

Examen de Processus à sauts

(Durée 2h00, aucun document autorisé, pas de calculatrice)

I] Exercice : (15 points) Soit $(P_t)_{t \geq 0}$ un processus de Poisson composé de paramètres (λ, μ_Z) (où λ dénote l'intensité et μ_Z la loi des sauts). On suppose de plus que

$$\int_{\mathbb{R}} z^2 \mu_Z(dz) < +\infty.$$

1. Calculer l'espérance de P_t , notée m_t , en fonction de (λ, ν_Z) .
2. Justifier que P puisse s'écrire sous la forme

$$P_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} z N(dr, dz)$$

où N est une mesure aléatoire de Poisson dont on précisera la mesure de Lévy ν .

3. On note

$$M_t = (P_t - m_t)^2 - \lambda t \int_{\mathbb{R}} z^2 \mu_Z(dz).$$

Montrer que le processus $(M_t)_{t \geq 0}$ est une martingale relativement à la filtration engendrée par $(P_t)_{t \geq 0}$.

II] Exercice : Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus de Lévy de triplet caractéristique (b, A, ν) (par rapport à la fonction de cut-off $f(z) = \mathbb{1}_{|z| \leq 1}$) tel que ν admet une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue :

$$f(z) = K_1 \frac{1}{c^2 + z^2} \mathbb{1}_{]-\infty, 0[}(z) + K_2 z^{\alpha-1} e^{-\lambda z^\alpha} \mathbb{1}_{]0, +\infty[}(z),$$

où $K_1, K_2, \lambda \geq 0$ et $c, \alpha > 0$ sont des constantes.

1. Déterminer à quelles conditions sur α et λ la mesure ν est bien une mesure de Lévy.
2. La variable aléatoire X_t pour $t > 0$ admet-elle un moment d'ordre 1 ?
3. Montrer que

$$\int_{|z| \leq 1} \nu(dz) = \int_{|z| \leq 1} f(z) dz < +\infty.$$

4. Montrer que X se décompose en

$$X_t = \gamma t + A^{1/2} B_t + Y_t$$

où $B = (B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien standard et $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson de mesure de Lévy ν , indépendant de B , avec $\gamma = b - \int_{|z| \leq 1} z \nu(dz)$.

5. Déterminer l'intensité et la loi des sauts du processus Y .
6. Montrer que Y s'écrit

$$Y_t = \sum_{k=1}^{N_t} Z_k$$

avec $N = (N_t)_{t \geq 0}$ processus de Poisson d'intensité calculée à la question précédente et les Z_i indépendantes et identiquement distribuées, dont on précisera la densité.

III] Exercice : Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus de Lévy de la forme

$$X_t = bt + \sigma B_t + \int_0^t \int_{z \in \mathbb{R}^*} z \tilde{N}(dr, dz)$$

où $b \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ sont des constantes, $B = (B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien standard et N une mesure aléatoire de Poisson indépendante de B d'intensité ν telle que $\nu(dz) = f(z)dz$, où f est une fonction continue à support compact inclus dans $] - 1; +\infty[$ (\tilde{N} désigne la mesure aléatoire de Poisson compensée).

On considère également, pour $S_0 \in \mathbb{R}_+$, la solution S de l'EDS

$$S_t = S_0 + \int_0^t S_{r-} dX_r$$

et on admettra que $S_t > 0$ pour tout $t \geq 0$.

1. Exprimer S_t en fonction de $b, B, \sigma, \tilde{N}, \nu$. (Indication : Appliquer la formule d'Itô pour exprimer $\ln(S_t)$.)
2. Montrer que pour $u \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$, l'espérance $\mathbb{E}[e^{uX_t}]$ est bien définie et peut s'écrire sous la forme

$$\mathbb{E}[e^{uX_t}] = e^{t\phi(u)}$$

où ϕ est une fonction que l'on déterminera.

3. Montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}$, le processus M^u défini par

$$M_t^u = \exp(uX_t - t\phi(u))$$

est une martingale adaptée à la filtration $\{\mathcal{F}_t; t \geq 0\}$ engendrée par X .

4. On définit une nouvelle mesure de probabilité \mathbb{Q}^u par

$$\frac{d\mathbb{Q}^u}{d\mathbb{P}} \Big|_{\mathcal{F}_t} = M_t^u$$

pour tout $0 \leq t \leq T$. Montrer que l'on peut trouver $u \in \mathbb{R}$ tel que S soit une martingale sous \mathbb{Q}^u .

5. Si S est utilisé pour modéliser l'évolution d'un actif risqué sur un marché financier, commentez les résultats obtenus.