MP
Géométrie de l'espace et du plan.

Exercice 1:
Montrer qu'il n'est pas possible que les trois sommets d'un triangle équilatéral, non réduit à un point, aient des coordonnées entières.

Exercice 2:
Dans un repère orthonormé direct on donne les plans d'équations

$$P : x + y = 1, \quad Q : y + z = 1, \quad R : x + z = 1, \quad S : x + 3y + z = 0$$

et le point $A(1, 1, \lambda)$. Donner une CNS sur λ pour que les projetés orthogonaux de A sur chacun des plans soient coplanaires.

Exercice 3:
Soient C, C' deux cercles, $M \in C, M' \in C', T$ (resp T') la tangente en M (resp M') à C (resp C'). Déterminer le lieu du milieu I de MM' sachant $T \perp T'$.

Exercice 4:(ENSI Chimie P 93)
Dans $\mathbb{R}^3$, trouver les coordonnées des projetés du point $C(3, 4, -2)$ sur les droites définies par les équations:

$$D_1 : \frac{x-5}{13} = \frac{y-1}{6} = \frac{z+3}{-4}$$

$$D_2 : \frac{x-2}{13} = y - 3 = \frac{z-3}{-4}$$

Question de cours: Invariance du déterminant de deux vecteurs du plan par changement de base orthonormée.

Exercice 5:
Soient $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1; 0; 1\}$, A, A', M, M', P les points d'affixes respectives $1, -1, z, \frac{1}{z}, \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.
Démontrer que la droite (MM') est bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PA'})$.

Exercice 6:

- Montrer: $\forall (\alpha, \beta) \in (\mathbb{C}^*)^2, \quad |\alpha - \beta| = |\alpha||\beta| \left| \frac{\alpha}{|\alpha|^2} - \frac{\beta}{|\beta|^2} \right|$.
- En déduire: $\forall (x, y, z) \in \mathbb{C}^3, \quad |y||x - z| \leq |z||x - y| + |x||y - z|$.
- Etablir, pour tous points A, B, C, D du plan euclidien, l'inégalité de Ptolémée:

$$AB \cdot CD \leq AC \cdot BD + AD \cdot BC$$

Exercice 7:(surface de Sartiaux)
Former l'équation cartésienne du lieu d'un point M de l'espace $\mathbb{R}^3$ tel que les projections orthogonales de M sur les trois plans de coordonnées et sur le plan d'équation $x + y + z = 1$ soient coplanaires.

Exercice 8:
Former une équation cartésienne de la sphère tangente en $A(1, 2, 1)$ à la droite D

d'équations $\left\{ \begin{array}{l} x+y-2z=1 \\ 2x-y-3z=-3 \end{array} \right.$ et tangente en $A'(1,-1,-2)$ à la droite D' d'équations $\left\{ \begin{array}{l} 2x+y+2z=-3 \\ x-y-z=4 \end{array} \right.$.

Exercice 9:
Soient $(a,b,c) \in (\mathbb{R}^*)^3$. Former un système d'équations cartésiennes du cercle passant par $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$ et $C(0,0,c)$.

Exercice 10:
Former l'équation cartésienne d'un point M de $\mathbb{R}^3$ tel que le symétrique M' de M par rapport au plan $(P) : x+y-2z+1=0$ définisse avec les points $A(1,2,-1)$ et $B(-1,2,3)$ un triangle équilatéral.

Exercice 11:
Soit D une droite de $\mathbb{R}^3$ passant par O et distincte des axes de coordonnées. Montrer que les symétriques respectifs des plans $(D,(xx'))$, $(D,(yy'))$ et $(D,(zz'))$ par rapport aux plans d'équations $y=z, z=x, x=y$ contiennent une même droite.