MP
Séries entières

Exercice 1:
Calculer le rayon de convergence R et la somme des SE suivantes:
$a)\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{\cos(n\theta)}{n}z^n$ et $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{\sin(n\theta)}{n}z^n$, $\quad b)(\arcsin(x))^2$

Exercice 2:
Déterminer le rayon de convergence des SE suivantes:
$a)\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{2^n}{3^n+n}z^{4n}$, $\quad b)\sum\limits_{n\geq 0}\tan(\pi\sqrt{n^2+3n+2})z^n$, $\quad c)\sum\limits_{n\geq 2}\left(\ln\dfrac{(-1)^n+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right)z^n$

Exercice 3:
Soient $\sum_{n\geq 0}a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0}b_n z^n$ deux séries entières telles que:
$\forall n, b_n \in \mathbb{R}_+^*$, $\quad \sum_{n\geq 0}b_n$ diverge, , $\quad \sum_{n\geq 0}b_n z^n$ est de rayon 1 et
$\frac{a_n}{b_n}\xrightarrow[n\to\infty]{} l\in\mathbb{C}$.

1. Montrer que le rayon de $\sum_{n\geq 0}a_n z^n$ est ≥ 1.

2. Montrer que $\sum\limits_{n\geq 0}b_n x^n \xrightarrow[x\to 1^-]{x\in\mathbb{R}} +\infty$.

3. En déduire que $\dfrac{\sum_{n\geq 0}a_n x^n}{\sum_{n\geq 0}b_n x^n}\xrightarrow[x\to 1^-]{x\in\mathbb{R}} l$.

Exercice 4:
Calculer le rayon de la série entière $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\right)x^n$.