MP
Equations différentielles

Exercice 1:
Résoudre le système différentiel

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & -x+y+z-1 \\ y' & = & x-y+z-1 \\ z' & = & x+y-z-1 \end{array}\right.$$

d'inconnues $x, y, z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Exercice 2:
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$, $det(\exp(A)) = \exp(Tr(A))$.
2. En déduire que $\exp(M_n(\mathbb{C})) \subset GL_n(\mathbb{C})$.

Exercice 3:
Résoudre le système différentiel

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & 5x-3y-4z \\ y' & = & -x+y-2z \\ z' & = & x-3y \end{array}\right.$$

d'inconnues $x, y, z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Exercice 4:
Soit y la solution maximale de $y' = \frac{1+x^2}{1+x^2+y^2}$. Montrer que l'intervalle de définition de y n'est pas majoré et que $y(x) \underset{x\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Exercice 5:
Résoudre l'ED suivante et tracer les courbes intégrales:

$$y'\sqrt{1+x^2} + 3y - y^2 - 2 = 0$$

Exercice 6:
Résoudre l'ED suivante et tracer les courbes intégrales:

$$y' - \frac{y}{x} + y^2 + \frac{1}{x^2} = 0, x > 0$$

Exercice 7:
On considère le problème de Cauchy $y' = 1 + x^2y^2, y(0) = 0$ où y est à valeurs réelles.

- Montrer qu'il existe une solution maximale et une seule, notée f.
- Montrer que $Def(f) =]-a, a[$ et que f est impaire.
- Tracer l'allure de la courbe représentative de f.