MP
Fonctions de plusieurs variables

Exercice 1:

1. Montrer que l'application $\Phi : U =]0;\pi/2[\times]0;+\infty[\to (\mathbb{R}_+^*)^2$ définie par $\Phi(\theta,\rho) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ est un C^1-difféomorphisme.
2. En déduire que l'application $f \mapsto \Phi f\circ$ est une bijection de $C^1((\mathbb{R}_+^*)^2;\mathbb{R})$ sur $C^1(U;\mathbb{R})$.
3. Montrer que $f \in C^1((\mathbb{R}_+^*)^2;\mathbb{R})$ est solution de l'équation
$$(E)\ \forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
si et seulement si $g = f\circ\Phi$ est solution de l'équation
$$\forall (\theta,\rho) \in U, \frac{\partial g}{\partial \rho}(\theta,\rho) = \frac{\cos\theta}{\rho}.$$
4. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 2:
Déterminer les extremums locaux et globaux des applications suivantes:

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + x^3$
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = (x^2+y^2-8)(x^2+y^2)$

Exercice 3:
Déterminer les extremas locaux de l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par:

1. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + x^3$.
2. $f(x,y) = \sin^2 x - \sinh^2 y$

Exercice 4:
Soient $n,p \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_p : \begin{array}{ccc} \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ M & \mapsto & \mathrm{trace}(M^p) \end{array}$. Montrer que φ_p est de classe C^1 et calculer sa différentielle en tout point.

Exercice 5:
On note $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x < y\}$. Trouver toutes les applications $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U telles que: $\forall (x,y) \in U$
$$x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - y^2$$

Exercice 6:

1. Montrer que l'application $\Phi : U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ définie par $\Phi(x,y) = (x, \frac{y}{x})$ est un C^2-difféomorphisme et calculer sa réciproque.

2. Montrer que $f \in C^1(U;\mathbb{R})$ est solution de l'équation

$$(E)\ \forall (x,y) \in U, x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

si et seulement si $g = f \circ \Phi$ est solution de l'équation

$$\forall (u,v) \in U, \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = 0.$$

3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).