Exercices sur les processus de Lévy.

On garde les notations données dans le cours.

Exercice 1 : Soit X un processus de Poisson composé cadlag et N sa mesure aléatoire de Poisson associée. Montrer que l'on a

$$X_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}/\{0\}} z\, N(dr, dz).$$

Exercice 2 : Soient N et P deux processus de Poisson indépendants d'intensités respectives λ et γ. Montrer que le processus

$$X_t = N_t - N'_t$$

est un processus de Poisson composé dont on précisera l'intensité ainsi que la loi des sauts.

Exercice 3 : Soit P un processus de Poisson et $(Z_n)_n$ une suite de va iid. On définit le processus de Poisson composé

$$X_t = \sum_{k=1}^{P_t} Z_k.$$

Soit N sa mesure aléatoire de Poisson associée et f une fonction borélienne bornée sur $\mathbb{R}$. On définit le processus

$$Y_t = \sum_{k=1}^{P_t} f(Z_k).$$

Montrer que Y est un processus de Poisson composé et

$$Y_t = \int_0^t \int_{z \in \mathbb{R}^*} f(z)\, N(dr, dz).$$

Exercice 4 : Montrer que si X est un processus de Lévy avec des sauts bornés alors

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}[|X_t|^m] < +\infty.$$

Exercice 5 : Soit X un processus de Poisson composé cadlag à valeurs réelles d'intensité $\lambda > 0$ et de loi de sauts μ_Z. Soit F un borélien de $\mathbb{R}$ et

$$T_F = \inf\{t > 0; X_t \in F\} \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

On définit également la fonction $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$u(x) = \mathbb{E}[h(X_{T_F}) 1\!\!1_{T_F < \infty} | X_0 = x]$$

où h est une application bornée de F dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que T_F est un temps d'arrêt.
2. Montrer que u satisfait l'équation :

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}} \big[u(x+z) - u(x)\big]\mu_Z(dz) = 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus F \\ u(x) = h(x) & \text{si } x \in F \end{cases}.$$

(Indication : il faut conditionner par rapport au premier temps de saut.)

Exercice 6 : Soit X un processus de Lévy de la forme

$$X_t = bt + \int_0^t \int_{z \in \mathbb{R}^*} H(r,z)\, \widetilde{N}(dr,dz)$$

où $H : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ est un processus déterministe (ne dépend pas de ω) tel que

$$\forall t \geq 0, \quad \int_0^t \int_{\mathbb{R}^*} |H(r,z)|^2 dr \nu(dz) < +\infty.$$

1. Ecrire le processus X sous la forme

$$X_t = \int_0^t \overline{b}(r)\, dr + \int_0^t \int_{|z|<1} F(r,z)\, \widetilde{N}(dr,dz) + \int_0^t \int_{|z|\geq 1} G(r,z)\, N(dr,dz)$$

où $\overline{b}, F, G$ sont à déterminer.

2. A l'aide de la formule d'Itô, montrer que

$$\begin{aligned} e^{iuX_t} =& 1 + \int_0^t biue^{iuX_{r-}}\, dr + \int_0^t \int_{z\in\mathbb{R}^*} \Big[e^{iuX_{r-}+iuH(r,z)} - e^{iuX_{r-}}\Big]\, \widetilde{N}(dr,dz) \\ &+ \int_0^t \int_{z\in\mathbb{R}^*} \Big[e^{iuX_{r-}+iuH(r,z)} - e^{iuX_{r-}} - iuH(r,z)e^{iuX_{r-}}\Big]\, dr\nu(dz). \end{aligned}$$

3. Donner une condition sur b, H pour que le processus $t \mapsto e^{iuX_t}$ soit une martingale. Donner alors une condition sur H pour que la martingale soit bornée dans L^2.
4. Dans cette question, on ne suppose pas que $t \mapsto e^{iuX_t}$ soit une martingale. A l'aide de la question 2, montrer que

$$\mathbb{E}[e^{iuX_t}] = \exp\Big[iubt + \int_0^t \int_{z\in\mathbb{R}^*} \big(e^{iuH(r,z)} - 1 - iuH(r,z)\big)\, dr\Big].$$

Exercice 7 : Soit X un processus de Lévy tel que

$$\int_{|z|\geq 1} |z|^2 \nu(dz) < +\infty.$$

On définit

$$X_t^{(2)} = \sum_{0\leq s\leq t} (\triangle X_s)^2$$

et
$$Y_t^{(2)} = X_t^{(2)} - \mathbb{E}[X_t^{(2)}].$$
Montrer que $Y^{(2)}$ est une martingale.

Correction exo 5 : Dans le cas où $x \notin F$, on utilise la propriété de Markov forte.

Rappel sur l'utilisation du théorème de Markov : soit F une fonction mesurable des trajectoires de X, c'est-à-dire une fonction $F : D(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ où $D(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ représente l'ensemble des fonctions $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ à trajectoires cadlag (ainsi x_t représente la valeur de la fonction x à l'instant $t \in \mathbb{R}_+$). Par exemple, si $x \in D(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, F peut être donnée par
$$F(x) = f(x_t), \quad F(x) = \sup_{s\in[0,t]} x_s, \quad F(x) = \int_0^t \varphi(x_r)\, dr, \quad F(x) = \inf\{t > 0, x_t \in F\}.$$

Si T est un temps d'arrêt, on a (th de Markov fort) :
$$\mathbb{E}[F(X_{\cdot+T})\mathbb{1}_{\{T<+\infty\}}|\mathcal{F}_T] = \mathbb{1}_{\{T<+\infty\}}\mathbb{E}[F(X_t)|X_0 = X_T]$$
où $F(X_{\cdot+T})$ représente la fonction F appliquée au processus $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto X_{t+T}$. Ceci vient du fait que, sur $T < +\infty$, le processus $(X_{t+T} - X_T)_{t\geq 0}$ est un processus de Lévy de même loi que le processus X et est indépendant de $\mathcal{F}_T$. En effet, par indépendance
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[F(X_{\cdot+T})\mathbb{1}_{\{T<+\infty\}}|\mathcal{F}_T] &= \mathbb{1}_{\{T<+\infty\}}\mathbb{E}[F(X_{\cdot+T} - X_T + X_T)|\mathcal{F}_T] \\ &= \mathbb{1}_{\{T<+\infty\}}G(X_T)\end{aligned}$$
où la fonction G est donnée par $G(x) = \mathbb{E}[F(X_{\cdot+T} - X_T + x)]$. On remarque que le processus $x + X_{\cdot+T} - X_T$ est bien un processus de Lévy de même loi que X à la différence qu'il part du point x à l'instant $t = 0$, d'où la notation $G(X_T) = \mathbb{E}[F(X_t)|X_0 = X_T]$.

Si on veut l'appliquer dans l'exo 6, il faut poser pour $x \in D(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$
$$\begin{aligned}T_1(x) &= \inf\{t > 0, x_t - x_{t-} \neq 0\} \\ R_F(x) &= \inf\{t > 0, x_t \in F\} \\ F(x) &= h(x_{R_F(x)})\mathbb{1}_{R_F(x)<+\infty}.\end{aligned}$$
Il suffit alors d'appliquer les calculs précédents. On remarque pour cela que $\mathbb{1}_{\{T_1<+\infty\}} = 1$ (car $\lambda > 0$) et que
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[h(X_{T_F})\mathbb{1}_{\{T_F<+\infty\}}|\mathcal{F}_{T_1}] =&\mathbb{E}[F(X_{\cdot+T_1})\mathbb{1}_{\{R_F(X_{\cdot+T_1})<+\infty\}}\mathbb{1}_{\{T_1<+\infty\}}|\mathcal{F}_{T_1}] \\ =&\mathbb{1}_{\{T_1<+\infty\}}\mathbb{E}[F(X)\mathbb{1}_{\{R_F(X)<+\infty\}}|X_0 = X_{T_1}] \\ =&\mathbb{E}[F(X)\mathbb{1}_{\{R_F(X)<+\infty\}}|X_0 = X_{T_1}] \\ =&\mathbb{E}[h(X_{T_F})\mathbb{1}_{\{T_F<+\infty\}}|X_0 = X_{T_1}]\end{aligned}$$

D'où
$$\begin{aligned}u(x) =&\mathbb{E}[h(X_{T_F})\mathbb{1}_{\{T_F<+\infty\}}|X_0 = x] \\ =&\mathbb{E}[\mathbb{E}[h(X_{T_F})\mathbb{1}_{\{T_F<+\infty\}}|\mathcal{F}_{T_1}]|X_0 = x] \\ =&\mathbb{E}[\mathbb{E}[h(X_{T_F})\mathbb{1}_{\{T_F<+\infty\}}|X_0 = X_{T_1}]|X_0 = x] \\ =&\mathbb{E}[\mathbb{E}[h(X_{T_F})\mathbb{1}_{\{T_F<+\infty\}}|X_0 = x + Z]] \\ =&\mathbb{E}[u(x + Z)] \\ =&\int u(x + z)\, d\mu_Z(z)\end{aligned}$$