

Examen de Processus à sauts

(Durée 2h00, aucun document autorisé, pas de calculatrice)

Exercice 1 : (5 points) Soit $(N_t)_{t \geq 0} \geq 0$ et $(\tilde{N}_t)_{t \geq 0} \geq 0$ deux processus de Poisson indépendants et d'intensité respectives λ et $\tilde{\lambda}$.

1. Montrer que le processus défini par :

$$\forall t \geq 0, \quad Z_t = N_t - \tilde{N}_t$$

est un processus de Lévy.

2. Montrer que Z est un processus de Poisson composé dont on précisera l'intensité et la loi de sauts.

Exercice 2 : (7 points)

1. On suppose que X est un processus de Poisson composé ayant pour mesure de Lévy

$$\nu(dz) = \mathbb{1}_{\{z < 0\}} e^{-a|z|} dz + \mathbb{1}_{\{z > 0\}} e^{-az} dz$$

pour un $a > 0$. Soit $(T_t)_t$ un subordonateur de caractéristique $(0, \mu)$ où μ est donnée par :

$$\mu(dz) = \mathbb{1}_{\{z > 0\}} 2ae^{-a^2 z} dz.$$

- (a) Calculer l'exposant de Laplace du subordonateur T .
 - (b) Soit (B_t) un mouvement brownien standard indépendant de (T_t) . Montrer que le processus $Z_t = \sqrt{2}B_{T_t}$ est un processus de Lévy ayant même loi que X .
2. On suppose que X est un processus de Poisson composé ayant pour mesure de Lévy

$$\nu(dz) = \frac{\lambda\sqrt{2}}{\sigma\sqrt{\pi}} e^{-z^2/(2\sigma^2)} dz$$

pour des constantes $\lambda, \sigma > 0$.

- (a) Calculer le symbole de Lévy du processus X .
- (b) Soit (B_t) un mouvement brownien standard et (N_t) un processus de Poisson indépendant de (B_t) avec intensité 2λ . Montrer que le processus $Z_t = B_{N_t}$ est un processus de Lévy ayant même loi que X .

Exercice 3 : (8 points) Soit $(P_t)_{t \geq 0} \geq 0$ un processus de Poisson d'intensité λ et $(Z_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi $\nu(dz)$ sur \mathbb{R} . On suppose que la suite $(Z_n)_n$ et le processus $(P_t)_{t \geq 0} \geq 0$ sont indépendants. On définit le processus de Poisson composé

$$Y_t = \sum_{k=1}^{P_t} Z_k.$$

1. Quel est le triplet caractéristique de Y ? (on prendra la fonction $\mathbb{1}_{|z|\leq 1}$ comme cut-off dans la formule de Lévy Khintchine)
2. Ecrire la décomposition d'Itô-Lévy de Y en définissant correctement chacun des termes de la formule. En déduire que

$$Y_t = \int_0^t \int_{z \in \mathbb{R}} z N(dr, dz)$$

pour une mesure aléatoire de Poisson N appropriée.

3. Si $\int_{\mathbb{R}} z^2 \nu(dz) < +\infty$, montrer que Y_t possède un moment d'ordre 2.
4. On suppose que l'on a une fonction $u : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $[0, T] \times \mathbb{R}$, avec dérivées bornées sur $[0, T] \times \mathbb{R}$, telle que

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \int_{\mathbb{R}} (u(t, x+z) - u(t, x)) \lambda \nu(dz)$$

avec condition initiale $u(0, x) = g(x)$. On fixe $t \in [0, T]$ et $x \in \mathbb{R}$. Le but est d'exprimer $u(t, x)$ en fonction du processus Y .

- (a) Montrer que le processus

$$Z_t = \int_0^t \int_{z \in \mathbb{R}} (u(t-r, x+Y_r+z) - u(t-r, x+Y_r)) \tilde{N}(dr, dz)$$

est intégrable et d'espérance nulle.

- (b) Montrer que l'on a :

$$u(t, x) = \mathbb{E}[g(x+Y_t)].$$

Indication : appliquer la formule d'Itô-Lévy à la fonction $(r, y) \mapsto u(t-r, y)$ et au processus d'Itô-Lévy $(r, x+Y_r)$,