MP
Normes et EVN

Exercice 1:
On note l^∞ l'evn formé des suites réelles bornées $x = (x_n)_n$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ définie par $\|x\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}$ et on considère l'opérateur de différence $\Delta : l^\infty \to l^\infty$ définie par $\Delta(x) = y$ où $y = (y_n)_n$ est définie par:

$$\forall n \in \mathbb{N}, y_n = x_{n+1} - x_n.$$

Montrer que $\Delta \in LC(l^\infty; l^\infty)$, et calculer sa norme d'opérateur.

Exercice 2:
On considère sur $\mathbb{R}[X]$ la norme N définie par: $\forall P \in \mathbb{R}[X], N(P) = \sup_{t\in[0;1]} |P(t)|$.
On note $D : \mathbb{R}[X] \to R[X]$ l'opérateur de dérivation définie par $D(P) = P'$.

1. Vérifier que N est bien une norme.
2. Montrer que la restriction de D à l'evn $(\mathbb{R}_n[X], N)$ est linéaire continue.
3. L'application D définie sur $\mathbb{R}[X]$ est-elle continue?

Exercice 3:
On considère l'evn $M_n(\mathbb{R})$ muni d'une norme quelconque.

1. Montrer que l'application $det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est continue.
2. En déduire que $GL_n(\mathbb{R})$ est ouvert dans $M_n(\mathbb{R})$.
3. En considérant les racines du polynôme $P(t) = det(M - tId)$, montrer, construire pour toute matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ une suite de $GL_n(\mathbb{R})$ qui converge vers M. En déduire que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense de $M_n(\mathbb{R})$ pour toute norme sur $M_n(\mathbb{R})$.