MP
Intégration

Exercice 1:
Soit $f : [1;+\infty[\to]0;+\infty[$ continue telle que $\frac{f(x+1)}{f(x)} \xrightarrow[x\to\infty]{} l \in [0;1[$. Montrer que f est intégrable sur $[1;+\infty[$.

Exercice 2:

1. Montrer: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n\,dt$.
2. Montrer: $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n\,dt \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^{\infty} e^{-t^2}\,dt$.
3. On rappelle (formule de Wallis):
$$\int_0^{\pi/2} \sin^p(x)\,dx \sim_{p\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2p}}.$$
Retrouver ainsi la valeur de l'intégrale de Gauss:
$$\int_0^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}/2.$$

Exercice 3:
Montrer:
$$a) \int_0^n \sqrt{1+\left(1-\frac{x}{n}\right)^n} \sim_{n\infty} n, \quad b) \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^4+1)(x^2+a^2)} \sim_{a\to\infty} \frac{\pi\sqrt{2}}{4a^2}$$
$$c) \int_1^{1+\frac{1}{n}} \sqrt{1+x^n}\,dx \sim_{n\infty} \frac{C}{n} \quad (C \in \mathbb{R}^*).$$