

Examen de Processus à sauts

(Durée 2h00, aucun document autorisé, pas de calculatrice)

Problème : (15 points) Soit $(P_t)_{t \geq 0} \geq 0$ un processus de Poisson composé de paramètres (λ, μ_Z) (où $\lambda > 0$ dénote l'intensité et μ_Z la loi des sauts). On suppose de plus que, pour un certain $p \in [0, 1]$,

$$\mu_Z(dz) = p\delta_1(dz) + (1-p)\delta_{-1}(dz),$$

c'est-à-dire que le processus n'effectue que des sauts de taille ± 1 . On note $(\mathcal{F}_t)_t$ la filtration engendrée par P .

Partie I : Loi des grands nombres :

1. (a) Montrer que pour tout $t \geq 0$, P_t est intégrable et calculer $\mathbb{E}[P_t]$.
- (b) En déduire que l'on a

$$\mathbb{P} - \text{presque sûrement, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{n} = \lambda(2p - 1).$$

2. (a) Justifier que l'on peut écrire P comme

$$P_t = \int_0^t \int_{z \in \mathbb{R}^*} z N(dr, dz)$$

où N est une mesure aléatoire de Poisson dont on précisera le compensateur.

- (b) A l'aide de la formule d'Itô, montrer que

$$M_t = (P_t - \lambda t(2p - 1))^2 - \lambda t$$

est une martingale \mathcal{F}_t -adaptée.

- (c) En déduire que

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, 1[} |P_t|^2 \right] < +\infty.$$

3. (a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [n, n + 1[$ on a :

$$\left| \frac{P_t}{t} - \lambda(2p - 1) \right| \leq \left| \frac{P_n}{n} - \lambda(2p - 1) \right| + \sup_{t \in [n, n+1[} \left| \frac{P_t - P_n}{n} \right|$$

- (b) Vérifier que les variables aléatoires $X_n = \sup_{t \in [n, n+1[} |P_t - P_n|^2$ sont identiquement distribuées et $\mathbb{E}[X_n] < +\infty$ pour tout $n \geq 0$.
- (c) En déduire que la série $\sum_n \frac{X_n}{n^2}$ converge, puis que $\frac{X_n}{n} \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$ presque sûrement.

(d) Montrer que l'on a

$$\mathbb{P} - \text{presque sûrement, } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{P_t}{t} = \lambda(2p - 1).$$

Partie II : Temps d'atteinte :

1. Justifier que le processus P ne prend que des valeurs entières.
2. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$\tau^m = \inf\{t > 0; P_t \geq m\}.$$

- (a) Montrer que τ^m est un temps d'arrêt.
- (b) Montrer que, sur $\{\tau^m < +\infty\}$, on a $P_{\tau^m} = m$.
- (c) Montrer que si $p > 1/2$, on a $\tau^m < +\infty$ presque sûrement.

3. Pour $u \in \mathbb{R}$, on pose

$$\forall t \geq 0, \quad M_t^u = \exp(uP_t - t\phi(u)),$$

où

$$\phi(u) = \int_{\mathbb{R}} (e^{uz} - 1) \lambda \mu_Z(dz).$$

- (a) Justifier que $\phi(u)$ est bien défini pour tout $u \in \mathbb{R}$ et est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .
- (b) Montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}$, M^u est une \mathcal{F}_t -martingale.
4. Dans cette question, on suppose $p \geq 1/2$.
 - (a) Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\phi(u) > 0$ pour $u \in]0, \delta[$.
 - (b) Montrer que, pour $u \in]0, \delta[$, on a :

$$\mathbb{E} \left[e^{-\tau^m \phi(u)} \mathbb{1}_{\{\tau^m < +\infty\}} \right] = e^{-um}.$$

(Penser à utiliser le théorème d'arrêt de Doob).

- (c) En déduire que

$$\mathbb{P}(\tau^m < +\infty) = 1,$$

et en déduire la valeur de $\mathbb{E}[\tau^m]$.

5. Dans cette question, on suppose $0 < p < 1/2$.
 - (a) Trouver un $\delta > 0$ tel que $\phi(u) > 0$ pour $u \in]\delta, +\infty[$ et $\phi(\delta) = 0$.
 - (b) Montrer que, pour $u \in]\delta, +\infty[$, on a :

$$\mathbb{E} \left[e^{-\tau^m \phi(u)} \mathbb{1}_{\{\tau^m < +\infty\}} \right] = e^{-um}.$$

- (c) En déduire que

$$\mathbb{P}(\tau^m < +\infty) = \left(\frac{p}{1-p} \right)^m.$$

Exercice : (5 points)

Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus de Lévy de triplet caractéristique $(b, 0, \nu)$ (caractéristique donnée par rapport à la fonction de cut-off $f(z) = z \mathbb{1}_{|z| \leq 1}$). On suppose que

$$\int_{|z| \leq 1} |z| \nu(dz) < +\infty.$$

L'objectif est de montrer que X est presque sûrement à variations bornées sur un intervalle de la forme $[0, T]$. On rappelle qu'une fonction $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ est à variations bornées si

$$\sup \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| < +\infty$$

où le sup est pris sur toutes les partitions finies $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ de l'intervalle $[0, T]$.

1. Montrer que X peut s'écrire sous la forme

$$X_t = \left(b - \int_{|z| \leq 1} |z| \nu(dz)\right)t + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^*} z N(dr, dz)$$

où N est une mesure aléatoire de Poisson de mesure de Lévy associée ν .

2. Justifier le fait qu'il suffise de montrer que, presque sûrement, le processus

$$Y_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^*} z N(dr, dz)$$

est à variations bornées sur $[0, T]$.

3. On pose

$$Y_t^1 = \int_0^t \int_{|z| \leq 1} z N(dr, dz) \quad \text{et} \quad Y_t^2 = \int_0^t \int_{|z| > 1} z N(dr, dz).$$

- (a) Montrer que, presque sûrement, le processus Y^2 est à variations bornées sur $[0, T]$. (Indic : combien peut-il avoir de sauts sur $[0, T]$?)

- (b) Pour toute partition $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ de l'intervalle $[0, T]$, montrer que l'on a :

$$\sum_{i=1}^n |Y_{t_i}^1 - Y_{t_{i-1}}^1| \leq \int_0^T \int_{|z| \leq 1} |z| N(dr, dz).$$

4. Conclure.