

# MP

## Espaces préhilbertiens

### Exercice 1:

Soient  $E$  un espace préhilbertien réel et  $p$  un projecteur de  $E$ . Montrer:

$$\text{Ker}(p) \subset \text{Im}(p)^\perp \Leftrightarrow \forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$$

### Exercice 2:

On munit  $M_n(\mathbb{R})$  de son produit scalaire canonique. Montrer que l'ensemble des matrices symétriques réelles et celui des matrices antisymétriques réelles sont en somme directe orthogonale.

En déduire la valeur de  $\inf_{M \in S_n(\mathbb{R})} \|A - M\|$  où  $A \in M_n(\mathbb{R})$  et  $\|\cdot\|$  désigne la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique sur  $M_n(\mathbb{R})$ .

### Exercice 3:

Calculer  $\inf_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \int_0^1 (x^3 - a - bx - cx^2)^2 dx$ .