MPSI
Anneaux et corps. Arithmétique

Exercice 1 :
Soit A un anneau intègre fini.

i) Soit $a \in A \setminus \{0_A\}$. Montrer que l'application φ_a définie par $\varphi_A : \begin{array}{ccc} A & \to & A \\ x & \mapsto & ax \end{array}$ est bijective.

ii) En déduire que A est un corps commutatif.

iii) En déduire que si $n \in \mathbb{N}^*$ est un nombre premier alors $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps commutatif.

Exercice 2 :
Soient $\alpha \in \mathbb{Q}_+^*$ tel que $\sqrt{\alpha} \notin \mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{\alpha}) = \left\{r + r'\sqrt{\alpha}; (r, r') \in \mathbb{Q}^2\right\}$.

i) Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{\alpha})$ est un corps pour les lois $+, .$ usuelles.

ii) Montrer que les anneaux $\mathbb{Q}^2$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{\alpha})$ ne sont pas isomorphes.

iii) Les corps $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ sont-ils isomorphes ?

Exercice 3 :
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $F_n = 2^{2^n} + 1$. Montrer que les F_n sont premiers entre eux deux à deux. (Indication : on pourra montrer que si $m < n$ alors F_m divise $F_n - 2$.

Exercice 4 :
Soit p un nombre premier .

i) Montrer : $\forall k \in \{1, \ldots, p-1\}, p | \mathrm{C}_p^k$.

ii) En déduire le petit théorème de Fermat : $\forall n \in \mathbb{Z}, n^p \equiv n\,[p]$

iii) En déduire : $\forall n \in \mathbb{Z},\ p \not| n \Rightarrow n^{p-1} \equiv 1\,[p]$

Exercice 5 :
Trouver le nombre de zéros dans l'écriture en base 5 de $1998!$.

Exercice 6 :
Montrer :

1. $\forall (n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2, n \wedge k = 1 \Rightarrow n | \mathrm{C}_n^k$
2. ii) $\forall n \in \mathbb{N}^*, n+1 | \mathrm{C}_{2n}^n$

Exercice 7 :

i) Vérifier que 442 et 495 sont premiers entre eux.

ii) Trouver tous les couples $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que : $442u + 495v = 1$

iii) résoudre l'équation $\overline{442}x = \overline{314}$ d'inconnue $x \in \mathbb{Z}/495\mathbb{Z}$.

Exercice 8 :

i Montrer en raisonnant par l'absurde qu'il existe une infinité de nombres premiers.

ii) Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 3 modulo 4.

Exercice 9 :
Déterminer les générateurs du groupe cyclique $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+), n \in \mathbb{N}^*$ et les diviseurs de zéros de l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,.), n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$

Exercice 10 :
Quel est le dernier chiffre de 7777^{7777} écrit en base 3.

Exercice 11 :
Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$:

1. $9x + 15y = 11$
2. 9x+15y=18

Exercice 12 :
Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}^*$ premiers entre eux deux à deux. Pour chaque i de $\{1,\dots,n\}$, on note

$$A_i = \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq i}} a_k.$$

Montrer que $A_1, \dots, A_n$ sont premiers entre eux dans leur ensemble.

Exercice 13 :
Soit p premier $\geq 5 n \in \mathbb{N}$. Montrer que p divise $\sum_{k=0}^{p-1}(n+k)^2$.