MP
Séries de Fourier

Exercice 1:
Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & |\cos t| \end{array}$.

1. Vérifier que f est continue et π-périodique et calculer ses coefficients de Fourier.
2. Etudier la convergence de la série de Fourier de f.
3. En déduire les sommes de série suivantes:
   $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}.$

Exercice 2:
Soit $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$, $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodique telle que $\forall t \in [-\pi; \pi]$, $f_\alpha(t) = \cos(\alpha t)$.

1. Vérifier que f_α est continue par morceaux et calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de f_α.
2. Etudier la convergence de la série de Fourier de f_α.
3. En déduire $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{\pi^2 n^2 - x^2} = \frac{1}{x} - \operatorname{cotan} x.$

Exercice 3:
Soit $f : [0; 2\pi] \to \mathbb{C}$ de classe C^1 par morceaux et telle que $\int_0^{2\pi} f = 0$. Montrer:
$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, dt \leq \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 \, dt,$
et étudier le cas d'égalité.