MP
Suites et séries d'applications

Exercice 1:
Soit $(f_n)_n$ une suite d'applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f. On suppose que $\forall n, \lim\limits_{x\to\pm\infty} f_n(x) = 0$.
Montrer que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$

Exercice 2:
Etudier la convergence simple et uniforme des séries d'applications suivantes:

$$a) \quad f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{x}{n(1+nx^2)}$$
$$b) \quad f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = xe^{-n^2x^2}$$
$$c) \quad f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = (-1)^n \frac{n}{n^2+x}$$

Exercice 3:
Etudier (convergence simple et uniforme) les suites d'applications suivantes:
$a) f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ $\quad b) f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{nx^3}{1+nx^2}$
$c) f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = xe^{x/n}$ $\quad d) f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{nx^3}{1+nx^2}$

Exercice 4:
Montrer la convergence et calculer la somme de la série suivante: $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(nx)}{2^n \cos^n(x)}$
pour $x \in \mathbb{R}$ tel que $|2\cos(x)| > 1$.

Exercice 5:
Soit $u_n = \displaystyle\sum_{1\leq p,q\leq n} \frac{pq}{p+q}$.
a) Montrer que
$$u_{n+1} - u_n \overset{n\infty}{\sim} 2(1-\ln 2)n^2.$$
b)En déduire la partie principale (dans l'échelle des n^α) de u_n.

Exercice 6:

1. Montrer $\xi(x) - 1 \sim_{x\infty} 2^{-x}$.
2. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on note $I(x) = \int_1^\infty \frac{t-E(t)}{t^{x+1}}\, dt$.
   Montrer $\forall x \in]1; +\infty[, \xi(x) = \frac{x}{x-1} - xI(x)$.
   En déduire $\xi(x) \sim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}$.

Exercice 7:
Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{2\pi} \frac{e^{in\theta}}{1-2e^{i\theta}}\, d\theta$.

Exercice 8:
Montrer: $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} \int_0^x t^n e^{-t}\, dt = x$.

Exercice 9:
Montrer $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2+x^2} \sim_{x\infty} \frac{\pi}{2x}$.