MPSI-Applications

Exercice 1 :
Soient $f\colon E \to F$ et $g\colon E \to G$ deux applications. Montrer que :

$\exists h\colon F \to G$ telle que le diagramme suivant soit commutatif $\begin{array}{ccc} & g & \\ E & \longrightarrow & G \\ f\downarrow & \nearrow & \\ F & h & \end{array}$ (c'est-à-dire $g = h \circ f$) $\Longleftrightarrow \forall x, x' \in E\,, f(x) = f(x') \Rightarrow g(x) = g(x')$.

Exercice 2 :
Soient $g\colon E \to G$ et $h\colon F \to G$ deux applications. Montrer que :

$\exists f\colon E \to F$ telle que le diagramme suivant soit commutatif $\begin{array}{ccc} & g & \\ E & \longrightarrow & G \\ f\downarrow & \nearrow & \\ F & h & \end{array}$ (c'est-à-dire $g = h \circ f$) $\Longleftrightarrow \forall x \in E\,, \exists y \in F$ tel que $g(x) = h(y)$.

Exercice 3 :
Soient E, F deux ensembles non vides et $f\colon E \to F$ une application. Montrer que :

- f injective $\Longleftrightarrow \exists h\colon F \to E$ surjective telle que $h \circ f = Id_E$.
- f surjective $\Longleftrightarrow \exists h\colon F \to E$ injective telle que $f \circ g = Id_F$.

Exercice 4 :
Soient E, F deux ensembles non vides. Montrer que les deux propriétés sont équivalentes :

- il existe une injection de E dans F.
- il existe une surjection de F dans E.

Exercice 5 :

Soient $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & 2x \end{array}$ et $g\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ y & \mapsto & \begin{cases} \frac{y}{2} & \text{si y pair} \\ \frac{y-1}{2} & \text{si y impair} \end{cases} \end{array}$.

- Etudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f et g.
- Préciser $g \circ f$ et $f \circ g$.

Exercice 6 :
Soient E, E' deux ensembles et $f\colon E \to E'$ une application. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

1. f est surjective
2. $\forall y \in E', f\left(f^{-1}(\{y\})\right) = \{y\}$
3. $\forall A' \in \mathcal{P}(E'), f(f^{-1}(A')) = A'$
4. $\forall A' \in \mathcal{P}(E'), f^{-1}(A') = \emptyset \Longrightarrow A' = \emptyset$

Exercice 7 :

Soient E un ensemble non vide, $A, B \in \mathcal{P}(E)$, et $f\colon \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \mapsto & (X \cap A\,; X \cap B) \end{array}$.
Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que f soit injective, surjective et bijective.

Exercice 8 :
Trouver une condition nécessaire et suffisante sur a pour que l'application

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (\arctan x)^2 + a \arctan x + 1 \end{array} \quad \text{soit injective.}$$

Exercice 9 :
Soient E, E' deux ensembles et $f : E \to E'$ une application.

1. Montrer : $\forall A', B' \in \mathcal{P}(E'),\ f^{-1}(A' \triangle B') = f^{-1}(A') \triangle f^{-1}(B')$.
2. Montrer : f est injective $\Longleftrightarrow \forall A, B \in \mathcal{P}(E),\ f(A \triangle B) = f(A) \triangle f(B)$.