilde{c} = (I + {}^t\nabla\hat{b})(c + a \cdot \nabla\hat{e})$, $C_t^\varepsilon = \int_0^t \tilde{c}(\bar{X}_s^\varepsilon) ds$, $C_t^{\varepsilon,p} = C_{[t]_p}^\varepsilon$ pour $p \in \mathbb{N}$. Nous avons alors :

$$\sup_{s \leq t} |C_s^\varepsilon - Cs| \leq \frac{2}{p} \|\tilde{c}\|_\infty + \sup_{s \leq t} |C_s^{\varepsilon,p} - C[s]_p/p|.$$

De la première remarque de la preuve résulte le fait que pour p fixé le second terme tend vers 0 en probabilité, et le premier terme tend trivialement vers 0 quand $p \rightarrow \infty$, et cela donne (i) ■

Preuve du lemme 2.6.3:

• Nous allons tout d'abord montrer que les lois sur $C([0, t]; \mathbb{R}^d)$ des processus

$$M^\varepsilon = \int_0^\cdot (I + {}^t\nabla\hat{b})\sigma(\bar{X}_r^\varepsilon) d\tilde{B}_r, \varepsilon > 0$$

(sous $\tilde{\mathbb{P}}_\varepsilon$) forment une famille tendue de probabilités sur $C([0, t]; \mathbb{R}^d)$. Définissons pour cela le module de continuité de M^ε :

$$\omega_\varepsilon(\delta) = \sup_{\substack{0 \leq s, r \leq t \\ |s-r| \leq \delta}} |M_s^\varepsilon - M_r^\varepsilon|, \forall \delta > 0$$

et montrons ensuite que $\forall \eta > 0, \exists \delta > 0, \forall \varepsilon > 0$,

$$\tilde{\mathbb{P}}_\varepsilon(\omega_\varepsilon(\delta) > \eta) \leq \eta.$$

Soit $\eta > 0$ et $0 < \delta < 1$. Pour $0 \leq i < \frac{t}{\delta}$ on pose

$$F_i^\varepsilon = \left\{ \sup_{i\delta < s \leq (i+1)\delta \wedge t} |M_s^\varepsilon - M_{i\delta}^\varepsilon| > \frac{\eta}{3} \right\}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{P}}_\varepsilon(\omega_\varepsilon(\delta) > \eta) &\leq \sum_{0 \leq i < t/\delta} \tilde{\mathbb{P}}_\varepsilon(F_i^\varepsilon) \\ &\leq \frac{t}{\delta} \sup_{0 \leq i < t/\delta} \tilde{\mathbb{P}}_\varepsilon(F_i^\varepsilon) \end{aligned}$$

On pose $\rho_s^\varepsilon = (I + {}^t\nabla\hat{b}) \cdot a \cdot (I + \nabla\hat{b})(\bar{X}_s^\varepsilon)$. En utilisant les inégalités de Markov et Davis-Burkholder-Gundy pour $p > 2$, on a

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{P}}_\varepsilon(F_i^\varepsilon) &\leq C\eta^{-p} \tilde{\mathbb{E}}_\varepsilon \left[\left(\int_{i\delta}^{(i+1)\delta \wedge t} |\rho_s^\varepsilon|^2 ds \right)^{p/2} \right] \\ &\leq C'\eta^{-p} \delta^{p/2}, \end{aligned}$$

et en combinant les deux dernières inégalités on obtient,

$$\tilde{\mathbb{P}}_\varepsilon(\omega_\varepsilon(\delta) > \eta) \leq C\eta^{-p} \delta^{p/2-1}$$

et on obtient le résultat désiré en choisissant $\delta = (\eta^{p+1}/C)^{2/(p-2)} \wedge 1$.

Montrons maintenant que la famille est bien tendue. Soit $\eta > 0$. Vu ce qui précède, $\forall n \in \mathbb{N}, \exists \delta_n > 0, \forall \varepsilon > 0, \tilde{\mathbb{P}}_\varepsilon(\omega_\varepsilon(\delta_n) > \eta 2^{-n}) \leq \eta 2^{-n}$.

On pose alors

$$K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{\delta > 0} \{f \in C([0, t]; \mathbb{R}^d); \omega_f(\delta) \leq 2^{-n} \eta \text{ et } f(0) = 0\}.$$

Le fait que $\forall f \in K, f(0) = 0$ et l'équicontinuité assure que K est borné dans $C([0, t]; \mathbb{R}^d)$ et le théorème d'Ascoli permet de conclure que K est compact. De plus

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{P}}_\varepsilon(K) &\geq \tilde{\mathbb{P}}_\varepsilon \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \{f \in C([0, t]; \mathbb{R}^d); \omega_\varepsilon(\delta_n) \leq \eta 2^{-n}\} \right) \\ &= 1 - \tilde{\mathbb{P}}_\varepsilon \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{\omega_\varepsilon(\delta_n) > \eta 2^{-n}\} \right) \\ &\geq 1 - \sum_{n \geq 1} \tilde{\mathbb{P}}_\varepsilon(\omega_\varepsilon(\delta_n) > \eta 2^{-n}) \\ &\geq 1 - \sum_{n \geq 1} \frac{\eta}{2^n} \\ &= 1 - \eta \end{aligned}$$

ce qui montre bien que la famille est tendue.

• Il ne reste alors plus qu'à montrer que le processus $\{A^{1/2} B_t; t \geq 0\}$ est l'unique valeur d'adhérence de cette famille quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Soit $\{M_t; t \geq 0\}$ une valeur d'adhérence de cette famille pour $\varepsilon \rightarrow 0$, c'est-à-dire qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_n$ qui converge vers 0 telle que $\forall t > 0$ et $\forall \Phi: C([0, t]; \mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée, on a

$$\tilde{\mathbb{E}}[\Phi(M_{\varepsilon_n})] \rightarrow \mathbb{E}[\Phi(M)] \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

L'uniforme intégrabilité des variables $\sup_{[0, t]} |M_s^\varepsilon|^2$ (les coefficients sont bornés) assure que $(M_s)_{0 \leq s \leq t}$ est un processus tel que $\sup_{0 \leq s \leq t} \mathbb{E}(|M_t|^2) < \infty$. D'autre part, si l'on fixe $0 \leq s < r \leq t$ et si l'on se donne une fonction ψ_s continue et bornée sur $C([0, s]; \mathbb{R}^d)$, on remarque que:

$$\tilde{\mathbb{E}}[(M_r^\varepsilon - M_s^\varepsilon)\psi_s(M^\varepsilon)] = 0$$

donc en passant à la limite pour $\varepsilon_n \rightarrow 0$:

$$\mathbb{E}[(M_r - M_s)\psi_s(M)] = 0$$

ce qui assure du fait de l'orthogonalité des accroissements que M est une martingale (continue). En procédant de même, on a

$$\tilde{\mathbb{E}}[(M_r^\varepsilon \cdot {}^t M_r^\varepsilon - M_s^\varepsilon \cdot {}^t M_s^\varepsilon)\psi_s(M_s^\varepsilon)] = \tilde{\mathbb{E}}\left[\psi_s(M^\varepsilon) \int_s^r \rho_v^\varepsilon dv\right]$$

d'où l'on tire en utilisant le lemme 2.6.2:

$$\mathbb{E} [(M_r^t M_r - M_s^t M_s) \psi_s(M_s)] = \mathbb{E} [\psi_s(M)] A(r - s)$$

et on en déduit alors que le processus croissant associé à M est $\{As; 0 \leq s \leq t\}$.

Posons $N = A^{-1/2}M$. Nous avons montré que N est une martingale continue telle que $\{N_s^t N_s - sI; 0 \leq s \leq t\}$ soit une martingale. Le théorème de Lévy assure alors que N est un mouvement brownien standard d -dimensionnel ■

Chapter 3

Homogénéisation en milieu périodique: cas dégénéré

Ce chapitre concerne l'homogénéisation des opérateurs sous forme divergence à coefficients périodiques mais ne vérifiant plus la condition d'ellipticité. Pour obtenir des résultats similaires au chapitre précédent sans cette condition, nous compenserons en supposant les coefficients réguliers et en supposant que les probabilités de transition du processus de diffusion vérifient une condition de Doeblin. La démarche que nous suivrons alors est quasi-similaire au chapitre précédent.

3.1 Introduction

Soit $\varepsilon > 0$, on note toujours $\{X_t^{x,\varepsilon}\}$ la solution de l'EDS:

$$(3.1) \quad X_t^{x,\varepsilon} = x + \int_0^t \left[c \left(\frac{X_s^{x,\varepsilon}}{\varepsilon} \right) + \frac{1}{\varepsilon} b \left(\frac{X_s^{x,\varepsilon}}{\varepsilon} \right) \right] ds + \int_0^t \sigma \left(\frac{X_s^{x,\varepsilon}}{\varepsilon} \right) dB_s,$$

où c, b, σ sont périodiques de classe C^1 . On notera X_t^ε pour $X_t^{x,\varepsilon}$. On définit comme précédemment $\tilde{X}_t^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} X_{\varepsilon^2 t}^\varepsilon$ qui vérifie l'EDS

$$(3.2) \quad \tilde{X}_t^\varepsilon = \frac{x}{\varepsilon} + \int_0^t \left(\varepsilon c(\tilde{X}_s^\varepsilon) + b(\tilde{X}_s^\varepsilon) \right) ds + \int_0^t \sigma(\tilde{X}_s^\varepsilon) dB_s,$$

et qui est toujours considéré comme processus à valeurs dans le tore \mathbb{T}^d .

Hypothèse 3.1.1. Cas dégénéré

i) b, c, σ sont périodiques de classe C^1 .

ii) Si $a = \sigma^t \sigma$ alors $\sum_{i,j=1}^d \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \in L^1(\mathbb{T}^d)$.

iii) On appelle $p_\varepsilon(t, x, dz)$ la probabilité de transition du processus de Markov $\{\tilde{X}_t^\varepsilon\}$ à valeurs dans le tore \mathbb{T}^d . On suppose que la condition de Doeblin suivante est satisfaite:
 $\exists t_0 > 0, \exists \alpha > 0$ et il existe une probabilité sur le tore q tels que $\forall \varepsilon \in [0, 1], \forall x \in \mathbb{T}^d, \forall A$ borélien de \mathbb{T}^d ,

$$p_\varepsilon(t, x, A) \geq \alpha \int_A dQ.$$

iv) On suppose qu'il existe $t_1 > 0$ tel que pour toute fonction $f \in C_b(\mathbb{T}^d)$, l'application

$$x \mapsto \int_{\mathbb{T}^d} f(y) p(t_1, x, dy)$$

est de classe C^1 et qu'il existe des mesures signées $q_i(t_1, x, \cdot), i = 1, \dots, d$, continues par rapport à x telles que

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\mathbb{T}^d} f(y) p(t_1, x, dy) = \int_{\mathbb{T}^d} f(y) q_i(t_1, x, dy)$$

REMARQUE: Cette dernière hypothèse sert à garantir la dérivabilité des solutions de l'équation de Poisson sur le tore. Nous pouvons nous affranchir de cette hypothèse dès que l'on dispose d'un autre moyen pour prouver cette dérivabilité.

On note L le générateur infinitésimal de $\{\tilde{X}, t \geq 0\}$:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d b_i \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^d \tilde{b}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \end{aligned}$$

$$\text{pù } \tilde{b}_i(x) = b_i(x) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} a_{i,j}(x).$$

3.2 Mesure invariante

En utilisant les mêmes arguments qu'au chapitre 2 c'est-à-dire le fait que $\{\tilde{X}_t^\varepsilon\}$ est un processus de Feller à valeurs dans un ensemble compact, on montre que ce processus admet une mesure invariante.

Dans le chapitre 2, on avait utilisé les estimations d'Aronson pour obtenir l'unicité et une estimation de la vitesse de convergence vers cette mesure. Ces arguments étant propres au cas elliptique, il faut maintenant trouver d'autres solutions. C'est la condition de Doeblin qui va permettre de retrouver les mêmes résultats toujours avec une méthode de couplage.

Lemme 3.2.1. *Pour tout $x, x' \in \mathbb{T}^d$ et pour tout $t > 0$ on a*

$$\|p_\varepsilon(t, x, \cdot) - p_\varepsilon(t, x', \cdot)\|_{VT} \leq 2(1 - c_1)^{[t]}.$$

Preuve :

Soit $t_0, \alpha > 0$ et q donnés par la condition de Doeblin. On note Q la probabilité $q(x) dx$ sur le tore. On reprend maintenant en partie les grands axes de la démonstration correspondante du chapitre 2.

Définissons tout d'abord un couplage de $(\tilde{X}_{nt_0}^{\varepsilon, x}, \tilde{X}_{nt_0}^{\varepsilon, x'}, n = 0, \dots, [t])$. Considérons une application $F_\varepsilon: \mathbb{T}^d \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{T}^d$, telle que si η possède une distribution uniforme sur $[0, 1]$, la variable aléatoire $F_\varepsilon(y, \eta)$ suit la loi de probabilité: $\frac{1}{1-\alpha}(p_\varepsilon(t_0, x, dz) - \alpha Q)$.

Soit $(U_1, \xi_1, \eta_1, \eta'_1, \dots, U_n, \xi_n, \eta_n, \eta'_n, \dots)$ des variables aléatoires indépendantes telles que les variables aléatoires ξ_n aient pour loi de probabilité Q sur \mathbb{T}^d , les variables η_n, η'_n sont uniformément distribuées sur $[0, 1]$ et

$$U_n = \begin{cases} 1 & \text{avec probabilité } \alpha \\ 0 & \text{avec probabilité } 1 - \alpha \end{cases}$$

On définit alors les suites $\tilde{X}_{nt_0}^x, \tilde{X}_{nt_0}^{x'}, n \geq 1$ par récurrence. Pour tout $n \geq 0$, si $\tilde{X}_{nt_0}^x = \tilde{X}_{nt_0}^{x'}$, alors on pose $\tilde{X}_{(n+1)t_0}^x = \tilde{X}_{(n+1)t_0}^{x'} = F_\varepsilon(\tilde{X}_{nt_0}^x, \eta_{n+1})$, sinon on pose

$$\begin{cases} \tilde{X}_{(n+1)t_0}^x = U_{n+1}\xi_{n+1} + (1 - U_{n+1})F_\varepsilon(\tilde{X}_{nt_0}^x, \eta_{n+1}) \\ \tilde{X}_{(n+1)t_0}^{x'} = U_{n+1}\xi_{n+1} + (1 - U_{n+1})F_\varepsilon(\tilde{X}_{nt_0}^{x'}, \eta'_{n+1}) \end{cases}$$

On montre par récurrence que $\tilde{X}_{nt_0}^x$ et $\tilde{X}_{nt_0}^{x'}$ ont bien les lois voulues. Ainsi on a

$$\mathbb{P}(\tilde{X}_{nt_0}^x \neq \tilde{X}_{nt_0}^{x'}) = \mathbb{P}(U_1 = 0, \dots, U_n = 0) = (1 - \alpha)^n.$$

De façon similaire, on définit $F_{t-t_0[t/t_0]}(x, \cdot)$ de telle sorte que $F_{t-t_0[t/t_0]}(x, \eta)$ possède la densité de probabilité $p_\varepsilon(t - t_0[t/t_0], x, y)$ et si $\tilde{X}_{t_0[t/t_0]}^x = \tilde{X}_{t_0[t/t_0]}^{x'}$ alors on pose $\tilde{X}_t^x = \tilde{X}_t^{x'} = F_{t-t_0[t/t_0]}(\tilde{X}_{t_0[t/t_0]}^x, \eta_{[t/t_0]+1})$, sinon

$$\begin{cases} \tilde{X}_t^x = F_{t-t_0[t/t_0]}(\tilde{X}_{t_0[t/t_0]}^x, \eta_{[t/t_0]+1}) \\ \tilde{X}_t^{x'} = F_{t-t_0[t/t_0]}(\tilde{X}_{t_0[t/t_0]}^{x'}, \eta'_{[t/t_0]+1}) \end{cases}$$

On a alors

$$\mathbb{P}(\tilde{X}_t^x \neq \tilde{X}_t^{x'}) = \mathbb{P}(\tilde{X}_{t_0[t/t_0]}^x \neq \tilde{X}_{t_0[t/t_0]}^{x'}) = (1 - \alpha)^{[t/t_0]}.$$

Or on a:

$$\begin{aligned} \|p_\varepsilon(t, x, dy) - p_\varepsilon(t, x', dy)\|_{VT} &= \sup_{A \subset \mathbb{T}^d} |\mathbb{P}(\tilde{X}_t^x \in A) - \mathbb{P}(\tilde{X}_t^{x'} \in A)| \\ &\leq 2\mathbb{P}(\tilde{X}_t^x \neq \tilde{X}_t^{x'}) \\ &\leq 2(1 - \alpha)^{[t/t_0]} \end{aligned}$$

d'où le résultat ■

Comme précédemment, on en déduit l'unicité de la mesure invariante mais aussi les deux résultats suivants où μ_ε désigne la mesure invariante du processus $\{\tilde{X}_t^\varepsilon; t \geq 0\}$.

Proposition 3.2.2. Le trou spectral

Il existe $\rho > 0$ tel que $\forall \varepsilon \in [0, 1]$ et $\forall f \in L^\infty(\mathbb{T}^d)$,

$$\left| \mathbb{E} \left[f(\tilde{X}_t^\varepsilon) \right] - \int_{\mathbb{T}^d} f(x) d\mu_\varepsilon(x) dx \right| \leq \|f\|_\infty e^{-\rho[t]}.$$

Théorème 3.2.3. Le théorème ergodique

Si $f \in L^\infty(\mathbb{T}^d)$ et si $\{X_t^\varepsilon; t \geq 0\}$ désigne la solution de (3.1), on a $\forall t > 0$,

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t f \left(\frac{X_s^\varepsilon}{\varepsilon} \right) ds - t \int_{\mathbb{T}^d} f(x) d\mu(x) \right)^2 \right] \rightarrow 0$$

lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

3.3 L'équation de Poisson

Soit $f \in C(\mathbb{T}^d)$ telle que

$$\int_{\mathbb{T}^d} f(x) d\mu(x) = 0.$$

Nous voulons résoudre l'EDP

$$(3.3) \quad L\hat{f}(x) + f(x) = 0, \quad x \in \mathbb{T}^d.$$

On dira que \hat{f} est une solution de l'équation de Poisson (3.3):

- au sens intégral si $\hat{f} \in C(\mathbb{T}^d)$ et $\forall t \geq 0$,

$$\hat{f}(x) = \mathbb{E}_x \left[\hat{f}(\tilde{X}_t^0) \right] + \int_0^t \mathbb{E}_x \left[f(\tilde{X}_s^0) \right] ds,$$

- au sens faible si $\hat{f} \in C^1(\mathbb{T}^d)$ et $\forall \varphi \in H^1(\mathbb{T}^d)$

$$-\varepsilon(\hat{f}, \varphi) + \int_{\mathbb{T}^d} f(x)\varphi(x) dx = 0,$$

où

$$\varepsilon(f, g) = \int_{\mathbb{T}^d} \left(\langle a \cdot \nabla f, \nabla g \rangle - \langle \tilde{b}, \nabla f \rangle g \right) (x) dx.$$

Théorème 3.3.1. *Sous les hypothèses 3.1.1 i) et iii), si $f \in C(\mathbb{T}^d)$ satisfait $\int_{\mathbb{T}^d} f(x) d\mu(x) = 0$, alors*

$$\hat{f}(x) = \int_0^\infty \mathbb{E}_x \left[f(\tilde{X}_t^0) \right] dt$$

est une solution de l'équation de Poisson (3.3) au sens intégral.

Preuve :

D'après le théorème 3.2.2, la fonction $t \mapsto \mathbb{E}_x \left[f(\tilde{X}_t^0) \right]$ est bien intégrable sur \mathbb{R}_+ donc \hat{f} est bien définie. De plus \hat{f} est continue d'après les propriétés de continuité des solutions des EDS et le théorème de continuité sous l'intégrale, l'hypothèse de domination étant assurée par le théorème 3.2.2.

Il reste à montrer que c'est bien une solution de l'équation de Poisson au sens intégral. Pour cela, on remarque avec la propriété de Markov du processus que:

$$\begin{aligned} \hat{f}(x) &= \int_0^t \mathbb{E}_x \left[f(\tilde{X}_s^0) \right] ds + \int_t^\infty \mathbb{E}_x \left[f(\tilde{X}_s^0) \right] ds \\ &= \int_0^t \mathbb{E}_x \left[f(\tilde{X}_s^0) \right] ds + \int_0^\infty \mathbb{E}_x \left[f(\tilde{X}_{s-t}^0) \right] ds \\ &= \int_0^t \mathbb{E}_x \left[f(\tilde{X}_s^0) \right] ds + \int_0^\infty \mathbb{E}_x \left[\mathbb{E}_{\tilde{X}_t^0} \left[f(\tilde{X}_s^0) \right] \right] ds \\ &= \int_0^t \mathbb{E}_x \left[f(\tilde{X}_s^0) \right] ds + \mathbb{E}_x \left[\int_0^\infty \mathbb{E}_{\tilde{X}_t^0} \left[f(\tilde{X}_s^0) \right] ds \right] \\ &= \int_0^t \mathbb{E}_x \left[f(\tilde{X}_s^0) \right] ds + \mathbb{E}_x \left[\hat{f}(\tilde{X}_t^0) \right] \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Théorème 3.3.2. *Sous les hypothèses 3.1.1, si $f \in C^1(\mathbb{T}^d)$ satisfait la condition*

$$\int_{\mathbb{T}^d} f(x) d\mu(x) = 0,$$

alors

$$\hat{f}(x) = \int_0^\infty \mathbb{E}_x \left[f(\tilde{X}_t^0) \right] dt$$

est de classe C^1 et c'est une solution de l'équation de Poisson 3.3 au sens faible.

Preuve :

La première affirmation est établie de la façon suivante.

$$\hat{f}(x) = \int_0^{t_1} \mathbb{E}_x \left[f(\tilde{X}_s^0) \right] ds + \int_{\mathbb{T}^d} \hat{f}(y) p(t_1, x, dy).$$

La différentiabilité du second terme résulte de l'hypothèse 3.1.1 iv) alors que le premier terme peut être différentié grâce au théorème 1.3.4.

Montrons maintenant que \hat{f} est bien une solution au sens faible de l'équation de Poisson. $\forall n \geq 1$, soit

$$\hat{f}_n(x) = \int_0^\infty \mathbb{E}_x \left[f_n(\tilde{X}_t^n) \right] dt,$$

où \tilde{X}_t^n est solution de la même EDS que \tilde{X}_t sauf que σ est remplacé par $\sigma + n^{-1}I$ et

$$f_n(x) = f(x) - \int_{\mathbb{T}^d} f(x) d\mu_n(x),$$

où μ_n désigne la mesure invariante de \tilde{X}^n . D'après les résultats du chapitre 2, $\hat{f}_n \in W^{2,p}(\mathbb{T}^d)$ et est une solution au sens faible de l'équation de Poisson correspondante. Or pour n assez grand les probabilités de transition de \tilde{X}_t^n satisfont la condition de Doeblin avec $\alpha/2$ à la place de α (par continuité des solutions des EDS par rapport au paramètre, voir théorème 1.3.1). En conséquence, le théorème 3.2.2 reste valable pour \tilde{X}_t^n avec un ρ indépendant de n .

Remarquons que

$$\int_{\mathbb{T}^d} f(x) d\mu_n(x) \rightarrow \int_{\mathbb{T}^d} f(x) d\mu(x)$$

lorsque $n \rightarrow \infty$. Ceci résulte de

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{T}^d} f(x) d\mu_n(x) - \int_{\mathbb{T}^d} f(x) d\mu(x) \right| &\leq \left| \int_{\mathbb{T}^d} f(x) d\mu_n(x) - \mathbb{E} \left[f(\tilde{X}_t^n) \right] \right| \\ &\quad + \left| \mathbb{E} \left[f(\tilde{X}_t^n) \right] - \mathbb{E} \left[f(\tilde{X}_t) \right] \right| \\ &\quad + \left| \mathbb{E} \left[f(\tilde{X}_t) \right] - \int_{\mathbb{T}^d} f(x) d\mu(x) \right| \\ &\leq 2 \|f\|_\infty e^{-\rho[t]} + \left| \mathbb{E} \left[f(\tilde{X}_t^n) \right] - \mathbb{E} \left[f(\tilde{X}_t) \right] \right| \end{aligned}$$

Le premier terme tend vers 0 en $t \rightarrow \infty$ indépendamment de n et le second terme se traite à l'aide du théorème 1.3.1 à t fixé.

On déduit de tout cela que $\forall \eta > 0, \exists T > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| \int_T^\infty \mathbb{E}_x \left[f_n(\tilde{X}_t^n) \right] dt \right| \leq \eta.$$

D'un autre côté, par les mêmes arguments de continuité par rapport au paramètre et le fait que $\int_{\mathbb{T}^d} f(x) d\mu_n(x) \rightarrow \int_{\mathbb{T}^d} f(x) d\mu(x)$, on a par le théorème de convergence dominée:

$$\int_0^T \mathbb{E}_x \left[f_n(\tilde{X}_t^n) \right] dt \rightarrow \int_0^T \mathbb{E}_x \left[f(\tilde{X}_t) \right] dt,$$

lorsque $n \rightarrow \infty$.

Ainsi

$$\hat{f}_n \rightarrow \hat{f}(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{T}^d, \text{ quand } n \rightarrow \infty,$$

et $|\hat{f}_n(x)| \leq C, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{T}^d$.

Comme $L_n = (L + \frac{1}{2n}(t\sigma + \sigma) + \frac{1}{2n^2}I) \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j}$ et $\forall \varphi \in C^2(\mathbb{T}^d)$,

$$\int_{\mathbb{T}^d} \hat{f}_n(x) [L_n^* \varphi(x)] dx + \int_{\mathbb{T}^d} f_n(x) \varphi(x) dx = 0,$$

Or sous nos hypothèses $L^* \in L^1(\mathbb{T}^d)$ et les autres termes tendent vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$. Il reste alors en passant à la limite en $n \rightarrow \infty$:

$$-\varepsilon(\hat{f}, \varphi) + \int_{\mathbb{T}^d} f(x) \varphi(x) dx = 0, \forall \varphi \in C^2(\mathbb{T}^d)$$

et il s'ensuit que \hat{f} est bien une solution au sens faible de l'équation de Poisson ■

3.4 Homogénéisation des EDP elliptiques

Soit D un ouvert borné et régulier de \mathbb{R}^d . Définissons

$$\tau_\varepsilon = \inf \{t \geq 0, X_t^\varepsilon \notin \overline{D}\}.$$

Soit $\alpha \geq 0$ tel que $\forall x \in D$,

$$(3.4) \quad \sup_{\varepsilon > 0} \mathbb{E}_x [\exp(\alpha \tau_\varepsilon)] < \infty.$$

Nous supposons que f est continue et qu'il existe $\delta > 0$ tel que:

$$(3.5) \quad f(x) \leq (\alpha - \delta)^+, \forall x \in \mathbb{T}^d$$

REMARQUE: Ces deux conditions vont nous servir à établir une certaine uniforme intégrabilité. La condition (3.4) est toujours satisfaite avec $\alpha = 0$, auquel cas (3.5) nécessite $f \leq 0$.

On note \mathcal{L}_ε le générateur du processus $\{X_t^\varepsilon; t \geq 0\}$. On rappelle le fait bien connu suivant:

Proposition 3.4.1. *La solution de viscosité de l'EDP elliptique*

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\varepsilon u^\varepsilon(x) + f\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) u^\varepsilon(x) = 0, & x \in D \\ u^\varepsilon(x) = g(x), & x \in \partial D, \end{cases}$$

est donnée par la formule de Feynman-Kac

$$u^\varepsilon(x) = \mathbb{E}_x \left[g(X_{\tau_\varepsilon}^\varepsilon) \exp \left(\int_0^{\tau_\varepsilon} f(X_s^\varepsilon) ds \right) \right].$$

On définit

$$\begin{aligned} A &= \int_{\mathbb{T}^d} (I + {}^t\nabla\hat{b}).a.(I + \nabla\hat{b})(x) d\mu(x), \\ B &= \int_{\mathbb{T}^d} (I + {}^t\nabla\hat{b}).c(x) d\mu(x), \\ D &= \int_{\mathbb{T}^d} f(x) d\mu(x), \\ \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} A_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i B_i \frac{\partial}{\partial x_i} \end{aligned}$$

Proposition 3.4.2. *On a la convergence en loi suivante: $X^\varepsilon \rightarrow X$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, où*

$$X_t = x + Bt + A^{1/2}B_t, t \geq 0.$$

Preuve :

La preuve est similaire à celle du théorème 3.5.1 de la section suivante ■

Supposons de plus que A satisfait l'hypothèse suivante

$$(3.6) \quad A \text{ est définie positive}$$

et rappelons un lemme sur la discontinuité de la fonction qui à une trajectoire associe son premier temps de sortie d'un ouvert D . Soit Θ la fonction

$$\begin{aligned} \Theta : C([0; +\infty[; \mathbb{R}^d) &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ \\ x &\longmapsto \begin{cases} +\infty & \text{si } x(t) \in D, \forall t \geq 0, \\ \inf \{t \geq 0 \mid x(t) \notin D\} & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Lemme 3.4.3. *Si Θ est discontinue au point x de l'espace $(C([0; +\infty[; \mathbb{R}^d); \|\cdot\|_\infty)$, alors soit x ne quitte jamais D , soit x atteint la frontière ∂D à un certain temps τ et il existe $\alpha > 0$ tel que $x(t) \in \overline{D}$ pour $t \in [\Theta(x); \Theta(x) + \alpha]$.*

Preuve :

On prouve tout d'abord que Θ est semi-continue inférieurement. Soit $(x_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une famille de fonctions continues convergeant uniformément sur tout compact de $[0; +\infty[$. Supposons que $t_0 = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \Theta(x_\varepsilon)$ est finie. Alors il existe une sous-suite $(\varepsilon_n)_n$ telle que $\Theta(x_{\varepsilon_n}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} t_0$. En remarquant que

$$|x(t_0) - x_{\varepsilon_n}(\Theta(x_{\varepsilon_n}))| \leq |x(t_0) - x(\Theta(x_{\varepsilon_n}))| + |x(\Theta(x_{\varepsilon_n})) - x_{\varepsilon_n}(\Theta(x_{\varepsilon_n}))| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

et que $x_{\varepsilon_n}(\Theta(x_{\varepsilon_n}))$ appartient à la frontière ∂D (qui est un ensemble fermé), on en déduit que $x(t_0)$ est aussi sur la frontière ∂D et donc que $\Theta(x) \leq t_0$.

Soit maintenant une suite de fonctions continues $(x_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ qui convergent uniformément sur tout compact de $[0; +\infty[$ vers x et telle que pour tout $\varepsilon > 0$, $\Theta(x) < \Theta(x_\varepsilon) < +\infty$. Si pour un temps $t_0 + \eta$, $x(t_0 + \eta)$ appartient à l'ouvert \overline{D}^c , alors comme $x_\varepsilon(t_0 + \eta)$ converge vers $x(t_0 + \eta)$, $\Theta(x_\varepsilon)$ est plus petit que $t_0 + \eta$. Nous en déduisons que $x(t)$ doit appartenir à \overline{D} pendant l'intervalle de temps $[\Theta(x); \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \Theta(x_\varepsilon)]$. Ainsi pour que x soit un point de discontinuité de Θ , la fonction $x(t)$ doit rester une temps dans le fermé \overline{D} après avoir atteint la frontière de cet ensemble ■

Comme A est définie positive, on a

$$\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1.$$

De plus, si la frontière de D est assez régulière (pour vérifier par exemple la condition du cône de Zaremba), alors tous les points de ∂D sont réguliers pour l'intérieur de D^c et la probabilité de l'ensemble des trajectoires présentant une discontinuité pour Θ est alors nulle. Dans ce cas, τ est presque sûrement une fonction continue des trajectoires limites $\{X_t; t \geq 0\}$. Ainsi la fonction

$$F : C([0; +\infty[; \mathbb{R}^d) \times C([0; +\infty[; \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ (y, \xi) \longmapsto \exp[\xi(\Theta(y))] g[y(\Theta(y))]$$

est une fonction \mathbb{P}^* presque sûrement continue, où \mathbb{P}^* est la loi du couple

$$(x + Bt + A^{1/2}B_t; Dt) \text{ sur } C([0; +\infty[; \mathbb{R}^d) \times C([0; +\infty[; \mathbb{R}).$$

On montre ensuite à l'aide du théorème ergodique que

$$\int_0^t f\left(\frac{X_s^\varepsilon}{\varepsilon}\right) ds \xrightarrow{Prob} Dt$$

et donc que le couple

$$\left(X_t^\varepsilon, \int_0^t f\left(\frac{X_s^\varepsilon}{\varepsilon}\right) ds\right) \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{loi} (x + Bt + A^{1/2}B_t; Dt)$$

dans $C([0; +\infty[; \mathbb{R}^d)$.

Ensuite, à l'aide des conditions (3.4) et (3.5) on en déduit l'uniforme intégrabilité des variables aléatoires $g(X_{\tau_\varepsilon}^\varepsilon) \exp\left(\int_0^{\tau_\varepsilon} f(X_s^\varepsilon) ds\right)$, $\varepsilon \geq 0$ car si $\alpha = 0$ alors les variables aléatoires considérées sont uniformément bornées sinon on a:

$$\left|g(X_{\tau_\varepsilon}^\varepsilon) \exp\left(\int_0^{\tau_\varepsilon} f(X_s^\varepsilon) ds\right)\right| \leq \|g\|_\infty \exp(\tau_\varepsilon(\alpha - \delta)) \\ = \|g\|_\infty (\exp(\tau_\varepsilon \alpha))^{\frac{\alpha - \delta}{\alpha}}.$$

En combinant tous les résultats précédents, on a ainsi démontré le théorème:

Théorème 3.4.4. *Sous les hypothèses 3.1.1, les conditions (3.4), (3.5) et (3.6), on a*

$$u^\varepsilon(x) \rightarrow \mathbb{E}_x[g(X_\tau) \exp(D\tau)], \text{ lorsque } \varepsilon \rightarrow 0,$$

où $\mathbb{E}_x[g(X_\tau) \exp(D\tau)] = u(x)$ est la solution de viscosité de l'EDP elliptique:

$$\begin{cases} \mathcal{L}u(x) + Du(x) = 0, x \in D; \\ u(x) = g(x), x \in \partial D. \end{cases}$$

3.5 Homogénéisation des EDP paraboliques

Supposons que a, b, c vérifient les hypothèses 3.1.1 page 47. Soit $e \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ et $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ mesurables bornées, périodiques et $g \in C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ croissant au plus polynômialement à l'infini. Pour chaque $\varepsilon > 0$, on considère l'EDP:

$$(3.7) \quad \begin{cases} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t, x) &= \mathcal{L}_\varepsilon u^\varepsilon(t, x) + \left[\frac{1}{\varepsilon} e\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right]; \\ u^\varepsilon(t, x) &= g(x), x \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

On suppose que:

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^d} e(x) d\mu(x) &= 0 \\ \int_{\mathbb{T}^d} b_i(x) d\mu(x) &= 0, \forall i = 1, \dots, d. \end{aligned}$$

On définit:

$$Y_t^\varepsilon = \int_0^t \left[\frac{1}{\varepsilon} e\left(\frac{X_s^\varepsilon}{\varepsilon}\right) + f\left(\frac{X_s^\varepsilon}{\varepsilon}\right) \right] ds.$$

Alors la solution de (3.7) est donnée par la formule de Feynman-Kac:

$$u^\varepsilon(t, x) = \mathbb{E} [g(X_t^\varepsilon) \exp(Y_t^\varepsilon)],$$

où X_t^ε est la solution de l'EDS (3.1) page 47.

Définissons également

$$\begin{aligned} \hat{e}(x) &= \int_0^\infty \mathbb{E}_x [e(\tilde{X}_t)] dt, \\ \hat{b}_i(x) &= \int_0^\infty \mathbb{E}_x [b_i(\tilde{X}_t)] dt, \quad i = 1 \dots d \end{aligned}$$

les solutions au sens faible des équations de Poisson

$$L\hat{e}(x) + e(x) = 0,$$

$$L\hat{b}_i(x) + b_i(x) = 0, \quad i = 1 \dots d$$

On pose pour finir

$$\begin{aligned} A &= \int_{\mathbb{T}^d} (I + {}^t\nabla\hat{b}) \cdot a \cdot (I + \nabla\hat{b})(x) d\mu(x) \\ C &= \int_{\mathbb{T}^d} (I + {}^t\nabla\hat{b}) \cdot (c + a\nabla\hat{e})(x) d\mu(x) \\ D &= \int_{\mathbb{T}^d} \left(\frac{1}{2} {}^t\nabla\hat{e} \cdot a \cdot \nabla\hat{e} + f + {}^t\nabla\hat{e} \cdot c \right) (x) d\mu(x) \end{aligned}$$

Alors

$$u(t, x) = \mathbb{E} [g(x + Ct + A^{1/2}B_t)] e^{Dt}$$

est la solution (de viscosité) de l'EDP parabolique

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(t, x) + \sum_{i=1}^d C_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(t, x) + Du(t, x) \\ u(0, x) = g(x), x \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

Théorème 3.5.1. *Sous les hypothèses 3.1.1 et la condition (3.8), pour tous $t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d$,*

$$u^\varepsilon(t, x) \longrightarrow u(t, x)$$

lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Preuve :

On définit

$$\hat{X}_t^\varepsilon = X_t^\varepsilon + \varepsilon \left[\hat{b} \left(\frac{X_t^\varepsilon}{\varepsilon} \right) - \hat{b} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right],$$

$$\hat{Y}_t^\varepsilon = Y_t^\varepsilon + \varepsilon \left[\hat{e} \left(\frac{X_t^\varepsilon}{\varepsilon} \right) - \hat{e} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right],$$

$$\hat{u}^\varepsilon(t, x) = \mathbb{E} \left[g(\hat{X}_t^\varepsilon) \exp(\hat{Y}_t^\varepsilon) \right]$$

et on remarque que $u^\varepsilon(t, x)$ converge si et seulement si $\hat{u}^\varepsilon(t, x)$ converge et dans ce cas ils ont la même limite.

On établit tout d'abord la proposition suivante:

Proposition 3.5.2. *On a les relations suivantes:*

$$\hat{X}_t^\varepsilon = x + \int_0^t (I + {}^t\nabla \hat{b}) \cdot c \left(\frac{X_s^\varepsilon}{\varepsilon} \right) ds + \int_0^t (I + {}^t\nabla \hat{b}) \cdot \sigma \left(\frac{X_s^\varepsilon}{\varepsilon} \right) dB_s$$

$$\hat{Y}_t^\varepsilon = \int_0^t (f + {}^t\nabla \hat{e} \cdot c) \left(\frac{X_s^\varepsilon}{\varepsilon} \right) ds + \int_0^t {}^t \hat{e} \cdot \sigma \left(\frac{X_s^\varepsilon}{\varepsilon} \right) dB_s$$

Preuve :

On établit la première formule. La preuve de la seconde est presque similaire. Soit $\rho : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction de classe C^∞ à support compact, telle que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \rho(x) dx = 1$$

et soit $\rho_n(x) = n^d \rho(nx)$. On régularise \hat{b} par convolution

$$\hat{b}_n = \hat{b} * \rho_n.$$

On peut maintenant appliquer la formule d'Itô:

$$\begin{aligned} X_t^\varepsilon + \varepsilon \hat{b}_n \left(\frac{X_t^\varepsilon}{\varepsilon} \right) &= x + \varepsilon \hat{b}_n \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) + \int_0^t (I + {}^t \nabla \hat{b}_n) \cdot c \left(\frac{X_s^\varepsilon}{\varepsilon} \right) ds \\ &+ \int_0^t (I + {}^t \nabla \hat{b}_n) \cdot \sigma \left(\frac{X_s^\varepsilon}{\varepsilon} \right) dB_s + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (L \hat{b}_n + b) \left(\frac{X_s^\varepsilon}{\varepsilon} \right) ds. \end{aligned}$$

On veut passer à la limite en $n \rightarrow \infty$ dans cette expression. Il est clair que $\hat{b}_n \rightarrow b$, que $\nabla \hat{b}_n \rightarrow \nabla b$ simplement et que ces deux suites sont bornées uniformément en n et $x \in \mathbb{T}^d$.

On écrit alors

$$L \hat{b}_n = (L \hat{b}) * \rho_n + \varphi_n,$$

et comme \hat{b} est solution au sens faible de l'équation de Poisson,

$$(L \hat{b}) * \rho_n = -b * \rho_n \rightarrow -b,$$

la suite restant aussi uniformément bornée en n et $x \in \mathbb{T}^d$. Il reste alors à étudier la suite φ_n . En utilisant la convention de sommation sur les indices répétés, on a:

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} [a_{ij}(x) - a_{ij}(x-y)] \frac{\partial^2 \hat{b}}{\partial x_i \partial x_j}(x-y) n^d \rho(ny) dy \\ &+ \int_{\mathbb{R}^d} [b_i(x) - b_i(x-y)] \frac{\partial \hat{b}}{\partial x_i}(x-y) n^d \rho(ny) dy. \end{aligned}$$

La seconde intégrale converge simplement vers 0 et est à nouveau uniformément bornée en n et $x \in \mathbb{T}^d$. On intègre par parties la première intégrale et on a:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} [a_{ij}(x) - a_{ij}(x-y)] \frac{\partial^2 \hat{b}}{\partial x_i \partial x_j}(x-y) n^d \rho(ny) dy &= \\ &+ \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}(x-y) \frac{\partial \hat{b}}{\partial x_j}(x-y) n^d \rho(ny) dy \\ &+ \int_{\mathbb{R}^d} [a_{ij}(x) - a_{ij}(x-y)] \frac{\partial \hat{b}}{\partial x_j}(x-y) n^{d+1} \frac{\partial \rho}{\partial x_i}(ny) dy \end{aligned}$$

Le premier terme du membre de droite est uniformément borné en n et $x \in \mathbb{T}^d$ et converge simplement vers

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}(x) \frac{\partial \hat{b}}{\partial x_j}(x),$$

Pour le second terme, on remarque que $\forall y \in \mathbb{R}^d, \exists y' \in \mathbb{R}^d, |y'| \leq |y|$ tel que

$$a_{ij}(x) - a_{ij}(x-y) = \nabla a_{ij}(x+y') \cdot y.$$

On se donne alors $\varepsilon > 0$.

Il existe $\delta > 0$ tel que $|\nabla a_{ij}(x + y') \frac{\partial \hat{b}}{\partial x_j}(x - y) - \nabla a_{ij}(x) \frac{\partial \hat{b}}{\partial x_j}(x)| \leq \varepsilon$ si $|y| \leq \delta$. On pose

$$A = \left| \int_{\mathbb{R}^d} [a_{ij}(x) - a_{ij}(x - y)] \frac{\partial \hat{b}}{\partial x_j}(x - y) n^{d+1} \frac{\partial \rho}{\partial x_i}(ny) dy - \int_{\mathbb{R}^d} \nabla a_{ij}(x) \frac{\partial \hat{b}}{\partial x_j}(x) n^{d+1} y \frac{\partial \rho}{\partial x_i}(ny) dy \right|$$

et on a alors

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} (\nabla a_{ij}(x + y') \frac{\partial \hat{b}}{\partial x_j}(x - y) - \nabla a_{ij}(x) \frac{\partial \hat{b}}{\partial x_j}(x)) \cdot y n^{d+1} \frac{\partial \rho}{\partial x_i}(ny) dy \right| \\ &\leq \varepsilon \int_{|u| \leq n\delta} |u| \left| \frac{\partial \rho}{\partial x_i}(u) \right| du + 2 \|\nabla a_{ij}\|_\infty \|\nabla \hat{b}\|_\infty \int_{|u| > n\delta} |u| \left| \frac{\partial \rho}{\partial x_i}(u) \right| du \\ &\leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^d} |u| \left| \frac{\partial \rho}{\partial x_i}(u) \right| du + 2 \|\nabla a_{ij}\|_\infty \|\nabla \hat{b}\|_\infty \varphi_n \end{aligned}$$

où $\varphi_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. Or une intégration par parties montre que:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \nabla a_{ij}(x) \cdot y \frac{\partial \hat{b}}{\partial x_j}(x) n^{d+1} \frac{\partial \rho}{\partial x_i}(ny) dy = - \frac{a_{ij}}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{b}}{\partial x_j}(x)$$

Donc la suite $\left(\int_{\mathbb{R}^d} [a_{ij}(x) - a_{ij}(x - y)] \frac{\partial^2 \hat{b}}{\partial x_j \partial x_j}(x - y) n^{d+1} \frac{\partial \rho}{\partial x_i}(ny) dy \right)_n$ est une suite uniformément bornée qui converge simplement vers 0 et la proposition est démontrée ■

On définit des nouvelles probabilités $\tilde{\mathbb{P}}^\varepsilon$ par la formule:

$$\frac{d\tilde{\mathbb{P}}^\varepsilon}{d\mathbb{P}} | \mathcal{F}_t = \exp \left(\int_0^t {}^t \nabla \hat{e} \cdot \sigma \left(\frac{X_s^\varepsilon}{\varepsilon} \right) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t {}^t \nabla \hat{e} \cdot a \cdot \nabla \hat{e} \left(\frac{X_s^\varepsilon}{\varepsilon} \right) ds \right).$$

Alors

$$u^\varepsilon(t, x) = \tilde{\mathbb{E}} \left[g(\hat{X}_t^\varepsilon) \exp \left(\int_0^t \tilde{f} \left(\frac{X_s^\varepsilon}{\varepsilon} \right) ds \right) \right],$$

avec

$$\tilde{f} = f + {}^t \nabla \hat{e} \cdot c + \frac{1}{2} {}^t \nabla \hat{e} \cdot a \cdot \nabla \hat{e}.$$

D'un autre côté,

$$\hat{X}_t^\varepsilon = x + \int_0^t (I + \nabla \hat{b})(c + a \cdot \nabla \hat{e}) \left(\frac{X_s^\varepsilon}{\varepsilon} \right) ds + \int_0^t (I + \nabla \hat{b}) \cdot \sigma \left(\frac{X_s^\varepsilon}{\varepsilon} \right) d\tilde{B}_s^\varepsilon,$$

où $\tilde{B}_t^\varepsilon = B_t - \int_0^t {}^t \sigma \cdot \nabla \hat{e} \left(\frac{X_s^\varepsilon}{\varepsilon} \right) ds$ est un $\tilde{\mathbb{P}}^\varepsilon$ mouvement brownien.

Il reste alors à reproduire le raisonnement effectué dans la section 2.6 page 40 pour conclure

■

Chapter 4

Homogénéisation en milieu aléatoire

4.1 Le milieu aléatoire

Notre modèle pour le milieu aléatoire consiste en un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ sur lequel est défini un groupe de transformations $(\tau_x)_{x \in \mathbb{R}^d}$ agissant sur Ω de telle sorte que:

Hypothèse 4.1.1. Cas aléatoire

$$H.1 \mu(\tau_x A) = \mu(A), \forall A \in \mathcal{G}, \forall x \in \mathbb{R}^d;$$

$$H.2 \text{ Si } \forall x \in \mathbb{R}^d, \tau_x A = A, \text{ alors } \mu(A) = 0 \text{ ou } 1.$$

H.3 Pour toute application mesurable \mathbf{f} définie sur Ω , l'application $(x, \omega) \mapsto \mathbf{f}(\tau_x \omega)$ est $(\mathbb{R}^d \times \Omega; \mathcal{B}_d \otimes \mathcal{G})$ -mesurable.

$$H.4 \forall \mathbf{f} \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu), \forall \delta > 0,$$

$$\mu(|\mathbf{f}(\tau_x \omega) - \mathbf{f}(\omega)| \geq \delta) \rightarrow 0, \text{ quand } |x| \rightarrow 0.$$

A chaque variable aléatoire \mathbf{f} définie sur $(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$, on associe le champ aléatoire stationnaire f qui est une fonction mesurable définie sur $(\mathbb{R}^d \times \Omega; \mathcal{B}_d \otimes \mathcal{G})$ par:

$$f(x, \omega) = \mathbf{f}(\tau_x \omega)$$

On définit un groupe $(T_x)_{x \in \mathbb{R}^d}$ d'opérateurs unitaires sur $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ par

$$T_x(\mathbf{f}) = \mathbf{f}(\tau_x \omega).$$

Vu l'hypothèse 4.1.1 (H.4), ce groupe est fortement continu. Si (e_1, \dots, e_d) désigne une base orthonormale de \mathbb{R}^d , on définit les opérateurs de dérivation:

$$D_i \mathbf{f} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T_{he_i}(\mathbf{f}) - \mathbf{f}}{h},$$

si cette limite existe dans $L^2(\Omega)$.

On appelle \mathcal{C} le sous-ensemble dense de $L^2(\Omega)$ défini par:

$$\mathcal{C} = \{ \mathbf{f} * \varphi; \mathbf{f} \in L^2(\Omega), \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \},$$

où l'opération de convolution $*$ est définie par:

$$\mathbf{f} * \varphi(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{f}(\tau_x \omega) \varphi(x) dx.$$

On remarque que $\mathcal{C} \subset \text{Dom}(D_i)$ et $D_i(\mathbf{f} * \varphi) = -\mathbf{f} * \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$, $i = 1 \dots, d$ et cette dernière égalité vaut également $D_i \mathbf{f} * \varphi$ si $\mathbf{f} \in \text{Dom}(D_i)$.

Les opérateurs $(D_i)_{1 \leq i \leq d}$ sont donc à domaines denses dans $L^2(\Omega)$ et comme l'adjoint de D_i est $-D_i$, à l'aide de la proposition (II.16) de [Brezis] page 28, on sait que les opérateurs $(D_i)_{1 \leq i \leq d}$ sont fermés.

On note $\langle \cdot, \cdot \rangle_\mu$ le produit scalaire usuel sur $L^2(\Omega)$ et l'on définit $H^1(\Omega)$ comme l'adhérence de \mathcal{C} dans $L^2(\Omega)$ pour le produit scalaire:

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle_1 = \langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle_\mu + \sum_{i=1}^d \langle D_i \mathbf{f}, D_i \mathbf{g} \rangle_\mu.$$

On note également que si $\check{\varphi}(x) \triangleq \varphi(-x)$, alors

$$\langle \mathbf{g}, \mathbf{f} * \varphi \rangle_\mu = \langle \mathbf{f}, \mathbf{g} * \check{\varphi} \rangle_\mu.$$

4.2 Diffusion en milieu aléatoire

On considère la diffusion en milieu aléatoire

$$(4.1) \quad X_t^{\varepsilon, \omega} = x + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t b \left(\frac{X_s^{\varepsilon, \omega}}{\varepsilon}, \omega \right) ds + \int_0^t \sigma \left(\frac{X_s^{\varepsilon, \omega}}{\varepsilon}, \omega \right) dB_s$$

où $\{B_t; t \geq 0\}$ est un mouvement brownien standard défini sur un espace de probabilité $(\Omega', \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et les coefficients $b(x, \omega), \sigma(x, \omega)$ sont des champs aléatoires stationnaires définis sur $(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$, de telle sorte que tout soit défini sur l'espace produit $(\Omega \times \Omega'; \mathcal{G} \otimes \mathcal{F}, \mu \times \mathbb{P})$ (le mouvement brownien et le milieu sont indépendants).

Précisons les hypothèses sur les coefficients. Soit $a(x, \omega) = \sigma \cdot^t \sigma(x, \omega)$. On suppose que $a(x, \omega) = \mathbf{a}(\tau_x \omega)$, où \mathbf{a} est une fonction mesurable définie sur $(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$, à valeurs dans l'ensemble des matrices définies positives satisfaisant la condition suivante:

$$\exists \lambda, \Lambda \in \mathbb{R}_+^*, \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \forall \omega \in \Omega, \lambda |\xi|^2 \leq (\mathbf{a}(\omega) \xi, \xi) \leq \Lambda |\xi|^2.$$

On suppose de plus que pour $1 \leq i \leq d$,

$$b_i(x, \omega) = \sum_{j=1}^d \left(\frac{1}{2} \frac{\partial a_{ij}(x, \omega)}{\partial x_j} - a_{ij}(x, \omega) \frac{\partial V}{\partial x_j}(x, \omega) \right),$$

où $V(x, \omega) = \mathbf{V}(\tau_x \omega)$, \mathbf{V} étant une variable aléatoire bornée par Λ , définie sur $(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$.

Nous supposons que les dérivées ci-dessus existent et que $b(x, \omega)$ est un champ aléatoire mesurable, qui satisfait

$$|b(x, \omega)| \leq \Lambda.$$

On suppose également que l'application $x \mapsto a(x, \omega)$ est de classe C^1 . Ces dernières hypothèses ne sont absolument pas nécessaires mais permettent d'éviter l'utilisation de la décomposition d'Itô-Fukushima. Pour traiter ce problème sans la condition ci-dessus, voir [Lejay].

On fait l'hypothèse (quitte à ajouter une constante à \mathbf{V} , ce qui ne modifie pas la dérive) que

$$\int_{\Omega} e^{-2\mathbf{V}(\omega)} d\mu(\omega) = 1,$$

et ainsi $d\pi(\omega) = e^{-2\mathbf{V}(\omega)} d\mu(\omega)$ est une nouvelle mesure de probabilité sur (Ω, \mathcal{G}) .

Le générateur infinitésimal $L^{\varepsilon, \omega}$ du processus de diffusion $X^{\varepsilon, \omega}$ est alors:

$$\begin{aligned} L^{\varepsilon, \omega} &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega \right) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i,j=1}^d \left(\frac{1}{2} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} \left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega \right) - a_{ij} \left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega \right) \frac{\partial V}{\partial x_j} \left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega \right) \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= \frac{1}{2} e^{2V(\frac{x}{\varepsilon}, \omega)} \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega \right) e^{-2V(\frac{x}{\varepsilon}, \omega)} \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \right), \end{aligned}$$

donc $\forall u, v \in C_c^2(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned} - \langle L^{\varepsilon, \omega} u, v \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d; e^{-2V(\frac{x}{\varepsilon}, \omega)} dx)} &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} a_{ij} \left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega \right) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j}(x) e^{-2V(\frac{x}{\varepsilon}, \omega)} dx \\ &\stackrel{\Delta}{=} \Psi^{\varepsilon, \omega}(u, v). \end{aligned}$$

Nous savons que le semi-groupe associé

$$P_t^{\varepsilon, \omega} f(x) = \mathbb{E}_x [f(X_t^{\varepsilon, \omega})]$$

possède une densité $p_\varepsilon(\omega, t, x, y)$ qui satisfait les estimations d'Aronson:

$$\frac{1}{Mt^{d/2}} \exp\left(\frac{-M|x-y|^2}{t}\right) \leq p_\varepsilon(\omega, t, x, y) \leq \frac{M}{t^{d/2}} \exp\left(\frac{-|x-y|^2}{Mt}\right),$$

où $M = M(\lambda, \Lambda, d)$.

4.3 Ergodicité

Le but de cette section est de montrer que le processus

$$\begin{aligned} Y_t^{\varepsilon, \omega} &= \tau_{X_t^{\varepsilon, \omega}} \omega, \quad t \geq 0; \\ Y_0^{\varepsilon, \omega} &= \omega, \end{aligned}$$

où $X_t^{\varepsilon, \omega}$ est le processus de diffusion de la section précédente partant de $X_0^{\varepsilon, \omega} = 0$, est un processus de Markov ergodique. On remarque qu'il n'y a aucune raison pour que le processus $X_t^{\varepsilon, \omega}$ soit ergodique car il n'admet pas nécessairement de mesure invariante finie.

On va en fait considérer $Y_t(\omega) = Y_t^{1, \omega}$, et calculer son générateur infinitésimal P_t . Avec la notation $X_t^\omega = X_t^{1, \omega}$, on a:

$$\begin{aligned} P_t \mathbf{f}(\omega) &= \mathbb{E}[\mathbf{f}(Y_t(\omega))] \\ &= \mathbb{E}_0[f(X_t^\omega, \omega)] \end{aligned}$$

donc

$$\langle P_t \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle_\pi = \int_{\Omega} \mathbb{E}_0[f(X_t^\omega, \omega)] \mathbf{g}(\omega) e^{-2V(\omega)} d\mu(\omega).$$

Si \mathbf{f} et $\mathbf{g} \in \mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle P_t \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle_\pi &= \int_{\Omega} L^\omega(\mathbb{E}_0[f(X_t^\omega, \omega)]) \mathbf{g}(\omega) e^{-2V(\omega)} d\mu(\omega) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(0, \omega) e^{-2V(0, \omega)} \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbb{E}_0[f(X_t^\omega, \omega)] \right) \mathbf{g}(0, \omega) d\mu(\omega) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_{\Omega} D_j (a_{ij} e^{-2V} D_i(\mathbb{E}_0[f(X_t^\omega, \omega)])) \mathbf{g}(\omega) d\mu(\omega) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_{\Omega} a_{ij}(\omega) e^{-2V(\omega)} D_i(\mathbb{E}[\mathbf{f}(Y_t(\omega))]) D_j \mathbf{g}(\omega) d\mu(\omega) \end{aligned}$$

la dernière ligne s'obtenant en remarquant que si $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathcal{C}$ alors:

$$\langle \mathbf{f}, D_i \mathbf{g} \rangle_\mu = - \langle D_i \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle .$$

En effet on obtient facilement pour $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$:

$$\int_{\Omega} D_i(\mathbf{f} * \varphi)(\omega) d\mu(\omega) = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\omega) d\mu(\omega) \times \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx = 0$$

et

$$D_i(\mathbf{f} \mathbf{g}) = D_i(\mathbf{f}) \mathbf{g} + \mathbf{f} D_i(\mathbf{g}).$$

On a ainsi montré:

$$\frac{d}{dt} \langle P_t \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle_\pi = -\Psi^\pi(P_t \mathbf{f}, \mathbf{g})$$

avec

$$\Psi^\pi(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_{\Omega} \mathbf{a}_{ij}(\omega) D_i(\mathbf{f})(\omega) D_j(\mathbf{g})(\omega) e^{-2\mathbf{V}(\omega)} d\mu(\omega).$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle P_t \mathbf{f}, \mathbf{1} \rangle_\pi &= -\Psi^\pi(P_t \mathbf{f}, \mathbf{1}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

et ceci montre que

$$d\pi(\omega) = e^{-2\mathbf{V}(\omega)} d\mu(\omega)$$

est une probabilité invariante pour le processus $\{Y_t\}$.

Soit \mathbf{f} une variable aléatoire qui est $\{P_t, t \geq 0\}$ -invariante. Alors

$$\frac{d}{dt} \langle P_t(\mathbf{f}), \mathbf{f} \rangle_\pi = 0, \forall t \geq 0$$

et en particulier à $t = 0$,

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_{\Omega} \mathbf{a}_{ij}(\omega) D_i(\mathbf{f})(\omega) D_j(\mathbf{g})(\omega) e^{-2\mathbf{V}(\omega)} d\mu(\omega) = 0,$$

ce qui signifie que $D_i(\mathbf{f}) = 0$, $i = 1, \dots, d$. Ainsi $\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned} 0 &= -D_i(\mathbf{f}) * \varphi = \mathbf{f} * \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x, \omega) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx. \end{aligned}$$

En conséquence $f(x, \omega) = f(\omega)$ et $T_x(\mathbf{f}) = \mathbf{f}$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$ d'où (H.2) \mathbf{f} est constante. On a ainsi montré que les seules fonctions $\{P_t, t \geq 0\}$ -invariantes sont les constantes.

4.4 Solution de l'équation de Poisson

On définit le sous-espace de Hilbert de $[L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)]^d$:

$$V_{pot}^2 = \left\{ (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_d) \in L^2(\mu)^d; \int_{\Omega} \mathbf{f}_i(\omega) d\mu(\omega) = 0, i = 1, \dots, d \right. \\ \left. \mathbf{f}_i * \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = \mathbf{f}_j * \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d), i, j \in \{1, \dots, d\} \right\}.$$

Lemme 4.4.1. V_{pot}^2 est l'adhérence de

$$\{(D_1 \mathbf{f}, \dots, D_d \mathbf{f}); \mathbf{f} \in \mathcal{C}\}$$

dans $L^2(\mu)^d$.

Preuve :

Il est clair que $\{(D_1 \mathbf{f}, \dots, D_d \mathbf{f}); \mathbf{f} \in \mathcal{C}\} \subset V_{pot}^2$ et que V_{pot}^2 est un sous-espace fermé de $L^2(\mu)^d$.

Soit $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_d) \in V_{pot}^2$ tel que $\forall \mathbf{f} \in \mathcal{C}$,

$$\sum_{i=1}^d \langle \mathbf{f}_i, D_i \mathbf{f} \rangle = 0.$$

En particulier $\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d), \forall j = 1, \dots, d$, on a:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^d \langle \mathbf{f}_i, D_i(\mathbf{f}_j * \varphi) \rangle \\ &= - \sum_{i=1}^d \left\langle \mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j * \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle \\ &= - \sum_{i=1}^d \left\langle \mathbf{f}_i, \mathbf{f}_i * \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle \\ &= - \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \mathbf{f}_i(\omega) \mathbf{f}_i * \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(\omega) d\mu(\omega) \end{aligned}$$

Comme $\forall j = 1, \dots, d$,

$$\sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \mathbf{f}_i(\omega) \mathbf{f}_i * \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(\omega) d\mu(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\Omega} \mathbf{f}_i(\omega) \mathbf{f}_i(\tau_x \omega) d\mu(\omega) \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) dx = 0$$

On en déduit que l'application $x \mapsto \int_{\Omega} \mathbf{f}_i(\omega) \mathbf{f}_i(\tau_x \omega) d\mu(\omega)$ est égale à une constante presque partout et comme elle est continue (hypothèse (H.4)), on obtient $\forall x \in \mathbb{R}^d$:

$$\int_{\Omega} \mathbf{f}_i(\omega) \mathbf{f}_i(\tau_x \omega) d\mu(\omega) = \int_{\Omega} \mathbf{f}_i^2(\omega) d\mu(\omega).$$

D'après le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, T_x \mathbf{f}_i = \mathbf{f}_i$$

et donc $\forall i, \mathbf{f}_i$ est constante, puis nulle vu que $\int_{\Omega} \mathbf{f}_i(\omega) d\mu(\omega) = 0$ ce qui donne le résultat ■

On note également

$$L_{sol}^2 = \left\{ (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_d) \in L^2(\mu)^d; \sum_{i=1}^d \mathbf{f}_i * \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0, \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \right\}.$$

Lemme 4.4.2. *On a la décomposition suivante, dite de Weyl*

$$L^2(\mu)^d = V_{pot}^2 \oplus L_{sol}^2.$$

Preuve :

On pose $A = \{(D_1 \mathbf{f}, \dots, D_d \mathbf{f}); \mathbf{f} \in \mathcal{C}\}$, et l'on va montrer que $A^\perp = L_{sol}^2$. Soit $(\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_d) \in L^2(\mu)^d$ tel que

$$\forall \mathbf{f} \in L^2(\mu), \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d), \sum_{i=1}^d \left\langle \mathbf{g}_i, \mathbf{f} * \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle = 0,$$

On a alors $\forall \mathbf{f} \in L^2(\mu), \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\Omega} \mathbf{f}_i(\omega) \mathbf{f}(\tau_x \omega) d\mu(\omega) \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\Omega} \mathbf{f}_i(\tau_{-x} \omega) \mathbf{f}(\omega) d\mu(\omega) \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx \\ &= - \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^d \mathbf{f}_i * \frac{\partial \check{\varphi}}{\partial x_i}(\omega) \right) \mathbf{f}(\omega) d\mu(\omega) \end{aligned}$$

et ceci implique que $\sum_{i=1}^d \mathbf{f}_i * \frac{\partial \check{\varphi}}{\partial x_i} = 0$ d'où le résultat ■

Définissons la forme bilinéaire suivante sur V_{pot}^2 :

$$\Upsilon^\pi(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_{\Omega} \mathbf{a}_{ij}(\omega) \mathbf{f}_i(\omega) \mathbf{g}_j(\omega) d\pi(\omega)$$

REMARQUE: Si $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_d) = (D_1 \mathbf{f}, \dots, D_d \mathbf{f})$ et $(\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_d) = (D_1 \mathbf{g}, \dots, D_d \mathbf{g})$ sont de "vrais" gradients, alors

$$\Upsilon^\pi(D\mathbf{f}, D\mathbf{g}) = \Psi^\pi(\mathbf{f}, \mathbf{g}).$$

Comme Υ^π est une forme bilinéaire et coercive sur V_{pot}^2 , le théorème de Lax-Milgram assure que pour tout $\mathbf{g} = (\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_d) \in V_{pot}^2$ il existe un unique $\mathbf{f} = (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_d) \in V_{pot}^2$ tel que

$$\forall \mathbf{u} \in V_{pot}^2, \Upsilon^\pi(\mathbf{f}, \mathbf{u}) = \langle \mathbf{g}, \mathbf{u} \rangle.$$

Pour $i = 1, \dots, d$, on choisit $(\mathbf{g}_1^i, \dots, \mathbf{g}_d^i) = (-\frac{1}{2} \mathbf{a}_{i1} e^{-2V}, \dots, -\frac{1}{2} \mathbf{a}_{id} e^{-2V})$ et l'on définit $\mathbf{f}^i \in V_{pot}^2$ comme la solution du problème

$$(4.2) \quad \forall \mathbf{u} \in V_{pot}^2, \Upsilon^\pi(\mathbf{f}^i, \mathbf{u}) = \langle \mathbf{g}^i, \mathbf{u} \rangle.$$

REMARQUE: On n'a pas vraiment besoin que $\mathbf{g}^i \in V_{pot}^2$ mais seulement que $\mathbf{g}^i \in L^2(\mu)^d$. En notant $\bar{\mathbf{g}}^i$ la projection orthogonale de \mathbf{g}^i sur V_{pot}^2 , alors le problème ci-dessus se ramène au problème équivalent suivant:

$$\forall \mathbf{u} \in V_{pot}^2, \Upsilon^\pi(\mathbf{f}^i, \mathbf{u}) = \langle \bar{\mathbf{g}}^i, \mathbf{u} \rangle .$$

REMARQUE: Ce que nous faisons est très similaire à la résolution de l'équation de Poisson avec b_1, \dots, b_d au membre de droite, comme nous l'avons fait dans le cas de coefficients périodiques.

En effet, si l'on considère (4.2) pour tout \mathbf{u} de la forme $\mathbf{u} = (D_1 \mathbf{w}, \dots, D_d \mathbf{w})$, et si l'on suppose un instant (ce qui n'est pas le cas en général) que chaque \mathbf{f}^i est un gradient, ie de la forme $\mathbf{f}^i = D \mathbf{F}^i$, $i = 1, \dots, d$ alors pour chaque i :

$$\frac{1}{2} \sum_{j,k} \int_{\Omega} e^{-2\mathbf{V}} \mathbf{a}_{jk} D_j \mathbf{F}^i D_k \mathbf{w} \, d\mu = \sum_j \int_{\Omega} \mathbf{g}_j^i D_j \mathbf{w} \, d\mu.$$

En d'autres termes

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \sum_{j,k} \int_{\Omega} D_k (e^{-2\mathbf{V}} \mathbf{a}_{jk} D_j \mathbf{F}^i) \mathbf{w} \, d\mu &= \frac{1}{2} \sum_j \int_{\Omega} D_j (\mathbf{a}_{ij} e^{-2\mathbf{V}}) \mathbf{w} \, d\mu \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{b}_i \mathbf{w} e^{-2\mathbf{V}} \, d\mu, \end{aligned}$$

$\forall \mathbf{w} \in L^2(\mu)$ ce qui correspond exactement à l'équation

$$\frac{1}{2} \sum_{j,k} e^{2\mathbf{V}} D_k (e^{-2\mathbf{V}} \mathbf{a}_{jk} D_j \mathbf{F}^i) + \mathbf{b}_i = 0.$$

Ainsi chaque \mathbf{F}^i correspondrait exactement au $\widehat{\mathbf{b}}_i$ du cas périodique. En tout cas, les solutions \mathbf{f}^i de (4.2) ne sont en général pas les gradients de champs aléatoires stationnaires (mais sont par contre des gradients de champs aléatoires non stationnaires, ce que nous exploiterons plus loin). Remarquons enfin que dans les formules finales d'homogénéisation du cas périodique, seul $\nabla \widehat{\mathbf{b}}_i$ est utilisé et non $\widehat{\mathbf{b}}_i$ lui-même.

REMARQUE: Tandis que l'équation

$$L \widehat{\mathbf{b}}_i + \mathbf{b}_i = 0$$

n'a pas nécessairement de solution, $\forall \lambda > 0$ l'équation

$$L \widehat{\mathbf{b}}_i^\lambda - \lambda \widehat{\mathbf{b}}_i^\lambda + \mathbf{b}_i = 0$$

a une solution, et l'on peut montrer (cf [Olla]) que $D \widehat{\mathbf{b}}_i^\lambda$ converge, lorsque $\lambda \rightarrow 0$, vers une limite dans $L^2(\mu)^d$ (et ainsi dans V_{pot}^2). Mais $\widehat{\mathbf{b}}_i^\lambda$ ne converge pas dans $L^2(\mu)^d$ lorsque $\lambda \rightarrow 0$.

Supposons également que \mathbf{d} est une fonction bornée sur (Ω, μ) et qu'il existe des fonctions bornées $\widehat{\mathbf{d}}_1, \dots, \widehat{\mathbf{d}}_d \in H^1(\Omega)$ telles que

$$e^{-2V} \mathbf{d} = D_1 \widehat{\mathbf{d}}_1 + \dots + D_n \widehat{\mathbf{d}}_d.$$

Ceci implique en particulier que

$$\int_{\Omega} \mathbf{d}(\omega) e^{-2V(\omega)} d\mu(\omega) = 0.$$

On note $(\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_d)$ les solutions dans V_{pot}^2 de

$$\Upsilon^\pi(\mathbf{g}, \mathbf{u}) = \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \widehat{\mathbf{d}}_i \mathbf{u}_i d\mu, \quad \forall (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d) \in V_{pot}^2.$$

4.5 Homogénéisation

Soit c une variable aléatoire bornée définie sur $(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$. On note

$$V_t^{\varepsilon, \omega} = \int_0^t \left(\frac{1}{\varepsilon} d \left(\frac{X_s^{\varepsilon, \omega}}{\varepsilon}, \omega \right) + c \left(\frac{X_s^{\varepsilon, \omega}}{\varepsilon}, \omega \right) \right) ds.$$

Nous allons étudier la convergence en loi du couple $\{(X_t^{\varepsilon, \omega}, V_t^{\varepsilon, \omega}); t \geq 0\}$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Aux variables aléatoires \mathbf{f}^i définie dans la précédente section, on associe le champ aléatoire stationnaire suivant $f_j^i(x, \omega) = \mathbf{f}_j^i(\tau_x \omega)$.

A l'aide de la formule

$$v_i(x) = v_i(0) + \int_0^1 \sum_{j=1}^d \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(tx, \omega) dt,$$

on veut définir une fonction dont le gradient serait f^i .

Proposition 4.5.1. *Si l'on pose*

$$v_i(x, \omega) = \int_0^1 \sum_{j=1}^d x_j f_j^i(tx, \omega) dt$$

alors v_i est un champ aléatoire non stationnaire tel que $\forall x, \forall k = 1, \dots, d$

$$D_k v_i(x, \omega) = \mathbf{f}_k^i(\tau_x \omega) = f_k^i(x, \omega).$$

De la même manière,

$$h(x, \omega) = \int_0^1 \sum_{i=1}^d x_i g_i(tx, \omega) dt$$

est un champ aléatoire non stationnaire tel que $D_i h(x, \omega) = g_i(x, \omega)$.

Preuve :

Soit $(g_n)_n$ une suite de \mathcal{C} telle que

$$(D_1 g_n, \dots, D_d g_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2(\mu)^d} \mathbf{f}^i.$$

En remarquant que

$$g_n(x, \omega) = \int_0^1 \sum_{j=1}^d x_j D_j g_n(tx, \omega) dt,$$

on obtient l'existence de $F(x, \omega)$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, g_n(x, \cdot) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2(\mu)} F(x, \cdot),$$

et $\forall x \in \mathbb{R}^d, \forall \omega \in \Omega$

$$F(x, \omega) = \int_0^1 \sum_{j=1}^d x_j f_j^i(tx, \omega) dt.$$

Comme $\forall j = 1, \dots, d$, les opérateurs D_j sont des opérateurs fermés de $Dom(D_i)$ dans $L^2(\mu)$, on a

$$\left. \begin{array}{l} g_n(x, \cdot) \xrightarrow{L^2(\mu)} F(x, \cdot) \\ D_k g_n(x, \cdot) \xrightarrow{L^2(\mu)} f_k^i \end{array} \right\} \Rightarrow D_k F(x, \cdot) = f_k^i(x, \cdot)$$

(de même pour h) d'où le résultat ■

Pour $i = 1, \dots, d$, on pose

$$u_i^\varepsilon(x, \omega) = x_i + \varepsilon v_i \left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega \right)$$

et on note que

$$L^{\varepsilon, \omega} u_i^\varepsilon(x, \omega) = 0.$$

En effet, il suffit pour voir cela de montrer que:

$\forall k = 1, \dots, d, \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d), \forall \mathbf{w} \in \mathcal{C}$

$$A \triangleq \int_{\Omega} \langle L^{\varepsilon, \omega} u_k^\varepsilon, \varphi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d; e^{-2V(\frac{x}{\varepsilon}, \omega)} dx)} \mathbf{w}(\omega) d\mu(\omega) = 0$$

Or

$$\begin{aligned}
A &= - \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij} \left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega \right) D_i u_k^\varepsilon \left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) \mathbf{w}(\omega) dx d\mu(\omega) \\
&= - \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij} \left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega \right) (\delta_{ik} + f_i^k) \left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) \mathbf{w}(\omega) dx d\mu(\omega) \\
&= - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\Omega} \sum_{i,j} \mathbf{a}_{ij}(\omega) \mathbf{f}_i^k(\omega) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) \mathbf{w}(\tau_{-\frac{x}{\varepsilon}} \omega) d\mu(\omega) dx \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\Omega} \sum_j \mathbf{a}_{kj}(\omega) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) \mathbf{w}(\tau_{-\frac{x}{\varepsilon}} \omega) d\mu(\omega) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i,j} \mathbf{a}_{ij}(\omega) \mathbf{f}_i^k(\omega) \left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{w}(\tau_{-\frac{x}{\varepsilon}} \omega) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) dx \right) d\mu(\omega) \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_j \mathbf{a}_{kj}(\omega) \left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{w}(\tau_{-\frac{x}{\varepsilon}} \omega) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) dx \right) d\mu(\omega) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

car $\left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{w}(\tau_{-\frac{x}{\varepsilon}} \omega) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) dx \right)_{1 \leq j \leq d} \in V_{pot}^2$ et par définition de \mathbf{f}^k .

On montre de la même manière, on pose $h^\varepsilon(x, \omega) = \varepsilon h(x/\varepsilon, \omega)$ et on montre que

$$L^{\varepsilon, \omega} h^\varepsilon(\cdot, \omega) = \frac{-d(\cdot/\varepsilon, \omega)}{\varepsilon}.$$

au sens faible.

Proposition 4.5.2. Avec les notations précédentes, $\forall x \in \mathbb{R}^d$, pour presque tout $\omega \in \Omega$,

$$u \left(\frac{X_t^{\varepsilon, \omega}}{\varepsilon}, \omega \right) = \int_0^t (I + Dv) \cdot \sigma \left(\frac{X_s^{\varepsilon, \omega}}{\varepsilon}, \omega \right) dB_s, P_x \text{ ps},$$

et

$$V_t^{\varepsilon, \omega} + \varepsilon \left(h \left(\frac{X_t^{\varepsilon, \omega}}{\varepsilon}, \omega \right) - h \left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega \right) \right) = \int_0^t c \left(\frac{X_s^{\varepsilon, \omega}}{\varepsilon}, \omega \right) ds + \int_0^t {}^t g \cdot \sigma \left(\frac{X_s^{\varepsilon, \omega}}{\varepsilon}, \omega \right) dB_s.$$

Preuve :

L'idée est d'adapter la démonstration de la proposition 3.5.2. En effet, si l'on note ρ_n une suite régularisante et $u_n(x, \omega) = u(x, \omega) * \rho_n$, en appliquant la formule d'Itô, on a $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$u_n(X_t, \omega) = u_n(x, \omega) + \int_0^t Lu_n(X_s, \omega) ds + \int_0^t {}^t \nabla u_n(x, \omega) \cdot \sigma(x, \omega) dB_s.$$

Comme $\forall \omega \in \Omega$, l'application $x \mapsto u(x, \omega) \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\forall \omega \in \Omega, \nabla u_n(x, \omega) \xrightarrow[L_{loc}^2]{n \rightarrow \infty} \nabla u(x, \omega),$$

Comme u est continue, on a

$$\forall \omega \in \Omega, \forall x, u_n(X_t, \omega) \xrightarrow[Probs]{n \rightarrow \infty} u(X_t, \omega).$$

De même pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a

$$u_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} u(x).$$

Les intégrales se traitent toutes de la même manière en suivant la démonstration de la proposition 3.5.2. Par exemple, pour l'intégrale stochastique, montrons que

$$\int_0^t {}^t \nabla u_n(X_s, \omega) \cdot \sigma(X_s, \omega) dB_s \xrightarrow[Prob]{n \rightarrow \infty} \int_0^t {}^t \nabla u(X_s, \omega) \cdot \sigma(X_s, \omega) dB_s.$$

Pour cela, il suffit de vérifier que:

$$\int_0^t |{}^t \nabla u_n(X_s, \omega) \cdot \sigma(X_s, \omega) - {}^t \nabla u(X_s, \omega) \cdot \sigma(X_s, \omega)| ds \xrightarrow[Prob]{n \rightarrow \infty} 0.$$

Or en notant

$$A_\varepsilon = \mathbb{P} \left(\int_0^t |{}^t \nabla u_n(X_s, \omega) \cdot \sigma(X_s, \omega) - {}^t \nabla u(X_s, \omega) \cdot \sigma(X_s, \omega)| ds > \varepsilon \right),$$

on a:

$$\begin{aligned} A_\varepsilon &\leq \mathbb{P} \left(\int_0^t |{}^t \nabla u(X_s, \omega) - {}^t \nabla u_n(X_s, \omega)| |\sigma(X_s, \omega)| ds > \varepsilon; \sup_{0 \leq s \leq t} |X_s| \leq R \right) \\ &\quad + \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq s \leq t} |X_s| > R \right) \\ &\stackrel{\text{lemme 4.5.6}}{\leq} \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E} \left[\int_0^t |{}^t \nabla u(X_s, \omega) - {}^t \nabla u_n(X_s, \omega)| |\sigma(X_s, \omega)| ds \mathbb{1}_{\{\sup_{0 \leq s \leq t} |X_s| \leq R\}} \right] + M \exp \left(\frac{-R^2}{Mt} \right) \\ &\leq \frac{M}{\varepsilon} \int_0^t \int_{B(0;R)} |\nabla u_n(y, \omega) - \nabla u(y, \omega)| \exp \left(-\frac{M|y-x|^2}{s^{d/2}} \right) dy ds + M \exp \left(\frac{-R^2}{Mt} \right) \\ &\leq \frac{M'(t, d, M)}{\varepsilon} \int_0^t \int_{B(0;R)} |\nabla u_n(x) - \nabla u(x)| dx ds + M \exp \left(\frac{-R^2}{Mt} \right) \end{aligned}$$

Cette dernière majoration permet d'obtenir la convergence en probabilité désirée vu la convergence L_{loc}^2 . Les mêmes raisonnements sont valables pour la deuxième formule ■

La démarche que l'on va maintenant adopter est très similaire au cas périodique. Soit f une fonction continue bornée sur \mathbb{R}^d . On note $z_{\varepsilon, \omega}(x, t)$ la solution de l'EDP

$$(4.3) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} z_{\varepsilon, \omega}(x, t) &= L^{\varepsilon, \omega} z_{\varepsilon, \omega}(x, t) \\ z_{\varepsilon, \omega}(x, 0) &= f(x) \end{cases}$$

qui est donnée d'après la formule de Feynmann-Kac par:

$$z_{\varepsilon,\omega}(x, t) = \mathbb{E}_x^{\varepsilon,\omega} [f(X_t^{\varepsilon,\omega}) \exp(V_t^{\varepsilon,\omega})].$$

On ne va considérer à partir de maintenant que le cas $x = 0$ et l'on verra par la suite que le cas général s'en déduit. Si l'on pose

$$M_t^{\varepsilon,\omega} = X_t^{\varepsilon,\omega} + \varepsilon v \left(\frac{X_t^{\varepsilon,\omega}}{\varepsilon}, \omega \right)$$

et

$$Q_t^{\varepsilon,\omega} = V_t^{\varepsilon,\omega} + \varepsilon h \left(\frac{X_t^{\varepsilon,\omega}}{\varepsilon}, \omega \right)$$

alors

$$z'_{\varepsilon,\omega}(0, t) = \mathbb{E}_0^{\varepsilon,\omega} [f(M_t^{\varepsilon,\omega}) \exp(Q_t^{\varepsilon,\omega})]$$

converge simplement lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ si et seulement si $z_{\varepsilon,\omega}(t, 0)$ converge simplement lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, et dans ce cas elles ont même limite (voir le lemme 4.5.3 suivant).

Il est important pour la suite de remarquer que

$$\begin{aligned} \varepsilon X_{t/\varepsilon^2}^{1,\omega} &= \varepsilon \int_0^{t/\varepsilon^2} b(X_s^{1,\omega}, \omega) ds + \varepsilon \int_0^{t/\varepsilon^2} \sigma(X_s^{1,\omega}, \omega) dB_s \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t b \left(\frac{\varepsilon X_{r/\varepsilon^2}^{1,\omega}}{\varepsilon}, \omega \right) dr + \int_0^t \sigma \left(\frac{\varepsilon X_{r/\varepsilon^2}^{1,\omega}}{\varepsilon}, \omega \right) dB_r^\varepsilon \end{aligned}$$

où $B_r^\varepsilon = \varepsilon B_{r/\varepsilon^2}$. Ainsi $\bar{X}_t^\varepsilon = \varepsilon X_{t/\varepsilon^2}^{1,\omega}$ satisfait l'EDS

$$\bar{X}_t^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t b \left(\frac{\bar{X}_s^\varepsilon}{\varepsilon}, \omega \right) dr + \int_0^t \sigma \left(\frac{\bar{X}_s^\varepsilon}{\varepsilon}, \omega \right) dB_s^\varepsilon,$$

en conséquence la loi du processus $\{X_t^{\omega,\varepsilon}, t \geq 0\}$ est celle du processus $\{\varepsilon X_{t/\varepsilon^2}^{1,\omega}, t \geq 0\}$, de même que la loi du processus $\{\frac{X_t^{\omega,\varepsilon}}{\varepsilon}, t \geq 0\}$ est celle du processus $\{X_{t/\varepsilon^2}^{1,\omega}, t \geq 0\}$ et par suite, celle du processus $\{\tau_{X_t^{\omega,\varepsilon}/\varepsilon}, t \geq 0\}$ est celle de $\{Y_{t/\varepsilon^2}^\omega, t \geq 0\}$.

Nous allons maintenant pouvoir déterminer la limite de $z'_{\varepsilon,\omega}(0, t)$. En utilisant le théorème ergodique de la même façon que dans le cas périodique (voir les lemmes 2.6.2 et 2.6.3 page 42), on obtient la convergence en probabilité du couple $(M_t^{\varepsilon,\omega}, Q_t^{\varepsilon,\omega})$ vers $(A^{1/2}B_t, Ct)$ où

$$A = \int_{\Omega} {}^t(I + \mathbf{f}) \cdot \mathbf{a} \cdot (I + \mathbf{f})(\omega) e^{-2\mathbf{V}(\omega)} d\mu(\omega),$$

$$C = \int_{\Omega} \left(\mathbf{c}(\omega) + \frac{1}{2} {}^t \mathbf{g} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{g}(\omega) \right) e^{-2\mathbf{V}(\omega)} d\mu(\omega).$$

En effet, si par exemple $\mathbf{k}(\omega) = (I + \mathbf{f}) \cdot \mathbf{a} \cdot (I + \mathbf{f})(\omega)$, on a :

$$\begin{aligned} \langle M^{\varepsilon, \omega} \rangle_t &\stackrel{\text{loi}}{=} \int_0^t \mathbf{k}(Y_{s/\varepsilon^2}^\omega) ds \\ &= \varepsilon^2 \int_0^{t/\varepsilon^2} \mathbf{k}(Y_r^\omega) dr \\ &\xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{\pi \text{ p.s.}} t \int_{\Omega} \mathbf{k}(\omega) e^{-2\mathbf{V}(\omega)} d\mu(\omega), \end{aligned}$$

d'après le théorème ergodique.

Etablissons maintenant le

Lemme 4.5.3. *Pour tout $T > 0$,*

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \varepsilon v \left(\frac{X_t^{\varepsilon, \omega}}{\varepsilon}, \omega \right) \right| \rightarrow 0,$$

et

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \varepsilon h \left(\frac{X_t^{\varepsilon, \omega}}{\varepsilon}, \omega \right) \right| \rightarrow 0,$$

en $\int_{\Omega} \mathbb{P}_0^\omega(\cdot) d\mu(\omega)$ -probabilité lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Dans le but de démontrer ce lemme, on montre tout d'abord le résultat suivant :

Lemme 4.5.4. *Soit $v_i^\varepsilon(x, \omega) = \varepsilon v_i\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right)$ (resp $h^\varepsilon(x, \omega) = \varepsilon h\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right)$). Alors pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^d, \forall i = 1, \dots, d$,*

$$\begin{aligned} v_i^\varepsilon &\xrightarrow{L^2(K)} 0, \\ &\left(\text{resp } h^\varepsilon \xrightarrow{L^2(K)} 0 \right), \end{aligned}$$

en μ -probabilité.

Preuve :

Pour alléger les notations, on oublie l'indice i . On considère un compact K dont l'intérieur contient 0. Il résulte du théorème ergodique de Birkhoff que

$$\frac{1}{n^d} \int_{nK} f_j(x, \omega) dx \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mu \text{ p.s.}} \text{mes}(K) \int_{\Omega} f_j(\omega) d\mu(\omega),$$

d'où $\forall g \in L^2(K), \forall j = 1, \dots, d$,

$$\int_K f_j\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right) g(x) dx \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{\mu \text{ p.s.}} \int_{\Omega} \mathbf{f}_j(\omega) d\mu(\omega) \int_K g(x) dx = 0.$$

Ainsi $f\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}, \omega\right)$ converge faiblement vers 0 dans $L^2(K)$, μ p.s. . Donc $\|f\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}, \omega\right)\|_{L^2(K)}$ est μ p.s. borné quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Or d'après l'inégalité de Poincaré,

$$\begin{aligned} \left\| v^\varepsilon(\cdot, \omega) - \frac{1}{\text{mes}(K)} \int_K v^\varepsilon(x, \omega) dx \right\|_{L^2(K)}^2 &\leq c \sum_{j=1}^d \left\| f_j\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}, \omega\right) \right\|_{L^2(K)}^2 \\ &\leq c(\omega) \end{aligned}$$

Ainsi $v^\varepsilon(\cdot, \omega) - \frac{1}{\text{mes}(K)} \int_K v^\varepsilon(x, \omega) dx$ converge faiblement vers 0 dans $H^1(K)$ (car $f_j\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}, \omega\right) = \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial x_j}(x, \omega)$), et comme l'injection de $H^1(K)$ dans $L^2(K)$ est compacte, cette famille converge aussi fortement dans $L^2(K)$ vers une fonction h dont les dérivées sont nulles (ce sont les limites faibles des $f_j\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}, \omega\right)$). Donc $h(x, \omega) = h(\omega)$, mais cette fonction doit aussi être d'intégrale nulle sur K donc $h(\omega) = 0$.

Il faut alors maintenant montrer que

$$\int_K v^\varepsilon(x, \omega) dx \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{\text{prob.}} 0.$$

Mais

$$\begin{aligned} \int_K v^\varepsilon(x, \omega) dx &= \sum_i \int_K \int_0^1 x_i f_i\left(\frac{tx}{\varepsilon}, \omega\right) dt dx \\ &= \sum_i \int_0^1 \int_K x_i f_i\left(\frac{tx}{\varepsilon}, \omega\right) dx dt \\ &= \sum_i \int_0^\tau \int_K x_i f_i\left(\frac{tx}{\varepsilon}, \omega\right) dx dt + \sum_i \int_\tau^1 \int_K x_i f_i\left(\frac{x}{\varepsilon/t}, \omega\right) dx dt. \end{aligned}$$

Or $\forall \tau > 0$, on a

$$\sum_i \int_\tau^1 \int_K x_i f_i\left(\frac{x}{\varepsilon/t}, \omega\right) dx dt \rightarrow 0, \text{ car la convergence}$$

$$\int_K x_i f_i\left(\frac{tx}{\varepsilon}, \omega\right) dx \rightarrow 0$$

est uniforme sur l'ensemble $\{t \geq \tau\}$, puis

$$\begin{aligned} \sum_i \int_\Omega \left| \int_0^\tau \int_K x_i f_i\left(\frac{tx}{\varepsilon}, \omega\right) dx dt \right| d\mu(\omega) &\leq \sum_i \int_0^\tau \int_K \int_\Omega |x_i| |f_i\left(\frac{tx}{\varepsilon}, \omega\right)| d\mu(\omega) dx dt \\ &= \sum_i \int_0^\tau \int_K \int_\Omega |x_i| |f_i(\omega)| d\mu(\omega) dx dt \\ &= \tau \|f_i\|_{L^1(\mu)} \sum_i \int_K |x_i| dx \\ &= c'\tau \end{aligned}$$

et ceci permet de conclure ■

Nous déduisons du lemme précédent le

Lemme 4.5.5. $v_i^\varepsilon(\cdot, \omega) \rightarrow 0$ et $h^\varepsilon(\cdot, \omega) \rightarrow 0$ uniformément sur les compacts de \mathbb{R}^d , en μ -probabilité, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, pour $1 \leq i \leq d$.

Preuve :

On rappelle que

$$u_i^\varepsilon(x, \omega) = x_i + v_i^\varepsilon(x, \omega)$$

satisfait l'EDP sous forme divergence suivante

$$L^\varepsilon u_i^\varepsilon(x, \omega) = 0, x \in \mathbb{R}^d,$$

ce qui implique d'après le résultat de Giorgi-Nash, voir par exemple le théorème 8.24 p. 192 de [Gilbarg & Trudinger], que pour tout compact K de \mathbb{R}^d , il existe $\alpha > 0$ et une constante C qui ne dépend que du compact K (et non de ε) tels que

$$\|u_i^\varepsilon(\cdot, \omega)\|_{C^\alpha(K)} \leq C(1 + \|u_i^\varepsilon(\cdot, \omega)\|_{L^2(K)}).$$

Alors grâce au lemme 4.5.4

$$\|u_i^\varepsilon(\cdot, \omega)\|_{C^\alpha(K)} \leq C',$$

et il résulte alors du théorème d'Ascoli que pour μ presque tout $\omega \in \Omega$, la famille $(v_i^\varepsilon(\cdot, \omega))_{\varepsilon > 0}$ est un sous-ensemble compact de $C(K)$, or le lemme 4.5.4 assure que le seul point d'accumulation possible est 0 et le lemme est ainsi établi ■

Preuve du lemme 4.5.3:

Pour tout sous-ensemble compact $K \subseteq \mathbb{R}^d$, définissons le temps de sortie du processus de diffusion X_t^ε du compact K :

$$\tau_{K^c}^\varepsilon = \inf \{t > 0; X_t^{\varepsilon, \omega} \notin K\}.$$

Pour tout $\delta > 0$, $K \subset \mathbb{R}^d$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbb{P}_0^\omega \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \varepsilon v_i \left(\frac{X_t^{\varepsilon, \omega}}{\varepsilon}, \omega \right) \right| > \delta \right) d\mu(\omega) &\leq \int_{\Omega} \mathbb{P}_0^\omega (\tau_{K^c}^\varepsilon < T) d\mu(\omega) \\ &+ \mu \left(\sup_{x \in K} |v_i^\varepsilon(x, \omega)| > \delta \right). \end{aligned}$$

Par le lemme 4.5.5, il suffit alors de montrer que $\forall \rho > 0$, il existe $K \subset \mathbb{R}^d$ tel que

$$\int_{\Omega} \mathbb{P}_0^\omega (\tau_{K^c}^\varepsilon < T) d\mu(\omega) \leq \rho, \forall \varepsilon > 0.$$

Ceci va résulter du lemme suivant ■

Lemme 4.5.6. *Il existe $M = M(\lambda, \Lambda, d)$ tel que $\forall \varepsilon > 0, \forall \omega \in \Omega, \forall t > 0, \forall r > 0,$*

$$\mathbb{P}_0^{\varepsilon, \omega} \left(\sup_{0 \leq s \leq t} |X_s^{\varepsilon, \omega}| \geq r \right) \leq M \exp(-r^2/Mt).$$

Preuve :

Pour simplifier l'écriture, on oublie les indices ε et ω . Définissons

$$\tau_r = \inf \{t > 0; |X_t| \geq r\}.$$

Par la propriété de Markov forte,

$$\mathbb{P}_0 (|X_t| > r) = \mathbb{E}_0 \left[\mathbb{P}_{X_{\tau_r}} (|X_{t-\tau_r}| > r) \mathbb{1}_{\{\tau_r < t\}} \right].$$

On rappelle que, d'après les estimations d'Aronson,

$$\frac{1}{mt^{d/2}} \exp(-m|y-x|^2/t) \leq p(t, x, y) \leq \frac{m}{t^{d/2}} \exp(-|y-x|^2/mt).$$

où m est une constante ne dépendant que de λ, Λ, d . Donc si $|x| = r$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x (|X_t| > r) &= \int_{B(0,r)^c} p(t, x, y) dy \\ &\geq \int_{B(0,r)^c} \frac{1}{mt^{d/2}} \exp(-m|y-x|^2/t) dy \\ &\geq \int_{B(-x,r)^c} \frac{1}{mt^{d/2}} \exp(-m|u|^2/t) du \\ &\geq \int_{B(-x/\sqrt{t}, r/\sqrt{t})^c} \frac{1}{m} \exp(-m|y|^2) dy \\ &\geq \delta \quad (\text{constante}) \end{aligned}$$

On a alors

$$\inf_{s>0} \mathbb{P}_x (|X_s| > r) \geq \delta$$

et

$$\mathbb{P} (\tau_r < t) \leq \frac{1}{\delta} \mathbb{P}_0 (|X_t| > r)$$

En conséquence

$$\mathbb{P} (\tau_r < t) \leq \frac{A}{\delta} \exp(-r^2/Bt)$$

où A, B sont des constantes ne dépendant que de λ, Λ, d grâce aux estimations d'Aronson ■

Nous avons jusque-là montré la convergence du couple

$$(X_t^{\varepsilon, \omega}, C_t^{\varepsilon, \omega}) \rightarrow (A^{1/2}B_t, Ct)$$

au sens de la convergence faible dans l'espace $C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^{d+1})$ sous \mathbb{P}_0^ω , en μ -probabilité.

Nous avons ainsi obtenu la limite de l'expression

$$\mathbb{E}_{0,\omega} [f(X_t^{\varepsilon,\omega}) \exp(V_t^{\varepsilon,\omega})].$$

Il reste à calculer la limite de cette expression lorsque le point de départ n'est plus 0 mais $x \in \mathbb{R}^d$.

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{x,\omega} \left[f(X_t^{\varepsilon,\omega}) \exp \left(\int_0^t \left[c \left(\frac{X_s^{\varepsilon,\omega}}{\varepsilon}, \omega \right) + \frac{1}{\varepsilon} d \left(\frac{X_s^{\varepsilon,\omega}}{\varepsilon}, \omega \right) \right] ds \right) \right] \\ &= \mathbb{E}_{0,\tau_{x/\varepsilon}\omega} \left[f(X_t^{\varepsilon,\omega} + x) \exp \left(\int_0^t \left[c \left(\frac{X_s^{\varepsilon,\omega}}{\varepsilon}, \tau_{x/\varepsilon}\omega \right) + \frac{1}{\varepsilon} d \left(\frac{X_s^{\varepsilon,\omega}}{\varepsilon}, \tau_{x/\varepsilon}\omega \right) \right] ds \right) \right] \\ &\stackrel{\text{loi}}{=} \mathbb{E}_{0,\omega} \left[f(X_t^{\varepsilon,\omega} + x) \exp \left(\int_0^t \left[c \left(\frac{X_s^{\varepsilon,\omega}}{\varepsilon}, \omega \right) + \frac{1}{\varepsilon} d \left(\frac{X_s^{\varepsilon,\omega}}{\varepsilon}, \omega \right) \right] ds \right) \right] \\ &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E} [f(x + A^{1/2} B_t) \exp(Ct)] \end{aligned}$$

ce qui nous donne le résultat. Pour obtenir la première de ces égalités, nous avons utilisé le fait que si

$$\begin{aligned} X_t &= x + \int_0^t b \left(\frac{X_s}{\varepsilon}, \omega \right) ds + \int_0^t \sigma \left(\frac{X_s}{\varepsilon}, \omega \right) dB_s \\ Y_t &\triangleq X_t - x \end{aligned}$$

alors

$$Y_t = x + \int_0^t b \left(\frac{Y_s}{\varepsilon}, \tau_{x/\varepsilon}\omega \right) ds + \int_0^t \sigma \left(\frac{Y_s}{\varepsilon}, \tau_{x/\varepsilon}\omega \right) dB_s .$$

4.6 Ajout d'un terme différentiel d'ordre un

Il faut maintenant s'occuper de lever les contraintes portant sur la dérive. En effet, on n'a considéré jusqu'à maintenant que des processus de diffusion ayant des générateurs du type:

$$L^{\varepsilon,\omega} = \frac{1}{2} e^{2V(x/\varepsilon,\omega)} \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} e^{-2V(x/\varepsilon,\omega)} \left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \right).$$

On note $\mathbb{P}_x^{\varepsilon,\omega}$ la loi du processus de diffusion associé. Soit b une fonction bornée sur Ω telle que l'application $x \mapsto b(x, \omega)$ soit localement lipschitzienne. On considère également le générateur

$$\tilde{L}^{\varepsilon,\omega} = L^{\varepsilon,\omega} + \sum_{i=1}^d b_i \left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega \right) \frac{\partial}{\partial x_i} .$$

dont on note $\tilde{\mathbb{P}}_x^{\varepsilon,\omega}$ la loi du processus de diffusion associé. D'après le théorème de Girsanov, on a:

$$\frac{d\tilde{\mathbb{P}}_x^{\varepsilon,\omega}}{d\mathbb{P}_x^{\varepsilon,\omega}} \Big|_{\mathcal{F}_t^{\varepsilon,\omega}} = \exp \left(\int_0^t \left\langle \sigma^{-1} \cdot b \left(\frac{X_r^{\varepsilon,\omega}}{\varepsilon}, \omega \right), dB_r \right\rangle - \frac{1}{2} \int_0^t \langle a^{-1} b, b \rangle \left(\frac{X_r^{\varepsilon,\omega}}{\varepsilon} \right) ds \right) = Z_t^{\varepsilon,\omega} .$$

Sous $\tilde{\mathbb{P}}^{\varepsilon, \omega}$, on a toujours d'après le théorème de Girsanov:

$$u(X_t^{\varepsilon, \omega}) = \int_0^t (I + Dv) \cdot b \left(\frac{X_s^{\varepsilon, \omega}}{\varepsilon}, \omega \right) ds + \int_0^t (I + Dv) \cdot \sigma \left(\frac{X_s^{\varepsilon, \omega}}{\varepsilon}, \omega \right) dB_s$$

et

$$Q_t^{\varepsilon, \omega} = \int_0^t (c + {}^t g \cdot b) \left(\frac{X_s^{\varepsilon, \omega}}{\varepsilon}, \omega \right) ds + \int_0^t {}^t g \cdot \sigma \left(\frac{X_s^{\varepsilon, \omega}}{\varepsilon}, \omega \right) dB_s.$$

On pose

$$B = \int_{\Omega} (I + \mathbf{f}) \cdot \mathbf{b}(\omega) e^{-2\mathbf{V}(\omega)} d\mu(\omega),$$

$$C = \int_{\Omega} (c + {}^t \mathbf{g} \cdot \mathbf{b})(\omega) e^{-2\mathbf{V}(\omega)} d\mu(\omega)$$

$$A = \int_{\Omega} \left(\begin{array}{c|c} (I + \mathbf{f}) \cdot \mathbf{a} \cdot {}^t(I + \mathbf{f})(\omega) & (I + \mathbf{f}) \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{g}(\omega) \\ \hline {}^t \mathbf{g} \cdot \mathbf{a} \cdot {}^t(I + \mathbf{f})(\omega) & {}^t \mathbf{g} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{g}(\omega) \end{array} \right) e^{-2\mathbf{V}(\omega)} d\mu(\omega)$$

Alors $(X_t^{\varepsilon, \omega}, V_t^{\varepsilon, \omega})$ converge en loi dans $C([0; t]; \mathbb{R}^{d+1})$ sous $\mathbb{P}_x^{\varepsilon, \omega}$ vers le processus $(d + 1)$ - dimensionnel

$$x + \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} t + A^{1/2} B'_t$$

où B'_t est un mouvement brownien standard $(d+1)$ -dimensionnel. Or si f est une fonction bornée sur $[0; t] \times C([0; t]; \mathbb{R}^{d+1})$ et si

$$N_t^{\varepsilon, \omega} = \int_0^t \left\langle \sigma^{-1} \cdot b \left(\frac{X_r^{\varepsilon, \omega}}{\varepsilon}, \omega \right), dB_r \right\rangle,$$

alors il est facile de voir que

$$\exp(\langle N^{\varepsilon, \omega} \rangle_t) \leq e^{\lambda \|b\|_{\infty}^2 t},$$

de telle sorte que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x^{\varepsilon, \omega} [Z_t^{\varepsilon, \omega} f(\cdot)] &\leq \mathbb{E}_x^{\varepsilon, \omega} \left[e^{2N_t^{\varepsilon, \omega} - \frac{\lambda}{2} \langle N^{\varepsilon, \omega} \rangle_t} \right]^{1/2} \mathbb{E}_x^{\varepsilon, \omega} \left[e^{\langle N^{\varepsilon, \omega} \rangle_t} f(\cdot)^2 \right]^{1/2} \\ &\leq e^{\|b\|_{\infty}^2 \lambda t / 2} \mathbb{E}_x^{\varepsilon, \omega} [f(\cdot)^2]^{1/2} \end{aligned}$$

et ceci entraîne que la convergence en probabilité sous $\mathbb{P}_x^{\varepsilon, \omega}$ vers un processus déterministe est équivalente à la convergence en probabilité vers le même processus déterministe sous $\tilde{\mathbb{P}}_x^{\varepsilon, \omega}$. On montre alors la convergence du couple $(X_t^{\varepsilon, \omega}, V_t^{\varepsilon, \omega})$ vers $x + \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} t + A^{1/2} B'_t$ à également lieu sous $\tilde{\mathbb{P}}_x^{\varepsilon, \omega}$ en utilisant la convergence en probabilité de la matrice de covariance de ce couple. Ceci termine l'homogénéisation en milieu aléatoire ■

Bibliography

- [Bers, John & Schechter] L. Bers, F. John et M. Schechter, *Partial differential equations*, Lectures in applied mathematics, volume 3A, American Mathematical Society.
- [Brezis] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*, Masson, 1983.
- [Da Prato & Zabczyk] G. Da Prato & J. Zabczyk, *Ergodicity for Infinite Dimensional Systems*, London Mathematical Society, Lecture Note Series 229, Cambridge University Press, 1996.
- [Friedman] A. Friedman, *Stochastic differential equations and applications*, Volume 1, Academic Press, 1975.
- [Friedman2] A. Friedman, *Partial Differential Equations*.
- [Fukushima] M. Fukushima, *Dirichlet Forms and Markov Processes*, North-Holland Mathematical Library, 1980.
- [GGOSS] Nina Gantert, Josselin Garnier, Stefano Olla, Zhan Shi, Alain-Sol Sznitman, *Milieux aléatoires*, édité par Francis Comets et Etienne Pardoux, Panoramas et Synthèses, numéro 12, Société mathématique de France, 2001.
- [Gilbarg & Trudinger] D. Gilbarg, N.S.Trudinger, *Elliptic partial equation of second order*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaft 224, p. 235, Springer 1977.
- [Hirsch] F.Hirsch, G.Lacombe, *Eléments d'analyse fonctionnelle*, p307, 1999.
- [Karatzas & Shreve] I. Karatzas et S.E. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag, 2^e édition, 1991.
- [Krylov] N. V. Krylov, *Controlled diffusion processes*, Trans. by A.B.Aries, Applications to Mathematics 14, Springer, 1980.
- [Krylov2] N. V. Krylov, *Introduction to the theory of diffusion processes*, American Mathematical Society.
- [Lejay] A. Lejay, *Méthodes probabilistes pour l'homogénéisation des opérateurs sous forme divergence: cas linéaire et semilinéaires*, thèse, Marseille, 2000.

- [Olla] S. Olla, *Homogenization of diffusion processes in Random Fields*, Cours de l'école doctorale, Ecole polytechnique, 1994.
- [Meyer] P.A. Meyer, *Probability and potentials*, Ginn Blaisdell, Massachussets, 1966.
- [Pardoux & Veretennikov 1] E. Pardoux, A. Yu. Veretennikov, *On Poisson equation and diffusion approximation 1*, Ann. Probab. 29, p. 1061-1085, 2001.
- [Pardoux & Veretennikov 2] E. Pardoux, A. Yu. Veretennikov, *On Poisson equation and diffusion approximation 2*.
- [Pardoux & Veretennikov 3] E. Pardoux, A. Yu. Veretennikov, *On Poisson equation and diffusion approximation 3*.
- [Petersen] K. Petersen, *Ergodic Theory*, Cambridge University Press, 1983.
- [Simader] C.G. Simader, *On Dirichlet's Boundary Value Problem*, Lecture Notes in Mathematics 268, p. 84-200, Springer, 1972.
- [Stroock1] D.W. Stroock, *Diffusion semi-groups corresponding to uniformly elliptic divergence form operators*, dans *Séminaires de Probabilités XXII*, Lecture Notes in Mathematics 1321, p. 316-347, 1988.
- [Stroock2] D.W. Stroock, *Multidimensionnal Diffusion Processes*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaft 233, Springer, Berlin et al., 1979.
- [Veretennikov] A.Yu. Veretennikov, *On polynomial mixing bounds for stochastic differential equations*, Stochastic Processes and their applications, 70, pages 115-127, 1997.