MP
Séries numériques

Exercice 1:
Etudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ selon les valeurs de α et β.

Exercice 2:
Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ telle que l'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty |f'(t)|\, dt$ converge.

a) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} f(n) = \int_1^N f(t)\, dt + \int_1^N [t] f'(t)\, dt$ où $[t] = t - E(t)$.

b) En déduire que $\int_1^\infty f(t)\, dt$ et $\sum_{n\geq 1} f(n)$ sont de même nature.

c) En déduire la nature des séries $\displaystyle\sum \frac{\cos(\ln n)}{n}$ et $\sum \frac{\sin(\sqrt{n})}{n}$.

Exercice 3:
Nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 3} \frac{(-1)^n}{\ln n + (-1)^n}$.

Exercice 4:
Déterminer la nature de la série de terme général:
$a)\ln \frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}$ $\qquad$ $b)(\ln n)^{-\sqrt{n}}$

Exercice 5:
Montrer la convergence et calculer la somme de la série suivante: $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(nx)}{2^n \cos^n(x)}$
pour $x \in \mathbb{R}$ tel que $|2\cos(x)| > 1$.

Exercice 6:
Soit $u_n = \displaystyle\sum_{1\leq p,q\leq n} \frac{pq}{p+q}$.

a) Montrer que $u_{n+1} - u_n \sim n\infty 2(1 - \ln 2)n^2$.

b)En déduire la partie principale (dans l'échelle des n^α) de u_n.