# Processus de Lévy et calcul stochastique

Rhodes Rémi

18 novembre 2010

# Table des matières

# Chapitre 1

# Quelques rappels sur les processus de Poisson

## 1.1 Processus de Poisson

Ces processus sont très utilisés pour modéliser des temps d'arrivée aléatoires de clients, sinistres,...

**Définition 1.** *Un processus de Poisson $N$ de paramètre $\lambda > 0$ est un processus de comptage*

$$\forall t \geq 0, \quad N_t = \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{T_n \leq t\}} \tag{1.1}$$

*associé à une famille $(T_n; n \in \mathbb{N})$ (avec $T_0 = 0$) de va représentant les temps d'arrivées, telle que les va $(T_{n+1} - T_n; n \in \mathbb{N})$ sont iid de loi exponentielle de paramètre $\lambda$.*

**Proposition 1.** *Si $N$ est un processus de Poisson alors*

*1) la somme* (1.1) *est presque sûrement finie pour tout $t \geq 0$.*

*2) les trajectoires de $N$ sont constantes par morceaux, avec des sauts de taille* 1 *seulement,*

*3) les trajectoires sont càdlàg,*

*4) $\forall t > 0$, $\mathbb{P}(N_{t-} = N_t) = 1$,*

*5) $\forall t > 0$, $N_t$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda t$ :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(N_t = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

*En particulier on a :*

$$\mathbb{E}[N_t] = \lambda t = \mathrm{Var}[N_t], \quad \mathbb{E}[e^{iuN_t}] = \exp\big(\lambda t(e^{iu} - 1)\big),$$

*6) $\forall n \geq 1$, $T_n$ une loi gamma de paramètre $(n, \lambda)$ de densité :*

$$f_{T_n}(x) = \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{\{t>0\}}.$$

*7) $N$ est à accroissements indépendants et stationnaires.*

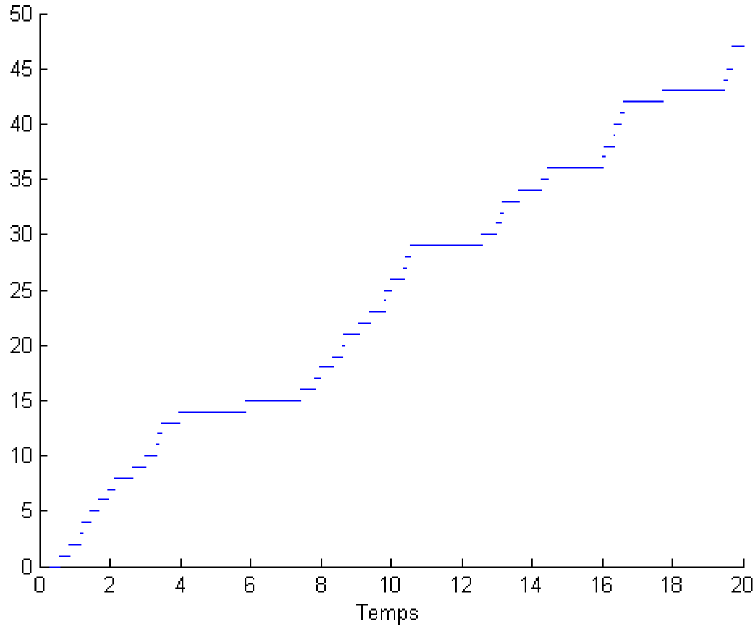


FIGURE 1.1 – Simulation d'un processus de Poisson

Une définition équivalente des processus de Poisson est :

**Définition 2.** *Soit $N$ un processus stochastique (issu de $0$) à valeurs réelles et càdlàg. $N$ est un processus de Poisson ssi :*

*1) $N$ est un processus croissant, constant par morceaux, ne faisant que des sauts de taille 1,*

*2) $\forall t, s \geq 0$, la va $N_{t+s} - N_t$ est indépendant de la tribu engendrée par les $(N_u; 0 \leq u \leq t)$,*

*3) $\forall t, s \geq 0$, la va $N_{t+s} - N_t$ a même loi que $N_s$.*

On retrouve alors les va $T_n$ en les définissant comme les sauts du processus $N$ :

$$T_0 = 0, \quad T_n = \inf\{t > T_{n-1}; N_t - N_{T_{n-1}} > 0\} \text{ pour } n \geq 1.$$

Ce sont des temps d'arrêt par rapport à la filtration naturelle du processus $N$.

**Théorème 1. Comportement asymptotique** *Si $N$ est un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$ alors, lorsque $t$ tend vers $+\infty$ :*

$$p.s. \quad \frac{N_t}{t} \to \lambda \quad et \quad \sqrt{\frac{t}{\lambda}}\Big(\frac{N_t}{t} - \lambda\Big) \xrightarrow{loi} \mathcal{N}(0,1).$$

**Exercice 1.** *Montrer que la somme de 2 processus de Poisson indépendants est encore un processus de Poisson. Quelle est son intensité ?*

**Exercice 2.** *Montrer que, sachant $N_t = k$ ($k \geq 1$), la loi du $k$-uplet $(T_1, \ldots, T_k)$ est celle d'un $k$-échantillon de v.a. iid de loi uniforme sur $[0, t]$.*

**Exercice 3.** *Proposer un algorithme de simulation de processus de Poisson basé sur l'exercice 2.*

**Exercice 4.** *Si $N$ est un processus de Poisson d'intensité $\lambda$, montrer que les lois marginales du processus*

$$P_t = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\Big(\frac{N_t}{t} - \lambda\Big)$$

*convergent vers celle d'un mouvement brownien standard.*

## 1.2 Processus de Poisson composés

**Définition 3.** *Un processus de Poisson avec intensité $\lambda > 0$ et loi de sauts $\nu_Z$ est un processus stochastique défini par*

$$X_t = \sum_{k=1}^{N_t} Z_k,$$

*où $(Z_n)_n$ est une suite de va iid à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ de loi $\nu_Z$ et $N$ est un processus de Poisson de paramètre $\lambda$ indépendant de la suite $(Z_n)_n$.*

En d'autres mots, un processus de Poisson composé est un processus constant par morceaux qui saute aux instants de sauts d'un processus de Poisson standard, et dont les tailles de sauts sont des variables i.i.d. d'une loi donnée.

Citons quelques exemples de phénomènes susceptibles d'être décrits par des processus de Poisson composés :
- arrivées d'avion dans un aéroport : chaque avion transporte un certain nombre de passagers,
- arrivées de clients aux caisses d'un supermarché : chaque client dépense une certaine somme d'argent,
- trafic routier : à chaque accident correspond un certain nombre de personnes blessées,
- Assurance-sinistre : à chaque sinistre est associé un coût de réparation des dégâts.

Un processus de Poisson composé est clairement un processus càdlàg et constant par morceaux. Sa fonction caractéristique est donnée par :

$$\phi_{X_t}(u) = \exp\Big(t\int_{\mathbb{R}^d}(e^{i(u,y)} - 1)\lambda\nu_Z(dy)\Big). \tag{1.2}$$

**Proposition 2.** *Soit $X$ un processus de Poisson composé. Alors $X$ est à accroissements indépendants et stationnaires.*

**Exercice 5.** *Montrer la formule* (1.2).

**Exercice 6.** *Donner une CNS pour qu'un processus de Poisson composé admette un moment d'ordre 1 (resp. 2) et calculer ce moment.*

**Exercice 7.** *Proposer un algorithme de simulation de processus de Poisson composé basé sur l'exercice 2.*

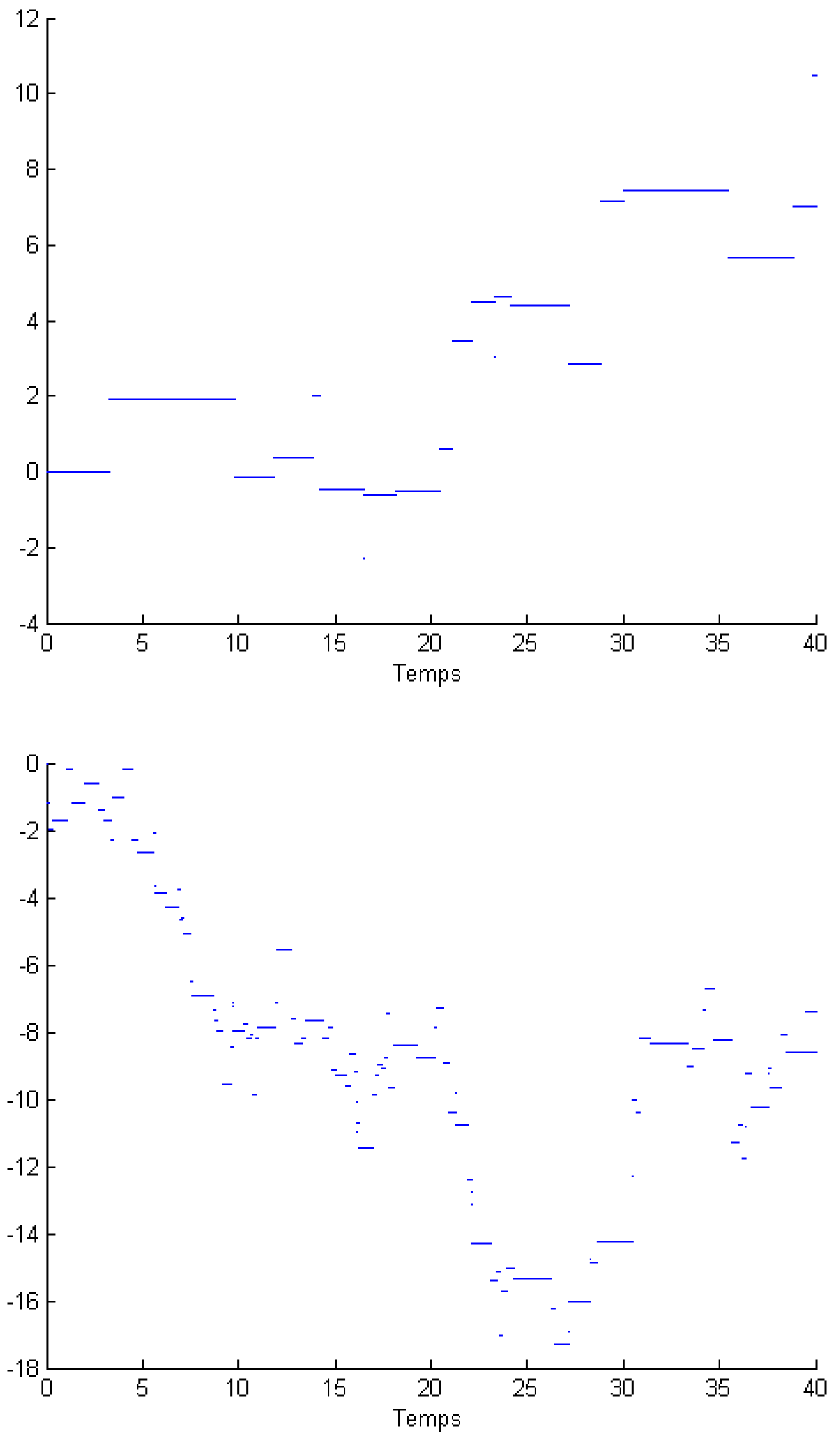


FIGURE 1.2 – Simulation de processus de Poisson composés

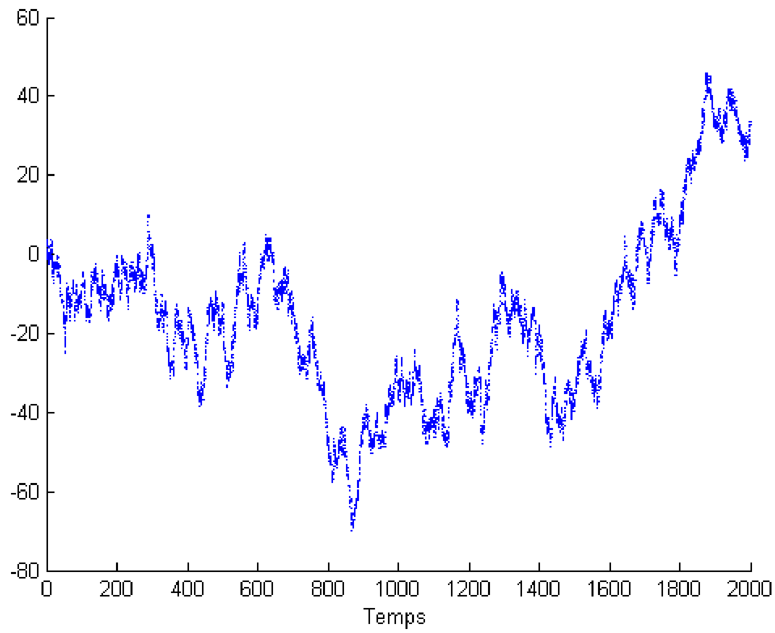


FIGURE 1.3 – Un processus de Poisson composé correctement renormalisé (vu en "temps grand") converge en loi vers un mouvement brownien

# Chapitre 2

# Processus de Lévy

## 2.1 Lois infiniment divisibles

Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ de loi $\mu_X$. On dit que $X$ est infiniment divisible si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des va iid $Y_1^{(n)}, \ldots, Y_n^{(n)}$ telles que

$$X \overset{loi}{=} Y_1^{(n)} + \cdots + Y_n^{(n)}.$$

Soit $\phi_X(u) = \mathbb{E}[e^{i(u,X)}]$ la fonction caractéristique de $X$.

**Proposition 3.** *Se valent :*

1. *$X$ est infiniment divisible,*
2. *pour tout $n$, $\phi_X$ a une racine n-ième qui est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire.*

**Preuve.** 1) implique 2). Il suffit de prendre la fonction caractéristique de $Y_1^{(n)}$.

2) implique 1). Soit $Y_1^{(n)}, \ldots, Y_n^{(n)}$ des copies indépendantes de loi associée à $\phi_Y$ telle que $\phi_X(u) = (\phi_Y(u))^n$. Alors il est facile de voir que

$$X \overset{loi}{=} Y_1^{(n)} + \cdots + Y_n^{(n)}$$

à l'aide des fonctions caractéristiques. $\square$

**Exemple 1. Variables gaussiennes** *Les lois gaussiennes sont infiniment divisibles.*

**Exemple 2. Loi de Poisson** *On prend $d = 1$. On définit une variable $X$ par*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}.$$

*On note $X \sim P(\lambda)$. On a $\mathbb{E}[X] = \mathrm{Var}(X) = \lambda$ et*

$$\phi_X(u) = e^{\lambda(e^{iu}-1)}.$$

*On en déduit que $X$ est infiniment divisible car $\phi_X(u) = (\phi_Y(u))^n$ avec $Y \sim P(\lambda/n)$.*

**Exemple 3. Loi de Poisson composée** *On considère une suite $(Z_n)_n$ de va iid à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ de loi $\mu_Z$. Soit $N$ une loi de Poisson de paramètre $\lambda$ indépendante de la suite $(Z_n)_n$. On définit une variable $X$ par*

$$X = \sum_{k=1}^{N} Z_k.$$

*On a*

$$\phi_X(u) = \exp\Big(\int_{\mathbb{R}^d} (e^{i(u,y)} - 1)\lambda\mu_Z(dy)\Big).$$

*On en déduit que $X$ est infiniment divisible car $\phi_X(u) = (\phi_Y(u))^n$ avec $Y \sim P(\lambda/n)$. On notera $X \sim PC(\lambda, \mu_Z)$ et on remarque que $\phi_X(u) = (\phi_Y(u))^n$ où $Y \sim P(\lambda/n, \mu_Z)$. Donc $X$ est infiniment divisible.*

## 2.2 La formule de Lévy-Khintchine

Soit $\nu$ une mesure de Borel sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. On dira que $\nu$ est une mesure de Lévy si

$$\int_{\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} (1 \wedge z^2)\nu(dz) < +\infty.$$

C'est une mesure $\sigma$-finie. C'est équivalent de dire que

$$\int_{\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} \frac{z^2}{1+z^2}\nu(dz) < +\infty.$$

**Théorème 2. Formule de Lévy-Khintchine** *Soit $X$ une va à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Alors $X$ est infiniment divisible s'il existe $b \in \mathbb{R}^d$, une matrice $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ et une mesure de Lévy $\nu$ tels que*

$$\forall u \in \mathbb{R}^d, \quad \phi_X(u) = \exp\Big(i(b,u) - \frac{1}{2}(u,Au) + \int_{\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} \big(e^{i(u,z)} - 1 - i(u,z)\mathbb{1}_{\{|z|\le 1\}}\big)\nu(dy)\Big). \tag{2.1}$$

*Réciproquement, toute application de la forme ci-dessus est la fonction caractéristique d'une va infiniment divisible sur $\mathbb{R}^d$.*

**Preuve.** On ne démontre que la deuxième partie du théorème. La partie la plus difficile résultera de la décomposition d'Itô-Lévy.

Tout d'abord, on montre que le membre de droite est une fonction caractéristique. Pour simplifier les notations, on suppose $d = 1$. Soit $(\alpha_n)_n$ une suite décroissante vers 0et on définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\phi_n(u) = \exp\Big(i(b - \int_{A_n} z\nu(dz), u) - \frac{1}{2}(u,Au) + \int_{[-\alpha_n,\alpha_n]^c} \big(e^{i(u,z)} - 1\big)\nu(dy)\Big)$$

où l'ensemble $A_n$ est défini par $A_n = [-1,1] \cap [-\alpha_n, \alpha_n]^c$. Dans ce cas, $\phi_n$ est la fonction caractéristique d'une loi $X$ qui est la somme d'une constante, d'une loi normale $N(0,A)$ et d'une loi de Poisson composée $P(\lambda, \mu_Z)$ avec $\lambda = \nu([-\alpha_n, \alpha_n]^c)$ et $\mu_Z = \frac{1}{\lambda}\nu$.

On vérifie ensuite que

$$\phi_n(u) \to \phi_X(u)$$

quand $n \to \infty$ où $\phi_X$ est la fonction donnée par (2.2). Pour appliquer le théorème de continuité de Lévy, il suffit de montrer que $\phi_X$ est continue en $0$. Pour cela, le seul terme nécessitant vérification est l'intégrale que l'on décompose en :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} &\big(e^{i(u,z)} - 1 - i(u,z)\mathbb{1}_{\{|z|\leq 1\}}\big)\nu(dy) \\ &= \int_{|z|\leq 1} \big(e^{i(u,z)} - 1 - i(u,z)\big)\nu(dy) + \int_{|z|>1} \big(e^{i(u,z)} - 1\big)\nu(dy)\end{aligned}$$

En utilisant les majorations $\left|e^{i(u,z)} - 1 - i(u,z)\right| \leq u^2 z^2$ pour $|z| \leq 1$ et $\left|e^{i(u,z)} - 1\right| \leq 2$ pour $|z| > 1$ et les propriétés d'intégrabilité de la mesure de Lévy, on peut facilement appliquer le théorème de convergence dominée et en déduire

$$\int_{\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} \big(e^{i(u,z)} - 1 - i(u,z)\mathbb{1}_{\{|z|\leq 1\}}\big)\nu(dy) \to 0$$

quand $u \to 0$. Donc $\phi_X$ est bien la fonction caractéristique d'une va $X$. On peut directement vérifier qu'elle est infiniment divisible à l'aide des fonctions caractéristiques. □

On remarque que la loi de $X$ a été obtenue comme limite en loi d'une suite de va qui sont la somme d'une gaussienne et d'une loi de Poisson composée indépendantes.

Le "cut-off" $z\mathbb{1}_{\{|z|\leq 1\}}$ peut-être changé. Par exemple on peut choisir $\frac{z}{1+|z|^2}$ pourvu que l'on modifie $b$ en conséquence. Une fois que le choix du cut-off a été fait, le triplet correspondant $(b, A, \nu)$ est appelé la caractéristique de la loi $X$.

Si $X$ est une loi infiniment divisible, on peut donc écrire

$$\phi_X(u) = e^{\eta(u)}$$

où $\eta$ est de la forme

$$\eta(u) = i(b,u) - \frac{1}{2}(u, Au) + \int_{\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} \big(e^{i(u,z)} - 1 - i(u,z)\mathbb{1}_{\{|z|\leq 1\}}\big)\nu(dy).$$

La fonction $\eta$ est appelé le symbole de Lévy de $X$.

**Exercice 8.** *Montrer que le symbole de Lévy de $X$ vérifie*

$$\forall u \in \mathbb{R}^d, \quad |\eta(u)| \leq C(1 + |u|^2)$$

*où $C > 0$.*

**Exemple 4. Lois $\alpha$-stables** *Une classe importante de lois infiniment divisibles est donnée par les lois ayant pour triplet caractéristique $(0, 0, \nu_\alpha)$ où*

$$\nu_\alpha(dz) = \frac{C}{|z|^{d+\alpha}} dz$$

*avec $0 < \alpha < 2$. La loi correspondante est dite $\alpha$-stable.*

## 2.3 Processus de Lévy

Soit $X = (X_t; t \geq 0)$ un processus stochastique défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On dit que $X$ est à accroissements indépendants si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tous $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n < \infty$, les variables aléatoires $\{X_{t_{j+1}} - X_{t_j}; 1 \leq j \leq n-1\}$ sont indépendantes. On dit que $X$ est à accroissements stationnaires si, pour tous $t, s > 0$, la va $X_{t+s} - X_s$ a même loi que $X_t - X_0$.

**Définition 4.** *On dit que $X$ est un processus de Lévy (issu de $0$) si :*

*1) $X_0 = 0$ preque sûrement,*

*2) $X$ est à accroissements indépendants et stationnaires,*

*3) $X$ est stochastiquement continu : pour tout $\epsilon > 0$ et $t \geq 0$ :*

$$\lim_{h \to 0} \mathbb{P}\Big(|X_{t+h} - X_t| > \epsilon\Big) = 0.$$

On peut remarquer que 1) et 2) implique qu'il suffit de vérifier 3) pour $t = 0$.

**Proposition 4.** *Si $X$ est un processus de Lévy, alors $X_t$ est une loi infiniment divisible pour tout $t \geq 0$.*

**Preuve.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire

$$X_t = \sum_{k=1}^{n} (X_{\frac{k}{n}t} - X_{\frac{k-1}{n}t}).$$

Pour conclure, on remarque ensuite que les variables $\{X_{\frac{k}{n}t} - X_{\frac{k-1}{n}t}; 1 \leq k \leq n\}$ sont iid par indépendance et stationnarité des accroissements. □

**Théorème 3.** *Si $X$ est un processus de Lévy, alors*

$$\forall u \in \mathbb{R}^d, \quad \phi_{X_t}(u) = e^{t\eta(u)}$$

*où $\eta$ est le symbole de Lévy de $X_1$.*

**Preuve.** Pour $u \in \mathbb{R}^d$ et $t \geq 0$, on définit $\phi_u(t) = \phi_{X_t}(u)$. Comme $X$ est stochastiquement continu, l'application $t \mapsto \phi_u(t)$ est continue. De plus, comme $X$ est un PAIS, on a pour $t, s \geq 0$ :

$$\phi_u(t+s) = \mathbb{E}[e^{i(u, X_{t+s})}] = \mathbb{E}[e^{i(u, X_{t+s} - X_t)}]\mathbb{E}[e^{i(u, X_t)}] = \mathbb{E}[e^{i(u, X_s - X_0)}]\mathbb{E}[e^{i(u, X_t)}] = \phi_u(t)\phi_u(s).$$

Comme $\phi_u$ est continue, elle est nécessairement de la forme $\phi_u(t) = Ce^{ta}$. Or $\phi_u(0) = 1$, donc $C = 1$, et $\phi_u(1) = \mathbb{E}[e^{i(u, X_1)}] = e^{\eta(u)}$, donc $A = \eta(u)$. Le résultat suit. □

**Théorème 4. Formule de Lévy-Khintchine pour les processus de Lévy** *Soit $X$ un processus de Lévy. Alors il existe $b \in \mathbb{R}^d$, une matrice $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ et une mesure de Lévy $\nu$ tels que $\forall u \in \mathbb{R}^d, \forall t \geq 0$*

$$\mathbb{E}[e^{i(u, X_t)}] = \exp\Big(t\big(i(b, u) - \frac{1}{2}(u, Au) + \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \big(e^{i(u,z)} - 1 - i(u, z)\mathbb{1}_{\{|z| \leq 1\}}\big)\nu(dy)\big)\Big). \quad (2.2)$$

**Exercice 9.** *Montrer que la somme de 2 processus de Lévy indépendants est encore un processus de Lévy.*

**Proposition 5.** *Si $X = (X_t; t \geq 0)$ est un processus stochastique et s'il existe une suite $\big(X^n = (X^n_t; t \geq 0)\big)_n$ de processus de Lévy telle que :*

*1) $X^n_t$ converge en probabilité vers $X_t$ pour tout $t \geq 0$,*

*2) pour tout $\epsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} \limsup_{t\to 0} I\!P\big(|X^n_t - X_t| > \epsilon\big) = 0$,*

*alors $X$ est un processus de Lévy.*

**Preuve.** On a $X_0 = 0$ ps car on peut trouver une sous-suite de $(X^n_0)_n$ qui converge presque sûrement vers $X_0$. Pour $s, t \geq 0$, on a :

$$\mathbb{E}[e^{i(u,X_{t+s}-X_t)}] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[e^{i(u,X^n_{t+s}-X^n_t)}] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[e^{i(u,X^n_s-X^n_0)}] = \mathbb{E}[e^{i(u,X_s-X_0)}].$$

On prouve de la même façon l'indépendance des accroissements.

Il reste à montrer que $X$ est stochastiquement continu. Soit $\epsilon > 0$. On a pour $t \geq 0$

$$\mathbb{P}(|X_t| > \epsilon) \leq \mathbb{P}(|X_t - X^n_t| > \frac{\epsilon}{2}) + \mathbb{P}(|X^n_t| > \frac{\epsilon}{2})$$

d'où

$$\begin{aligned}\limsup_{t\to 0} \mathbb{P}(|X_t| > \epsilon) &\leq \limsup_{t\to 0} \mathbb{P}(|X_t - X^n_t| > \frac{\epsilon}{2}) + \limsup_{t\to 0} \mathbb{P}(|X^n_t| > \frac{\epsilon}{2}) \\ &\leq \limsup_{t\to 0} \mathbb{P}(|X_t - X^n_t| > \frac{\epsilon}{2})\end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de prendre la limite en $n \to \infty$ et d'utiliser le 2. □

**Exemple 5. Mouvement brownien.** *Tout mouvement brownien $B = (B_t; t \geq 0)$ est un processus de Lévy. On a :*

$$\mathbb{E}[e^{i(u,B_t)}] = e^{ti(b,u) - \frac{t}{2}(u,Au)}.$$

**Exemple 6. Processus de Poisson** *Le processus de Poisson $N$ d'intensité $\lambda$ est un processus de Lévy. Pour tout $t \geq 0$, la loi de $N_t$ est donnée par :*

$$I\!P(N_t = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

**Exemple 7. Processus de Poisson composé.** *Soit $(Z_n)_n$ une suite de va iid à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ de loi $\mu_Z$. Soit $N$ un processus de Poisson d'intensité $\lambda$, indépendant de la suite $(Z_n)_n$. Le processus de Poisson composé $Y$ est défini par :*

$$Y_t = \sum_{k=1}^{N_t} Z_k.$$

*Pour tout $t \geq 0$, on a $Y \sim PC(\lambda t, \mu_Z)$. C'est un processus de Lévy. Son symbole de Lévy est donnée par :*

$$\eta(u) = \int_{\mathbb{R}^d/\{0\}} (e^{i(u,z)} - 1)\lambda \mu_Z(dz).$$

*C'est un processus dont les trajectoires sont constantes par morceaux. Les discontinuités sont données par les instants de sauts du processus de Poisson $N$, tandis que la loi des sauts est $\mu_Z$. C'est un processus très utilisé dans les risques d'assurances.*

**Exemple 8. Processus de Lévy stables rotationnellement invariants.** *Ce sont les processus de Lévy ayant pour symbole*

$$\eta(u) = -\sigma^\alpha |u|^\alpha$$

*pour un* $0 < \alpha \leq 2$ *appelé indice de stabilité et* $\sigma > 0$. *Une des raisons de leur importance est qu'ils présentent des propriétés d'auto-similarité : les processus* $(Y_{(ct)}; t \geq 0)$ *et* $(c^{1/\alpha} Y_t; t \geq 0)$ *ont même loi.*

### 2.3.1 Modifications des processus de Lévy

Dans ce qui suit, on dira qu'une filtration $(\mathcal{F}_t)_t$ satisfait les hypothèses usuelles si elle est complète (ie $\mathcal{F}_0$ contient tous les évènements de probabilité nulle) et si elle est continue à droite, ie $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$ où $\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$. Dans la suite, si $X$ est un processus de Lévy alors $\mathcal{F}^X$ désigne la filtration naturelle complète engendrée par le processus $X$.

**Proposition 6.** *Si* $X$ *est un processus de Lévy avec symbole* $\eta$*, alors pour tout* $u \in \mathbb{R}^d$, $M_u = (M_u(t); t \geq 0)$ *est une martingale (complexe) par rapport à* $\mathcal{F}^X$*, où*

$$M_u(t) = \exp\big(i(u, X_t) - t\eta(u)\big).$$

**Théorème 5.** *Tout processus de Lévy admet une modification càdlàg, qui est encore un processus de Lévy avec les mêmes caractéristiques.*

On ne considèrera maintenant que des processus de Lévy càdlàg. Leur filtration naturelle satisfait alors les hypothèses usuelles.

### 2.3.2 Propriété de Markov forte

**Théorème 6. Propriété de Markov forte.** *Si* $X$ *est un processus de Lévy et si* $\tau$ *est un temps d'arrêt adapté à la filtration* $\mathcal{F}^X$*, alors, sur* $\{\tau < +\infty\}$

*1) le processus* $X^\tau = (X_{t+\tau} - X_\tau; t \geq 0)$ *est un processus de Lévy indépendant de la tribu* $\mathcal{F}^X_\tau$*,*

*2) pour tout* $t \geq 0$*,* $X^\tau_t$ *a même loi que* $X_t$*,*

*3)* $X^\tau$ *est à trajectoires càdlàg et est* $\mathcal{F}_{\tau+t}$ *adapté.*

**Preuve.** On fait la preuve dans le cas où $\tau$ est borné. Soit $A \in \mathcal{F}_\tau$ et $n \in \mathbb{N}$. Pour $1 \leq j \leq n$, on considère $u_j \in \mathbb{R}^d$ et $0 = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n$ et les martingales $M_{u_j}(t) = \exp\big(i(u_j, X_t) - t\eta(u_j)\big)$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\mathbb{I}_A \exp\Big(i\sum_{j=1}^n (u_j, X^\tau_{t_j} - X^\tau_{t_{j-1}})\Big)\Big] &= \mathbb{E}\Big[\mathbb{I}_A \exp\Big(i\sum_{j=1}^n (u_j, X_{\tau+t_j} - X_{\tau+t_{j-1}})\Big)\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[\mathbb{I}_A \prod_{j=1}^n \frac{M_{u_j}(\tau + t_j)}{M_{u_j}(\tau + t_{j-1})} \prod_{j=1}^n \phi_{t_j - t_{j-1}}(u_j)\Big]
\end{aligned}$$

où $\phi_u(t) = \mathbb{E}[e^{i(u,X_t)}]$. On remarque que pour $0 < a < b < +\infty$

$$\mathbb{E}\Big[\mathbb{I}_A \frac{M_{u_j}(\tau+b)}{M_{u_j}(\tau+a)}\Big] = \mathbb{E}\Big[\mathbb{I}_A \frac{1}{M_{u_j}(\tau+a)}\mathbb{E}[M_{u_j}(\tau+b)|\mathcal{F}_{\tau+a}]\Big] = \mathbb{P}(A).$$

En répétant cet argument dans la première égalité, on obtient :

$$\mathbb{E}\Big[\mathbb{I}_A \exp\Big(i\sum_{j=1}^{n}(u_j, X^\tau_{t_j} - X^\tau_{t_{j-1}})\Big)\Big] = \mathbb{P}(A)\prod_{j=1}^{n}\phi_{t_j-t_{j-1}}(u_j). \tag{2.3}$$

En particulier, pour $n = 1$ et $u_1 = u$ et $t_1 = t$, on obtient

$$\mathbb{E}[e^{i(u,X^\tau_t}] = \mathbb{E}[e^{i(u,X_t)}]$$

d'où 2.

La formule (2.3) permet facilement de vérifier que $X^\tau$ est un processus de Lévy. Pour la continuité stochastique, ça résulte de $\mathbb{E}[e^{i(u,X^\tau_t}] = \mathbb{E}[e^{i(u,X_t)}]$ en faisant tendre $t$ vers $0$. (2.3) permet aussi de voir que $X^\tau$ est indépendant de $\mathcal{F}_\tau$. □

A l'aide de la propriété de Markov forte, on peut montrer (exercice)

**Théorème 7.** *Si $X$ est un processus de Lévy à valeurs réelles, croissant (presque sûrement) et ne faisant que des sauts de taille 1, alors $X$ est un processus de Poisson.*

**Théorème 8.** *Si $X$ est un processus de Lévy càdlàg à valeurs réelles, presque sûrement à trajectoires constantes par morceaux, alors $X$ est un processus de Poisson composé. La réciproque est trivialement vraie.*

**Preuve.** Soit $N_t = \#\{0 \leq s \leq t; X_{s-} \neq X_s\}$. Comme $X$ est à trajectoires constantes par morceaux, $N$ est fini pour tout $t$ fini. C'est donc un processus de comptage. De plus

$$N_t - N_s = \#\{s < r \leq t; X_{r-} \neq X_r\} = \#\{s < r \leq t; X_{r-} - X_s \neq X_r - X_s\}.$$

On en déduit que $N$ a des accroissements indépendants et stationnaires. C'est donc un processus de Poisson. Soit $(T_n)_n$ la suite de ses temps d'arrivées. On définit $Z_n = X_{T_n} - X_{T_n-}$. Il ne reste plus qu'à montrer que les $(Z_n)_n$ sont iid. Comme $X$ est à trajectoires constantes par morceaux, on a $Z_n = X_{T_n} - X_{T_{n-1}}$. Or si l'on applique la propriété de Markov forte, il est facile de voir que les $(Z_n)_n$ sont iid. Par exemple, on montre qu'ils ont même loi. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la propriété de Markov forte, le processus $(X_{t+T_{n-1}} - X_{tT_{n-1}} : t \geq 0\}$ est un processus de Lévy ayant même loi que le processus $X$, et est indépendant de $\mathcal{F}_{T_{n-1}}$. On en déduit

$$\mathbb{P}(Z_n \in A) = \mathbb{P}(X_{T_n} - X_{T_{n-1}} \in A) = \mathbb{P}(X_{T_1} - X_0 \in A) = \mathbb{P}(Z_1 \in A).$$

L'indépendance se montre de la même façon. □

## 2.4 Subordinateurs

Un subordinateur est un processus de Lévy 1-dimensionnel qui est presque sûrement croissant. Ils sont utilisés, entr'autres, pour modéliser des évolutions aléatoires du temps.

**Théorème 9.** *Si le processus de Lévy $T$ est un subordinateur, alors son symbole de Lévy est de la forme :*

$$\eta(u) = ibu + \int_0^{+\infty} (e^{iuz} - 1)\nu(dz),$$

*où $b \geq 0$ et la mesure de Lévy $\nu$ satisfait :*

$$\nu(]-\infty, 0[) = 0 \text{ et } \quad \int_0^{\infty} (1 \wedge z)\nu(dz) < +\infty.$$

*Réciproquement, toute application de la forme ci-dessus est le symbole de Lévy d'un subordinateur. La paire $(b, \nu)$ est appelée la caractéristique du subordinateur $T$.*

Remarque : pour tout $t \geq 0$, l'application $z \mapsto \mathbb{E}[e^{zT_t}]$ est analytique sur la région $\{z; \Re(z) \leq 0\}$. On obtient donc l'expression suivante pour la transformée de Laplace d'un subordinateur :

$$\mathbb{E}[e^{-uT_t}] = e^{-t\psi(u)}$$

où

$$\psi(u) = -\eta(iu) = bu + \int_0^{\infty} (1 - e^{-uz})\nu(dz).$$

**Exemple 9. Processus de Poisson.** *Le processus de Poisson est clairement un subordinateur. Plus généralement, un processus de Poisson composé est un subordinateur si et seulement si la suite $(Z_n)_n$ est constituée de va à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.*

**Exemple 10. Subordinateurs $\alpha$-stables.** *Pour $0 < \alpha < 1$ et $u \geq 0$, en utilisant la relation*

$$u^{\alpha} = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\infty} (1 - e^{-uz}) \frac{dz}{z^{1+\alpha}},$$

*on voit qu'il existe un subordinateur, appelé $\alpha$-stable avec exposant de Laplace donné par*

$$\psi(u) = u^{\alpha}.$$

*Les caractéristiques de $T$ sont $(0, \nu)$ avec $\nu(dz) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{dz}{z^{1+\alpha}}$.*

**Exemple 11. Subordinateurs inverses gaussiens.** *Pour tout $t \geq 0$, on définit $C_t = \gamma t + B_t$ où $\gamma \in \mathbb{R}$ et $B$ est un mouvement brownien. Le subordinateur inverse gaussien est défini par ($\delta > 0$) :*

$$T_t = \{s > 0; C_s = \delta t\}.$$

*On l'appelle ainsi car $t \mapsto T_t$ est l'inverse généralisé d'un processus gaussien. On peut montrer que*

$$\mathbb{E}[e^{-uT_t}] = \exp\Big( - t\delta\big(\sqrt{2u + \gamma^2} - \gamma\big)\Big).$$

*En inversant, cette formule on peut montrer que $T_t$ a une densité donnée par :*

$$f_{T_t}(s) = \frac{\delta t}{\sqrt{2\pi}} e^{\delta t \gamma} s{-}3/2 \exp\big( - \frac{1}{2}(t^2\delta^2 s^{-1} + \gamma^2 s)\big)$$

*pour tous $s, t \geq 0$.*

**Exemple 12. Gamma subordinateur.** *Soit $T$ un subordinateur ayant pour transformée de Laplace ($a,b>0$)*
$$\mathbb{E}[e^{-uT_t}] = \big(1+\frac{u}{b}\big)^{-at} = \exp\big(-ta\ln(1+\frac{u}{b})\big).$$
*Il admet pour densité*
$$f_{T_t}(x) = \frac{b^{at}}{\Gamma(at)} x^{at-1}e^{-bx}\mathbb{I}_{x\geq 0}$$
*et est appelé gamma subordinateur. Pour voir que c'est un subordinateur, il suffit d'établir*
$$\psi(u) = a\ln(1+\frac{u}{b}) = \int_0^\infty (1-e^{-uz})az^{-1}e^{-bz}dz.$$

Soit $X$ un processus de Lévy et $T$ un subordinateur définis sur le même espace de probabilité. On suppose que $X$ et $Z$ sont indépendants. On définit un nouveau processus $Z$ par la formule $Z_t = X_{T_t}$ pour $t \geq 0$.

**Théorème 10.** *$Z$ est un processus de Lévy ayant pour symbole*
$$\eta_Z = -\psi_T \circ (-\eta_X).$$

**Preuve.** Il est clair que $Z_0 = 0$ presque sûrement. Commençons par montrer que $Z$ est à accroissements stationaires. Soit $t_1 < t_2$ et écrivons $P_{t_1,t_2}$ pour désigner la loi jointe de $(T_{t_1}, T_{t_2})$ :
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z_{t_2} - Z_{t_1} \in A) =& \mathbb{P}(X_{T_{t_2}} - X_{T_{t_1}} \in A)\\
=& \int_0 \infty \int_0^\infty \mathbb{P}(X_{s_2} - X_{s_2} \in A)\, P_{t_1,t_2}(ds_1, ds_2)\\
=& \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbb{P}(X_{s_2-s_1} \in A)\, P_{t_1,t_2}(ds_1, ds_2)\\
=& \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbb{P}(X_u \in A)\, P_{0,t_2-t_1}(u)\\
=& \mathbb{P}(Z_{t_2-t_1} \in A).
\end{aligned}$$
L'indépendance des accroissements s'obtient par un raisonnement similaire, c'est à dire en conditionnant par rapport à la loi de $T$.

Pour montrer la continuité stochastique, on fixe $a > 0$ et $\epsilon > 0$. On peut trouver $\delta > 0$ tel que
$$0 < h < \delta \Rightarrow \mathbb{P}(|X_h| > a) \leq \epsilon/2$$
et $\delta' > 0$ tel que
$$0 < h < \delta' \Rightarrow \mathbb{P}(|T_h| > \delta) \leq \epsilon/2.$$
On a donc pour $0 < h < \delta'$ :
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|Z(h)| > a) =& \mathbb{P}(|X_{T_h}| > a) = \int_0^\infty \mathbb{P}(|X_u| > a)P_{T_h}(du)\\
=& \int_0^\delta \mathbb{P}(|X_u| > a)P_{T_h}(du) + \int_\delta^\infty \mathbb{P}(|X_u| > a)P_{T_h}(du)\\
\leq& \sup_{0\leq u\leq\delta} \mathbb{P}(|X_u| > a) + \mathbb{P}(|T_h| > \delta)\\
\leq& \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[e^{i(u,Z_t)}] =& \mathbb{E}[e^{i(u,X_{T_t})}] = \int_0^\infty \mathbb{E}[e^{i(u,X_s)}] P_{T_t}(ds) \\
=& \int_0^\infty e^{s\eta_X(u)} P_{T_t}(ds) = \mathbb{E}[e^{-T_t(-\eta_X(u))}] \\
=& e^{-t\psi_T(-\eta_X(u))}.
\end{aligned}$$

$\square$

# Chapitre 3

# Décomposition d'Itô-Lévy

## 3.1 Sauts des processus de Lévy

Si $X$ est un processus de Lévy, on définit le processus de sauts associé

$$\triangle X = (\triangle X_t; t \geq 0) \quad \text{avec } \triangle X_t = X_t - X_{t-}.$$

C'est clairement un processus adapté mais ce n'est pas, en général, un processus de Lévy.

**Proposition 7.** *Si $X$ est un processus de Lévy alors, pour chaque $t \geq 0$ on a $\triangle X_t = 0$ presque sûrement.*

**Preuve.** Soit $(t_n)_n$ une suite croissante de nombres réels positifs tels que $t_n \to t$ lorsque $n \to \infty$. Comme $X$ est càdlàg, on a $\lim_n X_{t_n} = X_{t-}$ presque sûrement. Comme $X$ est stochastiquement continu, on a $\lim_n X_{t_n} = X_t$ en probabilité, donc $X_t = X_{t-}$ presque sûrement. □

Remarque : par contre et en général, presque sûrement le processus $\triangle X$ n'est pas nul. De plus, le résultat précédent n'est en aucun cas valide si l'on remplace $t$ par un temps d'arrêt.

La difficulté quand on manipule des processus de Lévy est qu'il est tout à fait possible d'avoir simultanément

$$\sum_{0 \leq s \leq t} |\triangle X_s| = \infty \quad \text{presque sûrement}$$

et

$$\sum_{0 \leq s \leq t} |\triangle X_s|^2 < \infty \quad \text{presque sûrement.}$$

**Exercice 10.** *Montrer que l'on a $\sum_{0 \leq s \leq t} |\triangle X_s| < \infty$ si $X$ est un processus de Poisson composé.*

Une façon d'aborder les sauts d'un processus de Lévy est de compter les sauts d'une taille prescrite.

**Définition 5.** *Soit $t \geq 0$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d/\{0\})$. On définit la quantité aléatoire*

$$N(t, A) = \#\{0 \leq s \leq t; \triangle X_s \in A\} = \sum_{0 \leq s \leq t} \mathbb{1}_A(\triangle X_s).$$

*Pour tout $\omega$, la fonction d'ensembles $A \mapsto N(t,A)(\omega)$ est une mesure de comptage sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d/\{0\})$. Ainsi*

$$A \mapsto \mathbb{E}[N(t,A)]$$

*est une mesure borélienne sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d/\{0\})$. On notera $\mu(\cdot) = \mathbb{E}[N(1,\cdot)]$ appelé mesure d'intensité du processus $X$.*

On dira également que l'ensemble $A$ est borné inférieurement si $0 \notin \bar{A}$.

**Lemme 1.** *Si $A$ est borné inférieurement et borélien, alors $N(t,A) < \infty$ presque sûrement.*

**Preuve.** On définit une suite de temps d'arrêt $(\tau_n^A)_n$ par $\tau_0^A = 0$ et

$$\tau_n^A = \inf\{t > \tau_{n-1}^A; \triangle X_t \in A\}.$$

Comme $X$ est càdlàg, on a $\tau_1^A > 0$ presque sûrement et $\lim_{n\to\infty} \tau_n^A = \infty$ presque sûrement. En effet, dans le cas contraire, la suite $(\tau_n^A)_n$ aurait un point d'accumulation. Ceci est incompatible avec le fait que $X$ soit càdlàg (exo). Ainsi pour tout $t \geq 0$

$$N(t,A) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{\tau_n^A \leq t} < \infty. \quad \square$$

**Théorème 11.** *Si $A$ est borné inférieurement, alors le processus $(N(t,A); t \geq 0)$ est un processus de Poisson d'intensité $\mu(A)$. De plus si $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d/\{0\})$ sont disjoints alors les variables aléatoires $N(t,A_1), \dots, N(t,A_m)$ sont indépendantes.*

**Preuve.** $t \mapsto N(t,A)$ est clairement un processus croissant ne faisant que des sauts de taille $1$. Si l'on montre que c'est un processus de Lévy, alors le théorème 7 permettra de conclure que c'est un processus de Poisson. La stationnarité et l'indépendance des acroissements résulte du fait que, pour tout $n$, l'ensemble $\{N(t,A) - N(s,A) = n\}$ appartient à la tribu engendrée par $\sigma(X_r - X_u; s \leq u < r \leq t)$.

Montrons que $N(t,A)$ est stochastiquement continu. Pour tout $t \geq 0$, on a

$$\mathbb{P}(N(t,A) \geq 1) = \mathbb{P}(\tau^A \leq t)$$

où $\tau^A$ est le premier instant de saut de taille $\in A$ du processus $X$. Comme $X$ est càdlàg, on a $\tau^A > 0$ presque sûrement donc $\lim_{t\to 0} \mathbb{P}(\tau^A \leq t) = 0$. D'où

$$\lim_{t\to 0} \mathbb{P}(N(t,A) = 0) = 1.$$

On va montrer que si $A$ et $B$ sont disjoints et bornés inférieurement, alors les processus $(N(t,A))_{t\geq 0}$ et $(N(t,B))_{t\geq 0}$ sont indépendants. La démonstration se généralise à un nombre fini quelconque d'ensembles disjoints. Soit $u, v \in \mathbb{R}$.

Si $u = v$, alors $t \mapsto N(t, A \cup B)$ est un processus de Poisson d'intensité

$$\mu(A \cup B) = \mathbb{E}[N(t, A \cup B)] = \mathbb{E}[N(t,A)] + \mathbb{E}[N(t,B)] = \mu(A) + \mu(B).$$

D'où

$$\mathbb{E}[e^{iuN(t,A)+ivN(t,B)}] = \mathbb{E}[e^{iuN(t,A\cup B)}] = e^{t\mu(A\cup B)(e^{iu}-1)} = \mathbb{E}[e^{iuN(t,A)}]\mathbb{E}[e^{ivN(t,B)}].$$

Si $u \neq v$. On pose $X_t = uN(t,A) + vN(t,B)$. Comme précédemment, on montre que c'est un processus de Lévy. De plus il est à trajectoires constantes par morceaux. D'après le théorème8, c'est un processus de Poisson composé :

$$X_t = \sum_{k=1}^{N'_t} Z_k.$$

Les temps de sauts de $X$ sont ceux du processus $N(t, A \cup B)$. $N'$ est donc un processus de Poisson d'intensité $\mu(A) + \mu(B)$. La loi $Z$ des sauts ne peut prendre que 2 valeurs $u$ ou $v$. De plus

$$N(t,A) = \sum_{k=1}^{N'_t} \mathbb{1}_{\{Z_k = u\}}.$$

En prenant l'espérance, on en déduit $t\mu(A) = (\mu(A) + \mu(B))\mathbb{P}(Z_k = u)$. De même $t\mu(B) = (\mu(A) + \mu(B))\mathbb{P}(Z_k = v)$.

$$\mathbb{E}[e^{iuN(t,A)+ivN(t,B)}] = \exp\big(t(\mu(A) + \mu(B)) \int (e^{i(u,z)} - 1)\mu_Z(dz)\big) = \mathbb{E}[e^{iuN(t,A)}]\mathbb{E}[e^{ivN(t,B)}].$$

On en déduit facilement l'indépendance annoncée à l'aide des fonctions caractéristiques. Le même argument s'applique aux cas de plusieurs ensembles disjoints. En fait, les arguments de la preuve permettent également de montrer que les processus de Poisson $N(\cdot, A)$ et $N(\cdot, B)$ sont indépendants. □

## 3.2 Mesures aléatoires de Poisson

Soit $(S, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

**Définition 6.** *Soit $\mu$ une mesure $\sigma$ finie sur $(S, \mathcal{A})$. Une mesure aléatoire de Poisson $N$ sur $(S, \mathcal{A})$ est est une collection de variables aléatoires $(M(B); B \in \mathcal{A})$ telle que :*

*1) pour tout $B \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(B) < +\infty$, $N(B)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\mu(B)$,*

*2) si $A_1, \ldots, A_m$ sont des ensembles disjoints de $\mathcal{A}$, les variables aléatoires $N(A_1), \ldots, N(A_m)$ sont indépendantes,*

*3) pour tout $\omega \in \Omega$, l'application $A \mapsto N(A, \omega)$ est une mesure de comptage sur $(S, \mathcal{A})$.*

Nous avons vu que si $X$ est un processus de Lévy alors la quantité

$$N([0,t] \times A) = \#\{0 \leq s \leq t; \triangle X_s \in A\}$$

est une mesure aléatoire de Poisson sur $\mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R}^d / \{0\})$ d'intensité $dt \otimes d\mu$ avec $\mu(\cdot) = \mathbb{E}[N([0,1], A)]$. Pour $t \geq 0$ et $A$ borné inférieurement, on définit la mesure aléatoire de Poisson compensée $\widetilde{N}$ par :

$$\widetilde{N}(t,A) = N(t,A) - t\mu(A).$$

Remarque : Il est clair que $N(t,A)$ est un raccourci de notation pour écrire $N([0,t] \times A)$.

## 3.3 Intégration de Poisson

Soit $N$ une mesure aléatoire de Poisson d'intensité $dt \otimes \mu$ sur $\mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R}^d/\{0\})$. Si $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ est une fonction Borel-mesurable et si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d/\{0\})$ vérifie $\mu(A) < +\infty$, on définit pour tout $t \geq 0$ et $\omega \in \Omega$ l'intégrale de Poisson de $f$ par

$$\int_A f(z)\, N(t, dz) = \sum_{z \in A} f(z) N(t, \{z\}).$$

On remarque que la définition ci-dessus ne pose pas de problème car la somme est une somme aléatoire finie.

Si $N$ est associée à un processus de Lévy, cette intégrale coïncide avec

$$\int_A f(z)\, N(t, dz) = \sum_{0 \leq s \leq t} f(\triangle X_s) \mathbb{I}_A(\triangle X_s)$$

car $N(t, \{z\}) = \#\{0 \leq s \leq t; \triangle X_s = \{z\}\}$. De plus, le processus $t \mapsto \int_A f(z)\, N(t, dz)$ est un processus stochastique adapté et càdlàg. On remarque aussi que si $\mu$ est une mesure de Lévy alors

$$0 \notin \bar{A} \Rightarrow \mu(A) < +\infty$$

de sorte que $\int_A f(z)\, N(t, dz)$ est bien défini dès lors que $A$ est borné inférieurement.

On supposera désormais que $N$ est associée à un processus de Lévy.

**Théorème 12.** *Soit $A$ un ensemble borélien borné inférieurement. Alors :*

*1) pour tout $t \geq 0$, $\int_A f(z)\, N(t, dz)$ suit une loi de Poisson composée caractérisée par :*

$$\mathbb{E}\Big[\exp\Big(i(u, \int_A f(z)\, N(t, dz))\Big)\Big] = \exp\Big(t \int_A (e^{i(u, f(z))} - 1)\mu(dz)\Big).$$

*2) si $f \in L^1(A, \mu)$ on a :*

$$\mathbb{E}\Big[\int_A f(z)\, N(t, dz)\Big] = t \int_A f(z)\mu(dz).$$

*3) si $f \in L^2(A, \mu)$ on a :*

$$\mathrm{Var}\Big(\Big|\int_A f(z)\, N(t, dz)\Big|\Big) = t \int_A |f(z)|^2 \mu(dz).$$

**Preuve.** Si $f$ est une fonction étagée de la forme $f(z) = \sum_{j=1}^n c_j \mathbb{I}_{A_j}$ avec $c_j \in \mathbb{R}^n$ pour tout $j$ et les $A_j$ boréliens et disjoints. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\exp\Big(i(u, \int_A f(z)\, N(t, dz))\Big)\Big] &= \mathbb{E}\Big[\exp\Big(i(u, \sum_j c_j N(t, A_j))\Big)\Big] \\
&= \prod_j \mathbb{E}\Big[\exp\Big(i(u, c_j) N(t, A_j)\Big)\Big] \\
&= \prod_j \exp\Big(t\big(\exp^{i(u, c_j)} - 1\big)\mu(A_j)\Big) \\
&= \exp\Big(t \int_A \big(\exp^{i(u, f(z))} - 1\big)\mu(dz)\Big).
\end{aligned}$$

Le résultat général suit par approximation par des fonctions étagées. 2) et 3) résulte de 1) par différentiation. □

**Corollaire 1.** *Soit $A$ un ensemble borélien borné inférieurement. Le processus $t \mapsto \int_A f(z)\, N(t, dz)$ est un processus de Poisson composé.*

**Preuve.** en exercice. Il faut calculer

$$\mathbb{E}\Big[\exp\Big(i(u, \int_A f(z)\, N(t, dz))\Big)|\mathcal{F}_s\Big]$$

en utilisant le théorème précédent pour en déduire que c'est un processus à accroissements indépendants et stationnaires. La continuité stochastique se déduit de celle de $N$. □

Pour tout $f \in L^1(A, \mu)$ on définit l'intégrale de Poisson compensée

$$\int_A f(z)\widetilde{N}(t, dz) = \int_A f(z)N(t, dz) - t\int_A f(z)\mu(dz).$$

Le processus $t \mapsto \int_A f(z)\widetilde{N}(t, dz)$ est une martingale càdlàg. Daprès le théorème 12, on a :

$$\mathbb{E}\Big[\exp\Big(i(u, \int_A f(z)\, \widetilde{N}(t, dz))\Big)\Big] = \exp\Big(t\int_A \big(e^{i(u,f(z))} - 1 - i(u, f(z))\big)\mu(dz)\Big).$$

De plus, si $f \in L^2(A, \mu)$ on a :

$$\mathbb{E}\Big(\big|\int_A f(z)\, \widetilde{N}(t, dz)\big|^2\Big) = t\int_A |f(z)|^2\mu(dz).$$

**Proposition 8.** *Si $A, B$ sont bornés inférieurement et si $f \in L^2(A, \mu)$, $g \in L^2(B, \mu)$, on a :*

$$\langle\int_A f(z)\, \widetilde{N}(t, dz), \int_B g(z)\, \widetilde{N}(t, dz)\rangle = t\int_{A\cap B} f(z)g(z)\mu(dz).$$

## 3.4 Décomposition d'Itô-Lévy

**Théorème 13. Décomposition d'Itô-Lévy.** *Si $X$ est un processus de Lévy alors il existe $b \in \mathbb{R}^d$, un mouvement brownien $B$, une matrice de covariance $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ et une mesure aléatoire de Poisson indépendante $N$ on $\mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R}^d/\{0\})$, dont l'intensité est une mesure de Lévy $\nu$, tels que, pour tous $t \geq 0$ :*

$$X_t = bt + A^{1/2}B_t + \int_{|z|<1} z\, \widetilde{N}(t, dz) + \int_{|z|\geq 1} zN(t, dz). \tag{3.1}$$

**Preuve.** admis. □

Le processus $t \mapsto \int_{|z|<1} z\, \widetilde{N}(t, dz)$ est la somme compensée des petits sauts. C'est une martingale càdlàg de carré intégrable. Le processus $t \mapsto \int_{|z|\geq 1} zN(t, dz)$ représente les grands sauts du processus de Lévy. C'est un processus de Poisson composé.

En fait, la preuve de la décomposition d'Itô-Lévy permet eussi de montrer

**Proposition 9.** *Si le "cutoff" est fixé, le triplet caractéristique* $(b, A, \nu)$ *d'un processus de Lévy est unique.*

**Exercice 11.** *En déduire qu'un processus de Lévy* $X$ *satisfait*

$$\sum_{0 \leq s \leq t} |\Delta_s|^2 < +\infty$$

*presque sûrement.*

# Chapitre 4

# Intégration stochastique

## 4.1 Classe d'intégrands

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_t$ satisfaisant les hypothèses usuelles.

**Définition 7.** *Soit $(S, \mathcal{A})$ un espace mesuré et $\mu$ une mesure $\sigma$ finie sur $(\mathbb{R}_+ \times S, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{A})$. Une $\mathcal{F}_t$-mesure aléatoire de Poisson $N$ sur $(\mathbb{R}_+ \times S, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{A})$ est une collection de variables aléatoires $(M(B); B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{A})$ telle que :*

*1) pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{A}$ tel que $\mu(B) < +\infty$, $N(B)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\mu(B)$,*

*2) si $A_1, \ldots, A_m$ sont des ensembles disjoints de $\mathcal{A}$, les variables aléatoires $N(A_1), \ldots, N(A_m)$ sont indépendantes,*

*3) pour tout $\omega \in \Omega$, l'application $A \mapsto N(A, \omega)$ est une mesure sur $(S, \mathcal{A})$.*

*4) Pour tout $0 \leq s < t$ et $A \in \mathcal{A}$, la variable $N((s,t], A)$ est indépendante de la tribu $\mathcal{F}_s$.*

En particulier, toute mesure de Poisson sur $(\mathbb{R}_+ \times S, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{A})$ est adaptée par rapport à sa filtration naurelle complétée.

Dans la suite, nous considérons $N$ une $\mathcal{F}_t$-mesure aléatoire de Poisson sur $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^d/\{0\})$ d'intensité $dt \otimes d\nu$, où $\nu$ est une mesure de Lévy. Soit $\widetilde{N}$ sa mesure aléatoire de Poisson compensée.

Soit $E$ un borélien de $\mathbb{R}^d$ et $0 < T < +\infty$. Soit $\mathcal{P}$ la plus petite tribu engendrée par toutes les applications $F : [0, T] \times E \times \Omega \to \mathbb{R}$ satisfaisant les conditions suivantes :

1) pour tout $0 \leq t \leq T$, l'application $(z, \omega) \mapsto F(t, z, \omega)$ est $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d/\{0\}) \otimes \mathcal{F}_t$-mesurable,

2) pour tout $z \in \mathbb{R}^s/\{0\}$ et $\omega \in \Omega$, l'application $t \mapsto F(t, z, \omega)$ est continue à gauche.

$\mathcal{P}$ est appelée la tribu prévisible et tout processus $\mathcal{P}$ mesurable est dit prévisible. On peut étendre la notion ci-dessus à $\mathbb{R}_+$ au lieu de $[0, T]$. On définit $H^2(T, \nu)$ comme l'espace vectoriel de toutes les classes d'équivalence d'applications $F : [0, T] \times E \times \Omega \to \mathbb{R}$ qui coïncident $dt \otimes d\mu \otimes d\mathbb{P}$ presque sûrement, et qui satisfont :

1) $F$ est prévisible,

2) $\int_0^T \int_{\mathbb{R}^s/\{0\}} \mathbb{E}[|F(t,z)|^2]\, dt\, d\nu(z) < +\infty$

L'espace $H^2(T,\nu)$ et naturellement muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{T,\nu}$

$$\langle F, G \rangle_{T,\nu} = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^s/\{0\}} \mathbb{E}[F(t,z)G(t,z)]\, dt\, d\nu(z).$$

On notera $\| \cdot \|_{T,\nu}$ la norme associée.

**Lemme 2.** *L'espace $H^2(T,\nu)$ est un espace de Hilbert.*

**Preuve.** Il suffit de voir que c'est un sous-espace fermé de $L^2([0,T] \times E \times \Omega, dt \otimes d\nu \otimes d\mathbb{P})$. Ceci résulte simplement du fait que toute limite en mesure de processus prévisibles est prévisible. □

On définit $S(T,\nu)$ comme le sous-ensemble de $H^2(T,\nu)$ formé de tous les processus simples. Un processus $F$ est dit simple s'il existe $n, m \in \mathbb{N}$, des temps $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_{m+1} = T$, des boréliens disjoints $A_1, \ldots, A_n$ de $\mathbb{R}^s/\{0\}$ tels que $\nu(A_i) < +\infty$ pour tout $i = 1, \ldots, n$, et des va $F_i(t_j)$ $\mathcal{F}_{t_j}$-mesurable ($1 \leq j \leq m$ et $1 \leq i \leq n$) tels que

$$F = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} F_i(t_j) \mathbb{1}_{(t_j, t_{j+1}]} \mathbb{1}_{A_i}.$$

Tout processus simple est continu à gauche et prévisible.

**Lemme 3.** *$S(T,\nu)$ est dense dans $H^2(T,\nu)$.*

**Preuve.** en exercice. Il faut adapter les arguments utilisés pour le mouvement brownien. □

## 4.2 Théorie $L^2$

Soit $F$ un processus simple de la forme

$$F = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} F_i(t_j) \mathbb{1}_{(t_j, t_{j+1}]} \mathbb{1}_{A_i}.$$

On définit alors

$$I_T(F) = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d/\{0\}} F(r,z)\, d\widetilde{N}(dr, dz) = \sum_{i,j=1}^{n,m} F_i(t_j) \widetilde{N}((t_j, t_{j+1}, A_j)$$

Il est direct de vérifier que l'intégrale définie ci-dessus est linéaire sur $S(T,\nu)$. De plus

**Proposition 10.** *Pour tout $T > 0$ et $F \in S(T,\nu)$, on a*

$$\mathbb{E}\Big[ \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d/\{0\}} F(r,z)\, d\widetilde{N}(dr, dz) \Big] = 0$$

*et*

$$\mathbb{E}\Big[ \Big( \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d/\{0\}} F(r,z)\, d\widetilde{N}(dr, dz) \Big)^2 \Big] = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d/\{0\}} \mathbb{E}\big[ |F(t,z)|^2 \big] dt\, d\nu(z).$$

**Preuve.** Soit $F$ un processus simple de la forme

$$F = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} F_i(t_j) \mathbb{1}_{(t_j, t_{j+1}]} \mathbb{1}_{A_i}$$

Comme $t \mapsto \widetilde{N}(t, A_i)$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale centrée et que $F_i(t_j)$ est $\mathcal{F}_{t_j}$-mesurable, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[F_i(t_j)\widetilde{N}((t_j, t_{j+1}, A_i)] &= \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[F_i(t_j)\widetilde{N}((t_j, t_{j+1}, A_i)|\mathcal{F}_{t_j}]\big] \\
&= \mathbb{E}\big[F_i(t_j)\mathbb{E}[\widetilde{N}((t_j, t_{j+1}, A_i)|\mathcal{F}_{t_j}]\big] \\
&= \mathbb{E}\big[F_i(t_j)\mathbb{E}[\widetilde{N}((t_j, t_{j+1}, A_i)]\big] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Par linéarité on en déduit que $\mathbb{E}\Big[\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d/\{0\}} F(r,z)\, d\widetilde{N}(dr, dz)\Big] = 0$.

De même, on a pour $j < j'$ et $i, i'$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[F_i(t_j)\widetilde{N}((t_j, t_{j+1}, A_i)F_{i'}(t_{j'})\widetilde{N}((t_{j'}, t_{j'+1}, A_{i'})] \\
&\quad = \mathbb{E}\big[F_i(t_j)\widetilde{N}((t_j, t_{j+1}, A_i)F_{i'}(t_{j'})\mathbb{E}[\widetilde{N}((t_{j'}, t_{j'+1}, A_{i'})|\mathcal{F}_{t_{j'}}]\big] \\
&\quad = 0
\end{aligned}$$

et pour $j = j'$ :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[F_i(t_j)\widetilde{N}((t_j, t_{j+1}, A_i)F_{i'}(t_j)\widetilde{N}((t_j, t_{j+1}, A_{i'})] \\
&\quad = \mathbb{E}\big[F_i(t_j)F_{i'}(t_j)\mathbb{E}[\widetilde{N}((t_j, t_{j+1}, A_i)\widetilde{N}((t_j, t_{j+1}, A_{i'})|\mathcal{F}_{t_{j'}}]\big] \\
&\quad = \mathbb{E}\big[F_i(t_j)F_{i'}(t_j)\mathbb{E}[\widetilde{N}((t_j, t_{j+1}, A_i)\widetilde{N}((t_j, t_{j+1}, A_{i'})]\big] \\
&\quad = \mathbb{E}\big[F_i(t_j)^2\big](t_{j+1} - t_j)\nu(A_i)\delta_{i,i'},
\end{aligned}$$

où $\delta_{i,i'}$ désigne le symbole de Kroenecker.

En sommant sur les valeurs de $i, i'$ et $j, j'$ et en utlisant les deux égalités ci-dessus on obtient :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d/\{0\}} F(r,z)\, d\widetilde{N}(dr, dz)\Big)^2\Big] \\
&\quad = \sum_{i,i'=1}^{n} \sum_{j,j'=1}^{m} \mathbb{E}[F_i(t_j)\widetilde{N}((t_j, t_{j+1}, A_i)F_{i'}(t_{j'})\widetilde{N}((t_{j'}, t_{j'+1}, A_{i'})] \\
&\quad = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mathbb{E}\big[F_i(t_j)^2\big](t_{j+1} - t_j)\nu(A_i) \\
&\quad = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d/\{0\}} \mathbb{E}\big[|F(t,z)|^2\big]\, dt\, d\nu(z).
\end{aligned}$$

□

On en déduit que l'application $I_T : S(T, \nu) \to H^2(T, \nu)$ est une isométrie linéaire, qui se prolonge donc à $H^2(T, \nu)$ tout entier. Ce prolongement sera encore noté $I_T$. Par densité de $S(T, \nu)$ dans $H^2(T, \nu)$, il vérifie :

**Théorème 14.** *L'intégrale stochastique $I_T$ satisfait les propriétés suivantes :*

*1) $\forall F, G \in H^2(T,\nu)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $I_T(\alpha F + \beta G) = \alpha I_T(F) + \beta I_T(G)$,*

*2) $\forall F \in H^2(T,\nu)$, $\mathbb{E}[I_T(F)] = 0$ et $\mathbb{E}\big[(I_T(F))^2\big] = \|F\|_{T,\nu}$,*

*3) $\forall F, G \in H^2(T,\nu)$, $\mathbb{E}[I_T(F) I_T(G)] = \langle F, G\rangle_{T,\nu}$*

*4) $\forall F \in H^2(T,\nu)$, le processus $(I_t(F); 0 \leq t \leq T)$ est une càdlàg $\mathcal{F}_t$-martingale de carré intégrable.*

**Lemme 4.** *Si $F \in H^2(T,\nu)$ et si $(A_n)_n$ est une suite croissante de sous-ensembles boréliens de $\mathbb{R}^d/\{0\}$ telle que $\bigcup_n A_n = E \subset \mathbb{R}^d/\{0\}$ alors*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big[\sup_{0\leq t\leq T} \Big| \int_0^t \int_{A_n} F(r,z)\, \widetilde{N}(dr,dz) - \int_0^t \int_E F(r,z)\, \widetilde{N}(dr,dz) \Big|^2\Big] = 0.$$

**Preuve.** C'est une conséquence directe de l'inégalité de Doob pour les martingales et du théorème de convergence dominée. □

## 4.3 Extension de la théorie

Comme dans le cas du mouvement brownien, on peut étendre cette intégrale aux classes d'équivalence de fonctions $F : [0,T] \times (R^d/\{0\}) \times \Omega \to \mathbb{R}$ qui sont égales $dt \otimes d\nu \otimes d\mathbb{P}$ presque sûrement qui vérifient :

1) $F$ est prévisible,

2) $\mathbb{P}\Big( \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d/\{0\}} |F(t,z)|^2 dt\, \nu(dz) < +\infty \Big) = 1.$

Comme cette extension repose sur les mêmes arguments que dans le cas du mouvement brownien, nous ne détaillons pas plus ce point.

## 4.4 Formules d'Itô

Commençons par un exemple simple. On considère une intégrale stochastique de Poisson de la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t \int_A K(r,z)\, N(dr,dz), \tag{4.1}$$

où $A$ est borné inférieurement et $K$ est un processus prévisible à valeurs réelles.

**Proposition 11.** *Si $X$ est une intégrale stochastique de Poisson du type* (4.1) *alors, pour toute fonction $f \in C(\mathbb{R})$ et tout $t \geq 0$, on a presque sûrement :*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t \int_A \big[ f(X_{r-} + K(r,z)) - f(X_{r-}) \big]\, N(dr,dz).$$

**Preuve.** On définit le processus de Poisson composé $L_t = \int_A zN(t,dz)$. Remarquons tout d'abord que $N(t, A \cap B)$ est la mesure de saut associée au processus $L$ car

$$\triangle L_t = \sum_{z\in A} zN(\{t\}\times\{z\}) = \sum_z z\mathbb{I}_A(z)N(\{t\}\times\{z\}),$$

donc pour $z_0 \neq 0$, on a

$$\mathbb{I}_{\{\triangle L_s = z_0\}} = \mathbb{I}_A(z_0)N(\{t\}\times\{z_0\}).$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\#\{0\le s\le t; \triangle L_s \in B\} &= \sum_{0\le s\le t} \mathbb{I}_{\{\triangle L_s\in B\}}\\ &= \sum_{0\le s\le t}\sum_{z\in B} \mathbb{I}_{\{\triangle L_s = z\}}\\ &= \sum_{0\le s\le t}\sum_{z\in B} \mathbb{I}_A(z)N(\{t\}\times\{z\})\\ &= N(t, A\cap B).\end{aligned}$$

Une conséquence directe est que pour tout processus $F \in H^2(T,\nu)$, on a :

$$\int_0^t \int_A F(r,z)\,N(dr,dz) = \sum_{0\le s\le t} \mathbb{I}_A(\triangle L_s)F(s,\triangle L_s).$$

D'où

$$\begin{aligned}f(X_t) - f(X_0) &= \sum_{0\le s\le t} f(X_s) - f(X_{s-})\\ &= \sum_{0\le s\le t} f(X_{s-} + \mathbb{I}_A(\triangle L_s)K(s,\triangle L_s)) - f(X_{s-})\\ &= \int_0^t\int_A \big(f(X_{s-}+K(s,z)) - f(X_{s-})\big)\,N(ds,dz). \quad \square\end{aligned}$$

Montrons maintenant la formule d'Itô-Lévy dans le cas général. Soit $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ un espace probabilisé muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_t$ satisfaisant les hypothèses usuelles. Soit $B = (B_t; t\ge 0)$ un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien standard $d$-dimensionnel. Soit $N$ une $\mathcal{F}_t$-mesure aléatoire de Poisson sur $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^d/\{0\})$ d'intensité $dt\otimes d\nu$, où $\nu$ est une mesure de Lévy. Soit $\widetilde{N}$ sa mesure aléatoire de Poisson compensée.

Soit $b : [0,T]\times\Omega \to \mathbb{R}^d$ et $\sigma : b : [0,T]\times\Omega\to\mathbb{R}^{d\times d}$ des processus $\mathcal{F}_t$-adapté prévisible tels que

$$\mathbb{E}\int_0^T |b(r)|^2 + |\sigma(r)|^2 dr < +\infty,$$

et $H, K : [0,T]\times(\mathbb{R}^d/\{0\})\times\Omega \to \mathbb{R}^d$ des processus prévisibles tels que $H \in H^2(T,\nu)$. On considère le processus, pour $0\le t\le T$

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(r)\,dr + \int_0^t \sigma(r)\,dB_r + \int_0^t\int_{|z|<1} H(r,z)\,\widetilde{N}(dr,dz) + \int_0^t\int_{|z|\ge 1} K(r,z)\,N(dr,dz).$$

**Théorème 15.** *Si $X$ est une intégrale stochastique de type Lévy comme ci-dessus, alors, pour toute fonction $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ et $t \geq 0$, on a avec probabilité $1$ :*

$$\begin{aligned}
f(X_t) - f(X_0) = &\int_0^t \langle \partial_x f(X_{r-}), b(r) \rangle \, dr + \int_0^t \langle \partial_x f(X_{r-}), \sigma(r) \, dB_r \rangle \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^t \mathrm{Tr}\big(\partial^2_{xx} f(X_{r-}) \sigma(r) \sigma(r)^*\big) \, dr \\
&+ \int_0^t \int_{|z| \geq 1} \big[ f\big(X_{r-} + K(r,z)\big) - f(X_{r-}) \big] \, N(dr, dz) \\
&+ \int_0^t \int_{|z| < 1} \big[ f\big(X_{r-} + H(r,z)\big) - f(X_{r-}) \big] \, \widetilde{N}(dr, dz) \\
&+ \int_0^t \int_{|z| < 1} \big[ f\big(X_{r-} + H(r,z)\big) - f(X_{r-}) - \langle H(r,z), \partial_x f(X_{r-}) \rangle \big] \, dr \, \nu(dz).
\end{aligned}$$

**Preuve.** On suppose, pour simplifier, que $d = 1$, $f \in C_b^2(\mathbb{R})$ et $H$ est bornée, de sorte que chaque terme est bien défini. Soit $A_n = \{z \in \mathbb{R}^d/\{0\}; 1/n < |z| < 1\}$ et

$$X_t^n = X_0^n + \int_0^t b(r) \, dr + \int_0^t \sigma(r) \, dB_r + \int_0^t \int_{A_n} H(r,z) \, \widetilde{N}(dr, dz) + \int_0^t \int_{|x| \geq 1} K(r,z) \, N(dr, dz).$$

D'après le lemme ci-dessous,

$$\begin{aligned}
f(X_t^n) - f(X_0^n) = &\int_0^t \langle \partial_x f(X_{r-}^n), b(r) \rangle \, dr + \int_0^t \langle \partial_x f(X_{r-}^n), \sigma(r) \, dB_r \rangle \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^t \mathrm{Tr}\big(\partial^2_{xx} f(X_{r-}^n) \sigma(r) \sigma(r)^*\big) \, dr \\
&+ \int_0^t \int_{|z| \geq 1} \big[ f\big(X_{r-}^n + K(r,z)\big) - f(X_{r-}^n) \big] \, N(dr, dz) \\
&+ \int_0^t \int_{A_n} \big[ f\big(X_{r-}^n + H(r,z)\big) - f(X_{r-}^n) \big] \, \widetilde{N}(dr, dz) \\
&+ \int_0^t \int_{A_n} \big[ f\big(X_{r-}^n + H(r,z)\big) - f(X_{r-}^n) - \langle H(r,z), \partial_x f(X_{r-}^n) \rangle \big] \, dr \, \nu(dz).
\end{aligned}$$

Or, vu le lemme 4, on a $X_t^n \to X_t$ en probabilité quand $n \to \infty$. D'après le lemme 4 et le théorème de convergence dominée, on en déduit que chacun des termes ci-dessus converge vers le terme voulu. □

**Lemme 5.** *On considère $X$ de la forme*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(r) \, dr + \int_0^t \sigma(r) \, dB_r + \int_0^t \int_{|z| \geq a} K(r,z) \, N(dr, dz).$$

*Alors*

$$\begin{aligned}
f(X_t) - f(X_0) = &\int_0^t \langle \partial_x f(X_{r-}), b(r) \rangle \, dr + \int_0^t \langle \partial_x f(X_{r-}), \sigma(r) \, dB_r \rangle \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^t \mathrm{Tr}\big( \partial^2_{xx} f(X_{r-}) \sigma(r) \sigma(r)^* \big) \, dr \\
&+ \int_0^t \int_{|z| \geq a} \big[ f\big( X_{r-} + K(r,z) \big) - f(X_{r-}) \big] \, N(dr, dz)
\end{aligned}$$

**Preuve.** Soit $L$ le processus de Poisson composé défini par $L_t = \int_0^t \int_{|z|\geq a} zN(dr, dz)$. On considère ses temps de sauts (ou d'arrivées) $(T_n)_n$. Alors :

$$\begin{aligned}
f(X_t) - f(X_0) = &\sum_{n=0}^{+\infty} \big[ f(X_{t \wedge T_{n+1}}) - f(X_{t \wedge T_n}) \big] \\
= &\sum_{n=0}^{+\infty} \big[ f(X_{t \wedge T_{n+1}}) - f(X_{t \wedge T_{n+1}-}) \big] \\
&+ \sum_{n=0}^{+\infty} \big[ f(X_{t \wedge T_{n+1}-}) - f(X_{t \wedge T_n}) \big]
\end{aligned}$$

Pour $T_n < t < T_{n+1}$, on a :

$$X_t = X_{T_n} + \int_{T_n}^t b(r) \, dr + \int_{T_n}^t \sigma(r) \, dB_r.$$

On peut donc appliquer la formule d'Itô pour le mouvement brownien, ce qui permet de traiter le cas de la deuxième somme. De plus

$$f(X_{t\wedge T_{n+1}}) - f(X_{t \wedge T_{n+1}-}) = f(X_{t \wedge T_{n+1}-} + K(T_{n+1}, \triangle L_{T_{n+1}})) - f(X_{t\wedge T_{n+1}-}),$$

d'où

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \big[ f(X_{t \wedge T_{n+1}}) - f(X_{t \wedge T_{n+1}-}) \big] &= \sum_{n=0}^{+\infty} \big[ f(X_{t \wedge T_{n+1}-} + K(t \wedge T_{n+1}, \triangle L_{t \wedge T_{n+1}})) - f(X_{t \wedge T_{n+1}-}) \big] \\
&= \sum_{0 \leq s \leq t} \big[ f(X_{s-} + K(s, \triangle L_s)) - f(X_{s-}) \big] \\
&= \int_0^t \int_A \big[ f(X_{s-} + K(s,z)) - f(X_{s-}) \big] \, N(ds, dz).
\end{aligned}$$

Le résultat est démontré. □

**Corollaire 2.** *Si $X$ est une intégrale stochastique de type Lévy comme ci-dessus, alors presque sûrement :*

$$\sum_{0 \leq s \leq T} |\triangle X_t|^2 < +\infty.$$

**Corollaire 3.** *Si $X$ est une intégrale stochastique de type Lévy comme ci-dessus, alors, pour toute fonction $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ et $t \geq 0$, on a avec probabilité $1$ :*

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t \langle \partial_x f(X_{r-}), dX_r \rangle + \frac{1}{2} \int_0^t \mathrm{Tr}\big(\partial^2_{xx} f(X_{r-}) \sigma(r) \sigma(r)^*\big)\, dr \\ + \sum_{0 \leq s \leq t} \Big( f(X_r) - f(X_{r-}) - \langle \triangle X_r, \partial_x f(X_{r-}) \rangle \Big)$$

**Théorème 16. Inégalité de Burkholder-Davies-Gundy.** *Soient $H \in H^2(T, \nu)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et $\sigma : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}^{d \times d}$ tel que*

$$\mathbb{E} \int_0^T |\sigma(r)|^2\, dr < +\infty.$$

*Soit $M$ la martingale définie par*

$$M_t = \int_0^t \sigma(r)\, dB_r + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d/\{0\}} H(r,z)\, \widetilde{N}(dr, dz).$$

*Alors, pour tout $p > 0$, il existe une constante $C_p > 0$ telle que*

$$\frac{1}{C_p} \mathbb{E}\Big( \int_0^T |\sigma(r)|^2\, dr + \sum_{0 \leq t \leq T} |\triangle M_t|^2 \Big)^{p/2} \leq \mathbb{E}\Big[ \sup_{0 \leq t \leq T} \big(M_t\big)^p \Big]$$

*et*

$$\mathbb{E}\Big[ \sup_{0 \leq t \leq T} \big(M_t\big)^p \Big] \leq C_p \mathbb{E}\Big( \int_0^T |\sigma(r)|^2\, dr + \sum_{0 \leq t \leq T} |\triangle M_t|^2 \Big)^{p/2}.$$

# Chapitre 5

# Changement de mesures et martingales exponentielles

Soit $b : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ et $\sigma : b : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ des processus $\mathcal{F}_t$-adapté prévisible tels que

$$\mathbb{E} \int_0^T |b(r)|^2 + |\sigma(r)|^2 dr < +\infty,$$

et $H, K : [0,T] \times (\mathbb{R}/\{0\}) \times \Omega \to \mathbb{R}$ des processus prévisibles tels que $H \in H^2(T,\nu)$. On considère le processus, pour $0 \leq t \leq T$

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(r)\, dr + \int_0^t \sigma(r)\, dB_r + \int_0^t \int_{|z|<1} H(r,z)\, \widetilde{N}(dr,dz) + \int_0^t \int_{|z|\geq 1} K(r,z)\, N(dr,dz).$$

## 5.1 Exponentielle de Doleans-Dade

La question est de trouver un processus adapté tel que

$$dZ_t = Z_{t-}\, dX_t.$$

On définit l'exponentielle de Doleans-Dade, pour $t \geq 0$ :

$$Z_t = \exp\left( X_t - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma(r)^2\, dr \right) \prod_{0 \leq s \leq t} (1 + \triangle X_s) e^{-\triangle X_s}.$$

On fait l'hypothèse que

$$\inf\{\triangle X_t; t > 0\} > -1 \quad \text{presque sûrement.} \tag{5.1}$$

**Proposition 12.** *Sous l'hypothèse* (5.1)*, alors $Z_t < +\infty$ presque sûrement.*

**Preuve.** On doit prouver que le produit infini converge. On pose

$$\prod_{0 \leq s \leq t} (1 + \triangle X_s) e^{-\triangle X_s} = A(t) \times B(t)$$

où
$$A(t) = \prod_{0\le s\le t;|\triangle X_s|\ge 1/2} (1+\triangle X_s)e^{-\triangle X_s}$$
et
$$B(t) = \prod_{0\le s\le t;|\triangle X_s|< 1/2} (1+\triangle X_s)e^{-\triangle X_s}.$$
Comme $X$ est càdlàg, $\#\{0\le s\le t; |\triangle X_s|\ge 1/2\}$ est fini presque sûrement de sorte que $A(t)$ est fini presque sûrement.

De plus :
$$B(t) = \exp\Big(\sum_{0\le s\le t}\big(\ln(1+\triangle X_s)-\triangle X_s\big)\mathbb{1}_{\{|\triangle X_s|<1/2\}}\Big).$$
Or pour $|y|<1/2$, on a $\ln(1+y)-y\le Ky^2$, d'où
$$B(t)\le \exp\Big(\sum_{0\le s\le t} K|\triangle X_s|^2\mathbb{1}_{\{|\triangle X_s|<1/2\}}\Big) < +\infty.$$
□

**Théorème 17.** *On a*
$$dZ_t = Z_{t-}dX_t.$$

**Preuve.** Tout d'abord, on remarque que $Z_t$ peut se réécrire sous la forme $Z_t = e^{S_t}$ avec
$$\begin{aligned} dS_t =& (b(t) - \frac{1}{2}\sigma^2(t))dt + \sigma(t)dB_t + \int_{|z|\ge 1}\ln(1+K(t,z))N(dt,dz) \\ &+ \int_{|z|<1}\ln(1+H(t,z))\widetilde{N}(dt,dz) + \int_{|z|<1}\big(\ln(1+H(t,z))-H(t,z)\big)dt\nu(dz). \end{aligned}$$
Pour voir cela, il suffit de voir que
$$\begin{aligned} &\sum_{0\le s\le t}\ln(1+\triangle X_s)-\triangle X_s \\ &= \int_0^t\int_{|z|<1}\ln(1+H(r,z))-H(r,z)\,\widetilde{N}(dr,dz) + \int_0^t\int_{|z|<1}\ln(1+K(r,z))-K(r,z)\,N(dr,dz) \\ &\quad + \int_0^t\int_{|z|<1}\ln(1+H(r,z))-H(r,z)\,\nu(dz)dr \end{aligned}$$
*Remarque : le troisième terme dans le membre de droite ci-dessus peut s'expliquer de la façon suivante. Si on regarde les sauts de $X$, il ne sont dûs qu'à la mesure de Poisson $N$. Donc, dans le premier terme $\int_0^t\int_{|z|<1}\ln(1+H(r,z))-H(r,z)\,\widetilde{N}(dr,dz)$, la partie qui "saute" correspond formellement à $\int_0^t\int_{|z|<1}\ln(1+H(r,z))-H(r,z)\,N(dr,dz)$. Pour obtenir la mesure de Poisson compensée, on a enlevé artificiellement le terme $\int_0^t\int_{|z|<1}\ln(1+H(r,z))-H(r,z)\,\nu(dz)dr$. Il est donc normal de le rajouter ensuite. Bien sûr, ceci peut se démontrer rigoureusement.*

Il suffit alors d'appliquer la formule d'Itô pour obtenir le résultat. □

## 5.2 Martingales exponentielles

Le but de cette section est de déterminer des conditions qui assurent que $e^X$ est une martingale, où $X$ a été défini en début de chapitre.

**Théorème 18.** *On suppose, de plus, que*

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^t \int_{|z|\geq 1} |K(r,z)|\nu(dz)dr\Big] < +\infty.$$

*Le processus $X$ est une martingale si et seulement si*

$$b(t) + \int_{|z|\geq 1} K(t,z)\,\nu(dz) = 0,$$

*presque sûrement pour Lebesgue presque tout $t \geq 0$.*

**Preuve.** Un sens est trivial. Montrons la réciproque et supposons que $X$ soit une martingale. On a $\mathbb{E}[X_t - X_s|\mathcal{F}_s] = 0$. On en déduit

$$\mathbb{E}[\int_s^t b(r)\,dr + \int_s^t \int_{|z|\geq 1} K(t,z)\,\nu(dz)dr|\mathcal{F}_s] = 0,$$

d'où

$$\frac{1}{h}\int_s^{s+h} \mathbb{E}[b(r) + \int_{|z|\geq 1} K(t,z)\,\nu(dz)|\mathcal{F}_s]\,dr = 0.$$

Le résultat suit en passant à la limite quand $h \to 0$ et en utilisant le théorème de dérivation de Lebesgue. □

**Corollaire 4.** *$e^X$ est une martingale si et seulement si :*

$$b(t) + \frac{1}{2}\sigma^2(t) + \int_{|z|<1} \big(e^{H(t,z)} - 1 - H(t,z)\big)\nu(dz) + \int_{|z|\geq 1} \big(e^{K(t,z)} - 1\big)\nu(dz) = 0$$

*presque sûrement pour (Lebesgue) presque tout $t \geq 0$.*

**Preuve.** Il suffit d'appliquer la formule d'Itô à $e^X$ et utiliser le théorème 4. □

**Exemple 13.** **Cas brownien.** *On suppose que $X$ est de la forme*

$$X_t = \int_0^t b(r)\,dr + \int_0^t \sigma(r)\,dB_r.$$

*Pour que $e^X$ soit une martingale, il faut que $b(t) = -\frac{1}{2}\sigma^2(t)$, d'où*

$$e^{X_t} = \exp\Big(\int_0^t \sigma(r)\,dB_r - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(r)\,dr\Big).$$

**Exemple 14. Cas poissonnien.** *On suppose que $X$ est de la forme*

$$X_t = \int_0^t b(r)\,dr + \int_0^t K(r)\,N(dr)$$

*où $N$ est un processus de Poisson d'intensité $\lambda$. Pour que $e^X$ soit une martingale, il faut que $b(t) = -\lambda(e^{K(t)} - 1)$, d'où*

$$e^{X_t} = \exp\Big(\int_0^t K(r)\,N(dr) + \lambda\int_0^t (e^{K(r)} - 1)\,dr\Big).$$

**Exercice 12.** *Montrer que $e^Y$ coïncide avec l'exponentielle de Doleans-Dade si et seulement si $Y$ est une intégrale brownienne.*

## 5.3 Changement de mesures-Théorème de Girsanov

Si $Q$ est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_t$ (satisfaisant les hypothèses habituelles), on note $Q_t$ la restriction de $Q$ à $\mathcal{F}_t$.

On rappelle que si $Q << \mathbb{P}$ alors la famille $\left(\frac{dQ_t}{dP_t}\right)_t$ est une $\mathbb{P}$-martingale. Soit $e^X$ une martingale exponentielle. Comme $\mathbb{E}_P[e^{X_t}] = 1$, on peut définir une mesure de probabilité $Q_t$ sur $(\Omega, \mathcal{F}_t)$ par

$$\frac{dQ_t}{dP_t} = e^{X_t}$$

pour tout $t \geq 0$. On fixe $T > 0$.

**Lemme 6.** *Le processus $M = (M_t; 0 \leq t \leq T)$ est une martingale sous $Q$ si et seulement si $Me^X = (M_t e^{X_t}; 0 \leq t \leq T)$ est une martingale sous $P$.*

**Preuve.** Soit $A \in \mathcal{F}_s$. Alors

$$\mathbb{E}_P[M_t e^{X_t} 1\!\!1_A] = \mathbb{E}_{P_t}[M_t e^{X_t} 1\!\!1_A] = \mathbb{E}_{Q_t}[M_t 1\!\!1_A] = \mathbb{E}_Q[M_t 1\!\!1_A] = \mathbb{E}_Q[M_s 1\!\!1_A] = \mathbb{E}_P[M_s e^{X_s} 1\!\!1_A].$$

L'autre sens se montre de la même manière. □

**Théorème 19. Girsanov.** *Soit $X$ une intégrale de type Lévy telle que $e^X$ soit une martingale, ie $X$ est de la forme*

$$X_t = \int_0^t b(r)\,dr + \int_0^t \sigma(r)\,dB_r + \int_0^t \int_{|z|<1} H(r,z)\,\widetilde{N}(dr,dz) + \int_0^t \int_{|z|\geq 1} K(r,z)\,N(dr,dz),$$

*avec la condition*

$$b(t) + \frac{1}{2}\sigma^2(t) + \int_{|z|<1} \big(e^{H(t,z)} - 1 - H(t,z)\big)\nu(dz) + \int_{|z|\geq 1} \big(e^{K(t,z)} - 1\big)\nu(dz) = 0$$

*presque sûrement pour (Lebesgue) presque tout $t \geq 0$. On suppose pour simplifier que $K$ est borné.*

*Pour $L \in H^2(T,\nu)$, on définit*

$$M(t) = \int_0^t \int_{z\neq 0} L(r,z)\,\widetilde{N}(dr,dz).$$

*On définit*

$$U(r,z) = (e^{H(r,z)}-1)\mathbb{1}_{|z|<1} + (e^{K(r,z)}-1)\mathbb{1}_{|z|\geq 1}$$

*et on suppose*

$$\int_0^T \int_{|z|\leq 1} (e^{H(r,z)}-1)^2\,\nu(dz)dr < +\infty.$$

*Finalement, on pose*

$$W_t = B_t - \int_0^t \sigma(r)\,dr$$

*et*

$$N_t = M_t - \int_0^t \int_{z\neq 0} L(r,z)U(r,z)\,\nu(dz)dr$$

*pour $0 \leq t \leq T$.*

*Soit $Q$ la mesure de probabilité sur $(\Omega,\mathcal{F}_T)$ définie par*

$$\frac{dQ}{d\mathbb{P}_T} = e^{X_T}.$$

*Alors sous $Q$, $W = (W_t; 0\leq t\leq T)$ est un mouvement brownien et $N = (N_t; 0\leq t\leq T)$ est une $Q$-martingale.*

**Preuve.** En appliquant la formule d'Itô et en utilisant le fait que $e^X$ est une martingale, on a

$$\begin{aligned} e^{X_t} =& 1 + \int_0^t e^{X_{r-}}\sigma(r)\,dB_r + \int_0^t\int_{|z|<1} e^{X_{r-}}(e^{H(r,z)}-1)\,\widetilde{N}(dr,dz) \\ &+ \int_0^t\int_{|z|\geq 1} e^{X_{r-}}(e^{K(r,z)}-1)\,\widetilde{N}(dr,dz) \end{aligned}$$

On calcule alors le produit $W_te^{X_t}$ par la formule d'Itô et on obtient :

$$\begin{aligned} W_te^{X_t} &= \int_0^t W_re^{X_{r-}}\sigma(r)\,dB_r + \int_0^t\int_{|z|<1} W_re^{X_{r-}}(e^{H(r,z)}-1)\,\widetilde{N}(dr,dz) + \int_0^t e^{X_{r-}}dB_r \\ &\quad - \int_0^t e^{X_{r-}}\sigma(r)\,dr + \int_0^t\int_{|z|\geq 1} W_re^{X_{r-}}(e^{K(r,z)}-1)\,\widetilde{N}(dr,dz) + \int_0^t e^{X_{r-}}\sigma(r)\,dr \\ &= \int_0^t (1+\sigma(r)W_r)e^{X_{r-}}\,dB_r + \int_0^t\int_{|z|<1} W_re^{X_{r-}}(e^{H(r,z)}-1)\,\widetilde{N}(dr,dz) \end{aligned}$$

donc $W_te^{X_t}$ est une martingale sous $\mathbb{P}$.

De même on pose $Z_t = (W_t)^2 - t$ et on montre en calculant le produit $Z_te^{X_t}$ que c'est une martingale sous $\mathbb{P}$. Comme, $W$ est à trajectoires continues, le théorème de Lévy et le lemme 6 assurent que $W$ est un mouvement brownien.

La méthode est similaire pour $N$. On a :

$$\begin{aligned}
N_t e^{X_t} &= \int_0^t N_{r-} e^{X_{r-}} \sigma(r)\, dB_r + \int_0^t \int_{|z|<1} N_{r-} e^{X_{r-}} (e^{H(r,z)} - 1)\, \widetilde{N}(dr, dz) \\
&\quad + \int_0^t \int_{z \neq 0} e^{X_{r-}} L(r,z) \widetilde{N}(dr, dz) - \int_0^t \int_{z \neq 0} e^{X_{r-}} L(r,z) U(r,z) \nu(dz) dr \\
&\quad + \int_0^t \int_{|z| \geq 1} N_{r-} e^{X_{r-}} (e^{K(r,z)} - 1)\, \widetilde{N}(dr, dz) + \int_0^t e^{X_{r-}} U(r,z) L(r,z) \nu(dz)\, dr \\
&= \int_0^t N_{r-} e^{X_{r-}} \sigma(r)\, dB_r + \int_0^t \int_{|z| \neq 0} e^{X_{r-}} (N_{r-} U(r,z) + L(r,z))\, \widetilde{N}(dr, dz).
\end{aligned}$$

□

## 5.4 Théorème de représentation des martingales

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $X$ un processus de Lévy sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $(\mathcal{F}_t)_t$ sa filtration naturelle complétée.

**Théorème 20. Représentation des martingales.** *Soit $T > 0$ fixé. Si $M = (M_t; 0 \leq t \leq T)$ est une martingale de carré-intégrable par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_t$ alors il existe $a \in \mathbb{R}$, un processus prévisible $F : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ tel que*

$$\mathbb{E} \int_0^T |F(r)|^2\, dr < +\infty$$

*et $H \in H^2(T, \nu)$ tel que pour tout $0 \leq t \leq T$ :*

$$M_t = a + \int_0^t F(r)\, dB_r + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d / \{0\}} H(r,z)\, \widetilde{N}(dr, dz).$$

*Le triplet $(a, F, H)$ est uniquement déterminé par $M$ aux ensembles de mesure nulle près.*

# Chapitre 6

# Equations différentielles stochastiques

## 6.1 Existence et unicité

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé equippé d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_t$ satisfaisant les hypothèses usuelles. Soit $B = (B_t; t \geq 0)$ un mouvement brownien standard $d$-dimensionnel et une mesure aléatoire de Poisson $N$ sur $\mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R}^d/\{0\})$. On suppose que $B$ et $N$ sont indépendants et tous deux sont $(\mathcal{F}_t)_t$-adaptés. On note $\nu$ l'intensité de $N$ et $\widetilde{N}$ la mesure de Poisson compensée associée.

On cherche à résoudre l'EDS

$$
\begin{aligned}
X_t = & X_0 + \int_0^t b(X_{r-})\, dr + \int_0^t \sigma(X_{r-})\, dB_r + \int_0^t \int_{|z|<1} F(X_{r-}, z)\, \widetilde{N}(dr, dz) \\
& + \int_0^t \int_{|z|\geq 1} G(X_{r-}, z)\, N(dr, dz),
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

où les coefficients $b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $\sigma : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$, $F, G : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ sont supposés mesurables. La condition initiale $X_0$ est une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable finie presque sûrement.

**Définition 8.** *Une solution à* (6.1) *est un processus stochastique càdlàg à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, adapté et presque sûrement solution de* (6.1). *On dira que la solution de* (6.1) *est unique si, pour toutes solutions $X^1$ et $X^2$, on a $\mathbb{P}(X_t^1 = X_t^2, \forall t \geq 0) = 1$.*

On fera les hypothèses suivantes sur les coefficients :

- **Condition de lipschitz (CL).** Il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout $x, x' \in \mathbb{R}^d$ :

$$|b(x) - b(x')|^2 + |\sigma(x) - \sigma(x')|^2 + \int_{|z|<1} |F(x,z) - F(x',z)|^2 \nu(dz) \leq K|x - x'|^2.$$

- **Condition de croissance (CC).** Il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ :

$$|b(x)|^2 + |\sigma(x)|^2 + \int_{|z|<1} |F(x,z)|^2 \nu(dz) \leq K(1 + |x|^2).$$

- **Condition de continuité (CCO).** L'application $x \mapsto G(x,z)$ est continue pour tout $|z| \geq 1$.

**Théorème 21.** *Sous les hypothèses* **(CL)** *et* **(CC)***, il existe une unique solution à l'EDS* (6.1).

**Idée de preuve.** 1) on considère d'abord le cas où $G = 0$ et $\mathbb{E}[X_0^2] < +\infty$. Il suffit alors d'utiliser la méthode du point fixe de Picard. La méthode est similaire au cas du mouvement brownien. Dans ce cas on montre que la solution vérifie

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le s\le t} |X_s|^2\Big] \le C(t)(1 + \mathbb{E}[|X_0|^2]).$$

2) si $G = 0$ et $\mathbb{E}[X_0^2] = +\infty$. On définit une suite $(X_0^n)_n$ par $X_0^n = X_0 \mathbb{1}_{|X_0|\le n}$. On applique le 1) pour chaque $n$, ce qui permet de construire une suite de processus $X^n$ solution de (6.1) avec condition initiale $X_0^n$. Il est facile de voir que la suite $(X^n)_n$ vérifie

$$\mathbb{P}(\sup_{t\ge 0} |X_t^m - X_t^n| > \delta) \to 0$$

quand $n, m \to \infty$. En particulier, elle converge vers un processus adapté càdlàg $X$ solution de (6.1).

3) Soit $P$ le processus de Poisson composé défini pour $t \ge 0$ par

$$P_t = \int_0^t \int_{|z|\ge 1} xN(dr, dz).$$

Soit $(T_n)_n$ les temps d'arrivées de $P$. L'idée est de construire, à l'aide du 2), une solution $X$ à (6.1), sur l'intervalle de temps $[0, T_1[$, intervalle sur lequel on peut considérer que $G = 0$. Ensuite on pose $X_{T_1} = X_{T_1 -} + G(T_1, \triangle P_{T_1})$ et on résoud (6.1) sur $[T_1, T_2[$ avec condition initiale $X_{T_1}$...et ainsi de suite. Le processus $X$ ainsi construit est une solution de (6.1). L'unicité se montre de la même façon.

## 6.2 Propriété de Markov

**Théorème 22.** *La solution de* (6.1) *est un processus de Markov homogène.*

**Preuve.** Soit $f$ une fonction bornée sur $\mathbb{R}^d$. Il faut montrer que

$$\mathbb{E}[f(X_{t+s})|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[f(X_t)|X_0 = X_s].$$

Pour cela, on note $X_t^{s,x}$ $(t \ge s)$ la solution de (6.1) partant de $x$ à l'instant $s$. C'est un processus $\sigma(B_{s+u} - B_s, N(]s, s+u], A); u \ge 0, A \in \mathcal{B}(R^d/0))$-mesurable, donc indépendant de $\mathcal{F}_s$, qui a même loi que $X_{t-s}^{0,x}$ (par stationnarité des accroissements du brownien et de la mesure de Poisson). Par unicité de la solution, on a presque sûrement :

$$X_{t+s}^{s,X_s^{0,x}} = X_{t+s}^{0,x}.$$

Donc

$$\mathbb{E}[f(X_{t+s})|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[f(X_{t+s}^{s,X_s^{0,x}})|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[f(X_t^{0,X_0})|X_0 = X_s^{0,x}]$$

## 6.3 Formule de Feynman-Kac

Soit $L$ l'opérateur défini pour toute fonction $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$ par

$$\begin{aligned} Lf(x) =& \langle b(x), \partial_x f(x)\rangle + \frac{1}{2}\mathrm{Trace}\big[\sigma(x)\sigma^*(x)\partial^2_{xx}f(x)\big] \\ &+ \int_{|z|<1}\Big[f(x+F(x,z)) - f(x) - \langle F(x,z), \partial_x f(x)\rangle\Big]\nu(dz) \\ &+ \int_{|z|\geq 1}\Big[f(x+G(x,z)) - f(x)\Big]\nu(dz) \end{aligned}$$

On considère l'équation sur $[0,T]\times\mathbb{R}^d$ l'équation intégro-différentielle :

$$\partial_t u(t,x) = Lu(t,x) \quad \text{et} \quad u(0,x) = g(x) \tag{6.2}$$

pour une certaine fonction $g \in C_b(\mathbb{R}^d)$.

**Théorème 23.** *Si $u \in C_b^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^d)$ est une solution classique de* (6.2) *alors $u$ admet la représentation probabiliste :*

$$u(t,x) = \mathbb{E}_x[g(X_t)].$$

**Preuve.** On applique la formule d'Itô à $(r,x)\mapsto u(t-r,x)$ et à $X$ :

$$\begin{aligned} & u(0,X_t) \\ =& u(t,x) - \int_0^t \partial_t u(t-r,X_{r-})\,dr + \int_0^t \langle b(X_{r-}), \partial_x u(t-r,X_{r-})\rangle\,dr \\ &+ \int_0^t \langle \partial_x u(t-r,X_{r-}), \sigma(X_{r-})\,dB_r\rangle + \frac{1}{2}\int_0^t \mathrm{Trace}\big(\sigma\sigma^*(X_{r-})\partial^{xx}u(t-r,X_{r-})\big)\,dr \\ &+ \int_0^t\int_{|z|<1}\big(u(t-r,X_{r-}+F(X_{r-},z)) - u(t-r,X_{r-})\big)\,\widetilde{N}(dr,dz) \\ &+ \int_0^t\int_{|z|\geq 1}\big(u(t-r,X_{r-}+G(X_{r-},z)) - u(t-r,X_{r-})\big)\,N(dr,dz) \\ &+ \int_0^t\int_{|z|<1}\big(u(t-r,X_{r-}+F(X_{r-},z)) - u(t-r,X_{r-}) - \langle F(X_{r-},z), \partial_x u(t-r,X_{r-})\rangle\big)\nu(dz)dr. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} & g(X_t) \\ =& u(t,x) + \int_0^t \big(-\partial_t u + Lu\big)(t-r,X_{r-})\,dr + \int_0^t \langle \partial_x u(t-r,X_{r-}), \sigma(X_{r-})\,dB_r\rangle \\ &+ \int_0^t\int_{|z|<1}\big(u(t-r,X_{r-}+F(X_{r-},z)) - u(t-r,X_{r-})\big)\,\widetilde{N}(dr,dz) \\ &+ \int_0^t\int_{|z|\geq 1}\big(u(t-r,X_{r-}+G(X_{r-},z)) - u(t-r,X_{r-})\big)\,\widetilde{N}(dr,dz). \end{aligned}$$

En prenant l'espérance et en utilisant la relation (6.2), on obtient le résultat. □

# Chapitre 7

# Quelques applications en finance

## 7.1 Probas risque neutre

On considère un actif risqué $\{S_t; t \geq 0\}$ adapté à une filtration $\{\mathcal{F}_t; t \geq 0\}$, et un actif non risqué $\{S_t^0; t \geq 0\}$ qui croît selon la formule des intérêts composés

$$\forall t \geq 0, \quad S_t^0 = S_0 e^{rt}$$

où $r$ est le taux d'intérêt instantané.

On définit le processus actualisé $\{\widetilde{S}_t; t \geq 0\}$ par $\widetilde{S}_t = e^{-rt} S_t$.

**Théorème 24.** *Si le marché est libre d'arbitrage, il existe une mesure de probabilité $Q$ équivalente à $I\!\!P$ sous laquelle l'actif réactualisé $\widetilde{S}$ est une martingale.*

Un marché est dit complet si tout actif contingent peut être répliqué par un porte-feuille auto-financé.

**Théorème 25.** *Si le marché est complet si et seulement s'il existe une unique mesure de probabilité $Q$ équivalente à $I\!\!P$ sous laquelle l'actif réactualisé $\widetilde{S}$ est une martingale.*

Une telle mesure est alors appelée mesure de risque neutre. Si $Q$ existe mais n'est pas unique, le marché est dit incomplet.

On suppose que l'actif risqué satisfait l'EDS

$$dS_t = \sigma S_{t-} \, dX_t + \mu S_{t-} \, dt$$

où $X$ est un processus de Lévy. On peut alors utiliser les exponentielles de Doleans-Dade pour modéliser $S$. Clairement, pour que les prix du stock soit non négatif, il faut imposer la condition $\Delta X_t > -\sigma^{-1}$. We set $c = -\sigma^{-1}$. On impose également la condition suivante sur la mesure de Lévy $\nu$ associée à la mesure aléatoire de Poisson $N$ représentant les sauts de $X$

$$\int_c^{+\infty} (x^2 \vee x) \, d\nu(x) < +\infty < +\infty.$$

En particulier, les returns possèdent des moments d'ordre 2.

D'après la décomposition d'Ito-Lévy, on peut écrire

$$X_t = mt + \kappa B_t + \int_0^t \int_c^{+\infty} z\widetilde{N}(dr, dz),$$

où $\kappa \geq 0$ et $m \in \mathbb{R}$. En utilisant la formule d'Itô, on a :

$$d\ln(S_t) = \kappa\sigma\, dB_t + (m\sigma + \mu - \frac{1}{2}\kappa^2\sigma^2)\, dt + \int_c^{+\infty} \ln(1+\sigma z)\, \widetilde{N}(dr, dz) + \int_c^{+\infty} [\ln(1+\sigma z) - \sigma z]\, \nu(dz)dt$$

On cherche maintenant à déterminer des mesures de probabilité $\mathbb{Q}$ équivalentes à $\mathbb{P}$ par rapport auxquelles l'actif risqué réactualisé est une martingale. Pour cela on va chercher des mesures de probbilités $\mathbb{Q}$ sous la forme

$$d\mathbb{Q} = e^{Y_T}\, d\mathbb{P}$$

où $Y$ est un processus d'Itô-Lévy de la forme

$$dY_t = G(t)\, dt + F(t)\, dB_t + \int_{\mathbb{R}} H(t, z)\, \widetilde{N}(dt, dz)$$

avec $H \in H^2(T, \nu)$. On suppose que les coefficients, $G, F, H$ sont tels que le processus $e^Y$ soit une martingale. Ainsi $G$ est uniquement déterminé par $F$ et $H$ d'après le corollaire 4. On peut donc bel et bien définir une nouvelle mesure de probabilité $\mathbb{Q}$ par

$$d\mathbb{Q} = e^{Y_T}\, d\mathbb{P}.$$

De plus, d'après le théorème de Girsanov,

$$B_t^Q = B_t - \int_0^t F(r)\, dr$$

est un mouvement brownien sous $\mathbb{Q}$ et

$$\widetilde{N}^Q(t, E) = \widetilde{N}(t, E) - \nu^Q(t, E)$$

est une $\mathbb{Q}$-martingale où

$$\nu^Q(t, E) = \int_0^t \int_E (e^{H(r,z)} - 1)\nu(dz)dr.$$

**Lemme 7.** *Le compensateur de $\widetilde{N}^Q(t, E)$ est $\int_0^t \int_E e^{H(r,z)}\nu(dz)dr$.*

**Preuve.** En appliquant la formule d'Itô, on obtient

$$\begin{aligned}
\widetilde{N}^Q(t, E)^2 =& \big(\widetilde{N}(t, E) - \nu^Q(t, E)\big)^2 \\
=& \int_0^t \int_E \big(\widetilde{N}(r-, E) - \nu^Q(r-, E) + 1\big)^2 - \big(\widetilde{N}(r-, E) - \nu^Q(r-, E)\big)^2\, \widetilde{N}(dr, dz) \\
&+ \int_0^t \int_E \Big[\big(\widetilde{N}(r-, E) - \nu^Q(r-, E) + 1\big)^2 - \big(\widetilde{N}(r-, E) - \nu^Q(r-, E)\big)^2 \\
&- 2\big(\widetilde{N}(r-, E) - \nu^Q(r-, E)\big)\Big]\, \nu(dz)dr \\
&- 2\int_0^t \big(\widetilde{N}(r, E) - \nu^Q(r, E)\big) \int_E (e^{H(r,z)} - 1)\nu(dz)dr,
\end{aligned}$$

qui peut se réécrire sous la forme

$$\begin{aligned}\widetilde{N}^Q(t,E)^2 =&2\int_0^t \widetilde{N}^Q(r-,E)\widetilde{N}(dr,E)+\widetilde{N}(t,E)\\&+2\int_0^t \widetilde{N}^Q(r-,E)\nu(E)dr-2\int_0^t \widetilde{N}^Q(r-,E)\nu(E)dr+t\nu(E)\\&-2\int_0^t \widetilde{N}^Q(r-,E)\nu^Q(r,E)dr\\=&2\int_0^t \widetilde{N}^Q(r-,E)\widetilde{N}^Q(dr,E)+\widetilde{N}^Q(t,E)+\nu^Q(t,E)dr+t\nu(E)\\=&2\int_0^t \widetilde{N}^Q(r-,E)\widetilde{N}^Q(dr,E)+\int_0^t\int_E e^{H(r,z)}\nu(dz)dr.\end{aligned}$$

□

On peut alors réécrire le prix de l'actif réactualisé en fonctions de ces nouveaux processus pour obtenir :

$$\begin{aligned}d\ln(\widetilde{S}_t) =&\kappa\sigma\, dB_t^Q-\frac{1}{2}\kappa^2\sigma^2dt+\int_c^{+\infty}\ln(1+\sigma z)\,\widetilde{N}^Q(dr,dz)\\&+\int_c^{+\infty}[\ln(1+\sigma z)-\sigma z]e^{H(t,z)}\,\nu(dz)dt\\&+\Big(m\sigma+\mu-r+\kappa\sigma F(t)+\sigma\int_c^{+\infty} z(e^{H(t,z)}-1)\,\nu(dz)\Big)dt\end{aligned}$$

Posons

$$C(t)=m\sigma+\mu-r+\kappa\sigma F(t)+\sigma\int_c^{+\infty} z(e^{H(t,z)}-1)\,\nu(dz).$$

En appliquant la formule d'Itô-Lévy, on obtient :

$$d\widetilde{S}_t =\widetilde{S}_t\kappa\sigma\, dB_t^Q+\int_c^{+\infty}\widetilde{S}_{t-}\sigma z\,\widetilde{N}^Q(dr,dz)+\widetilde{S}_tC(t)dt.$$

Ainsi, l'actif réactualisé $\widetilde{S}_t$ est une $\mathbb{Q}$-martingale locale si et seulement si $C(t)=0$ ps. C'est même une martingale si l'on impose la condition

$$\forall t>0,\quad \int_0^t\int_c^{+\infty} z^2\mathbb{E}^Q[e^{H(r,z)}]\nu(dz)dr<+\infty.$$

Il est important de remarquer que la condition $C=0$ possède (en général) une infinité de solutions $(F,H)$. En effet, si $f\in L^1(\mathbb{R},\nu)$ et si $(F,H)$ est une solution, alors le couple

$$\big(F+\int_{\mathbb{R}} f\,d\nu,\ln(e^H-\frac{\kappa f}{z})\big)$$

est aussi solution. Donc il existe une infinité de mesure $\mathbb{Q}$, équivalentes à $\mathbb{P}$, sous lesquelles l'actif réactualisé est une martingale. D'une façon générale, les modèles d'actif de type Lévy sont donc des marchés incomplets.

**Remarque importante :** Il existe 2 cas particuliers où le marché est complet

1. Cas brownien (cad $\nu = 0$ et $\kappa > 0$) : dans ce cas $F(t) = \frac{r-\mu-m\sigma}{\kappa\sigma}$ ps.
2. Cas poissonien (cad $\kappa = 0$ et $\nu = \lambda\delta_1$ avec $\nu > m + (\mu - r)/\sigma$) : dans ce cas on pose

$$H(t) = H(t,1) = \ln\left(\frac{r - \mu + (\lambda - m)\sigma}{\lambda\sigma}\right) \quad ps.$$

## 7.2 Exemples

En principe, un processus de Lévy peut avoir simultanément une composante de diffusion non nulle et des sauts d'activité infinie (mesure de Lévy non intégrable en $0$) . Cependant, les petits sauts ont un comportement similaire à une diffusion et sont donc redondants avec la composante brownienne, du point de vue de la modélisation de la dynamique des prix. En particulier, un tel modèle serait difficile à calibrer. Par conséquent, les modèles de Lévy exponentiels considérés dans la littérature financière sont de deux types. Le premier type, ce sont des modèles de diffusion avec sauts où on combine une partie de diffusion non nulle avec un processus de sauts d'activité finie. Le processus évolue principalement comme une diffusion, tandis que les discontinuités modélisent de grands mouvements inattendus et relativement rares dans les prix.

La seconde catégorie de modèles est celle des processus sans terme de diffusion. Dans ce cas, les petits sauts fréquents sont nécessaires pour générer des trajectoires réalistes : on parle alors des modèles purement discontinus d'activité infinie : les sauts arrivent constamment.

Les modèles présentés ci-dessous sont du type Lévy exponentiels, c'est-à-dire que l'actif risqué $S_t$ est décrit par

$$S_t = S_0 e^{rt+X_t}$$

où $r$ est le taux d'intérêt de l'actif non risqué et le processus $X$ est un Lévy satisfaisant tel que $e^X$ est une martingale (condition d'absence d'arbitrage). C'est donc à l'évolution des prix sous la proba risque neutre que l'on s'intéresse. Si le processus de Lévy $X$ s'écrit

$$X_t = \gamma t + \sigma B_t + \int_0^t \int_{|z|<1} z\widetilde{N}(dr,dz) + \int_0^t \int_{|z|\geq 1} zN(dr,dz)$$

La condition d'absence d'arbitrage est équivalente à :

$$\int_{|z|>1} e^z \nu(dz) < +\infty \quad \text{et } \gamma = -\sigma^2/2 - \int_{\mathbb{R}} (e^z - 1 - z\mathbb{1}_{|z|<1})\nu(dz).$$

### 7.2.1 Modèle de Merton

Le modèle de Merton (1976) est l'une des premières applications de processus avec sauts en modélisation financière. Dans ce modèle, pour prendre en compte les discontinuités dans les cours d'actions, on rajoute des sauts gaussiens au logarithme du prix :

$$S_t = S_0 e^{rt+X_t}$$

avec

$$X_t = \gamma t + \sigma B_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, \quad Y_i \sim N(\mu, \delta^2)$$

L'avantage de ce modèle est d'avoir une formule en série pour la densité de proba du log-prix :

$$p_t(x) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k \exp\Big(-\frac{(x-\gamma t-k\mu)^2}{2(\sigma^2 t+k\delta^2)}\Big)}{k!\sqrt{2\pi(\sigma^2 t + k\delta^2)}}.$$

### 7.2.2 Processus variance-gamma

L'un des exemples les plus simples de processus de Lévy avec intensité infinie de sauts est le processus gamma, un processus aux accroissements indépendants et stationnaires tel que pour tout $t$, la loi $p_t$ de $X_t$ est la loi gamma de paramètres $\lambda$ et $ct$ :

$$p_t(x) = \frac{\lambda^{ct}}{\Gamma(ct)} x^{ct-1} e^{-\lambda x}.$$

Le processus gamma est un processus de Lévy croissant dont la fonction caractéristique a une forme très simple

$$E[e^{iuX_t}] = \big(1 - \frac{iu}{\lambda}\big)^{-ct}.$$

On démontre facilement que la mesure de Lévy du processus gamma a une densité donnée par

$$\nu(dx) = \frac{ce^{-\lambda x}}{x} \mathbb{1}_{\{x>0\}}$$

A partir du processus gamma, on peut construire un modèle avec sauts très populaire : le processus variance gamma, qui est obtenu en changeant l'échelle de temps d'un mouvement brownien avec drift par un processus gamma :

$$Y_t = \mu X_t + \sigma B_{X_t}.$$

L'utilisation de $Y$ pour modéliser le logarithme du prix d'action est habituellement justifiée en disant que le prix suit un mouvement Brownien géometrique sur une échelle de temps stochastique donnée par le processus gamma. Le processus variance gamma est un autre exemple du processus de Lévy avec intensité infinie de sauts, et sa fonction caractéristique est donnée par

$$E[e^{iuY_t}] = \Big(1 + \frac{\kappa\sigma^2 u^2}{2} - i\mu\kappa u\Big)^{-\kappa t}.$$

Le paramètres ont l'interprétation intuitive suivante : $\sigma$ est un paramètre d'échelle, $\mu$ est le paramètre d'asymétrie (skewness) et $\kappa$ est le paramètre de kurtosis du processus (épaisseur des queues de la densité).

### 7.2.3 Modèle NIG (Normal Inverse Gaussian)

Le processus de log-prix est obtenu en subordonnant un mouvement brownien $\gamma t + \sigma B_t$ par un subordinateur inverse gaussien (voir l'exemple 11). Il est utilisé en finance car la densité de probabilité du subordinateur est connue sous forme analytique. Ceci rend le processus subordonné plus facile à étudier et à simuler.

## 7.3 Problèmes de couverture

Dans un marché incomplet, la réplication exacte n'est pas possible et le problème de couverture devient un problème d'approximation du pay-off $Y_T$ de l'option par le portefeuille de couverture. On peut essayer d'optimiser la stratégie de couverture en contrôlant l'erreur résiduelle. La couverture par maximisation d'utilité consiste à chercher la stratégie de couverture qui maximise l'utilité terminale du vendeur de l'option

$$\max_{\phi} \mathbb{E}\Big[U\big(c+\int_0^T \phi_r\,dX_r - Y_T\big)\Big]$$

où $U$ est une fonction convexe concave.

Un inconvenient de cette approche est qu'elle correspond à une règle de pricing et couverture non-linéaire : la couverture pour un portefeuille contenant une option A et une option B ne coïncide pas avec la couverture de A plus la couverture de B.

La couverture quadratique donne, quant à elle, un ratio de couverture linéaire. Elle consiste à minimiser la distance $L^2$ entre le pay-off et la valeur terminale du portefeuille de couverture :

$$\min_{\phi} \mathbb{E}\Big[\big(c+\int_0^T \phi_r\,dX_r - Y_T\big)^2\Big].$$

Le portefeuille de couverture optimal (s'il existe) est la projection $L^2$ de Y sur le sous-espace (linéaire) d'actifs réplicables. Par contre, elle pénalise les gains et les pertes de la même façon. Dans la suite de cette section on va se concentrer sur la couverture quadratique. De plus, on supposera que les prix de tous les actifs sont des martingales.

On suppose que l'actif risqué $X_t$ est un processus d'Itô-Lévy martingale

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(r)\,dB_r + \int_0^t \int_R \gamma(r,z)\widetilde{N}(dr,dz)$$

où :

- $B$ est un mouvement brownien standard,
- $N$ est une mesure aléatoire de Poisson de compensateur $dt \times \nu$,
- $\sigma$ et $\gamma$ sont des processus càdlàg adaptés qui remplissent les conditions d'intégrabilité :

$$|\gamma(r,z)|^2 \le \rho(z)A_r, \qquad \int \rho(z)\,\nu(dz) < +\infty \ \text{ et } \ \mathbb{E}\int_0^T (\sigma_r^2 + A_r)\,dr < +\infty.$$

Le pay-off de l'option $Y$ est de carré intégrable $\mathbb{E}[Y^2] < +\infty$. En particulier, la martingale

$$Y_t = \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_t]$$

admet une représentation de type Itô-Lévy :

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \sigma^Y(r)\,dB_r + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \gamma^Y(r,z)\widetilde{N}(dr,dz).$$

L'erreur de couverture est définie par :

$$\begin{aligned}\epsilon(c,\phi) &= c + \int_0^T \phi(r)\,dX_r - Y \\ &= c - \mathbb{E}(Y) + \int_0^T (\sigma(r)\phi(r) - \sigma^Y(r))\,dB_r + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} (\phi(r)\gamma(r,z) - \gamma^Y(r,z))\widetilde{N}(dr,dz).\end{aligned}$$

D'où :

$$\mathbb{E}[\epsilon(c,\phi)^2] = (c-\mathbb{E}[Y])^2 + \int_0^T \Big(\mathbb{E}[(\sigma(r)\phi(r) - \sigma^Y(r))^2] + \int_{\mathbb{R}} (\phi(r)\gamma(r,z) - \gamma^Y(r,z))^2 \nu(dz)\Big) dr,$$

quantité qui est minimisée pour

$$c = \mathbb{E}[Y], \quad \phi_t = \frac{\sigma_t \sigma_t^Y + \int_{\mathbb{R}} \gamma^Y(t,z)\gamma(t,z)\nu(dz)}{\sigma_t^2 + \int_{\mathbb{R}} \gamma^2(t,z)\nu(dz)},$$

pourvu que $\sigma_t^2 + \int_{\mathbb{R}} \gamma^2(t,z)\nu(dz)$ soit non singulière.

## 7.4 Méthodes de transformées de Fourier pour le pricing d'options

Soit $X$ un processus de Lévy tel que $e^X$ soit une martingale. Pour calculer le prix d'un call européen

$$C(K) = e^{-rT}\mathbb{E}^*\big[\big(S_0 e^{rT+X_T} - K\big)_+\big] = S_0 \mathbb{E}^*\big[\big(e^{X_T} - \frac{Ke^{-rT}}{S_0}\big)_+\big] \stackrel{def}{=} S_0\mathbb{E}^*\big[\big(e^{X_T} - e\kappa\big)_+\big],$$

on cherche à calculer sa transformée de Fourier par rapport au log-strike ajusté $\kappa$ en fonction de l'exposant de Lévy de $X$ : $\phi_T(v)$. Le prix du call résultera alors des mathodes d'inversion de Fourier. Or ceci ne peut pas être fait directement car la fonction $C(\kappa)$ n'est pas intégrable (elle tend vers une constante positive lorsque $\kappa$ tend vers $-\infty$). L'idée est donc de recentrer cette fonction et de calculer la transformée de (en prenant $S_0 = 1$)

$$g_T(k) = \mathbb{E}^*\big[\big(e^{X_T} - e^{\kappa}\big)_+\big] - (1 - e^k)_+.$$

**Proposition 13.** *Soit $X$ un processus stochastique tel que $e^X$ soit une martingale et*

$$\mathbb{E}[e^{(1+\alpha)X_t}] < +\infty \quad \forall t \tag{7.1}$$

*pour un certain $\alpha > 0$. Alors la transformée de Fourier de la fonction $g_T$ est donnée par*

$$\hat{g}_T(v) = \int_{\mathbb{R}} e^{iv\kappa} g_T(\kappa) d\kappa = \frac{\phi_T(v-i) - 1}{iv(1+iv)}.$$

*Le prix du call se calcule alors en inversant la transformée de Fourier :*

$$C(K) = (S_0 - Ke^{-rT})_+ + \frac{S_0}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-iv\ln(Ke^{-rT}/S_0)} \frac{\phi_T(v-i) - 1}{iv(1+iv)} dv.$$

*Proof.* We have

$$g_T(\kappa) = \int_{\mathbb{R}} (e^x - e^k)(\mathbb{1}_{\kappa \le x} - \mathbb{1}_{\kappa \le 0})\mu_T(dx)$$

où $\mu_T$ est la loi de $X_T$. La condition (7.1) permet de calculer $\hat{g}_T$ en échangeant l'ordre d'intégration.

$$\begin{aligned}\hat{g}_T(v) &= \int_{\mathbb{R}} d\kappa \int_{\mathbb{R}} \mu_T(dx) e^{iv\kappa}(e^x - e^\kappa)(\mathbb{1}_{\kappa \le x} - \mathbb{1}_{\kappa \le 0}) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mu_T(dx) \int_x^0 e^{iv\kappa}(e^\kappa - e^x)\, d\kappa \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mu_T(dx) \Big( \frac{1-e^x}{iv+1} - \frac{e^x}{iv(iv+1)} + \frac{e^{(iv+1)x}}{iv(iv+1)} \Big).\end{aligned}$$

Le premier terme du membre de droite disparaît car $e^X$ est une martingale et les 2 restants donnent le résultat. $\square$