

# MPSI

## Nombres complexes

### Exercice 1:

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^4 + 6z^3 + 9z^2 + 100 = 0$ .

### Exercice 2:

1. Montrer que  $\sin \frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$ .
2. Déterminer l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $|z| = 2|z - i|$ .

### Exercice 3:

Soit  $ABC$  un triangle du plan affine euclidien. On construit, à l'extérieur de ce triangle, les trois triangles équilatéraux de base  $AB, BC, CA$ . Montrer que les centres de gravité de ces trois triangles forment un triangle équilatéral.

### Exercice 4:

$n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ , et  $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ . Montrer que  $\forall z \in \mathbb{C}, \prod_{k=1}^{n-1} (z - \omega^k) = \sum_{r=0}^{n-1} z^r$  et en déduire que  $\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$ .

### Exercice 5:

Soient  $A, B, C$  trois points du plan affine euclidien, d'affixes respectives  $a, b, c$ .

- a) Montrer que le triangle  $ABC$  est équilatéral direct si et seulement si

$$a + jb + j^2c = 0.$$

- b) Montrer que le triangle  $ABC$  est équilatéral si et seulement si

$$a^2 + b^2 + c^2 - (ab + ac + bc) = 0.$$

- c) Déterminer l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que les points  $i, z, iz$  forment un triangle équilatéral.

### Exercice 6:

Si  $M$  appartient au cercle de centre  $O$  et de rayon  $R$  passant par  $A$  et  $B$  distincts, alors  $\text{Angle}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{1}{2} \text{Angle}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ .

### Exercice 7:

Soit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ . Résoudre les équation d'inconnue  $z \in \mathbb{C}$ :

1.  $(z + i)^n = (z - i)^n$ .
2.  $|z| = \left| \frac{1}{z} \right| = |z - 1|$

### Exercice 8:

Montrer qu'il n'est pas possible que les trois sommets d'un triangle équilatéral, non réduit à un point, aient des coordonnées entières.

**Exercice 9:**

1. Montrer que  $\sin \frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$ .
2. Déterminer l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $|z| = 2|z - i|$ .

**Exercice 10:**

Soit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ . Résoudre les équation d'inconnue  $z \in \mathbb{C}$ :

1.  $(z + i)^n = (z - i)^n$ .
2.  $|z| = \left| \frac{1}{z} \right| = |z - 1|$

**Exercice 11:**

Pour  $(n, x) \in \mathbb{N} \times (\mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z})$  calculer les sommes

$$A_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx} \text{ et } B_n(x) = \sum_{k=0}^n A_k(x)$$

Cours : Linéarisation de  $\cos^n(x)$  et  $\sin^n(x)$ .

Exercice : Soit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ . Résoudre les équation d'inconnue  $z \in \mathbb{C}$ :

1.  $(z + i)^n = (z - i)^n$ .
2.  $|z| = \left| \frac{1}{z} \right| = |z - 1|$

Exercice : Soient  $A, B, C$  trois points du plan affine euclidien, d'affixes respectives  $a, b, c$ .

- (a) Montrer que le triangle  $ABC$  est équilatéral direct si et seulement si  $a + jb + j^2c = 0$ .
- b) Montrer que le triangle  $ABC$  est équilatéral si et seulement si  $a^2 + b^2 + c^2 - (ab + ac + bc) = 0$ .
- c) Déterminer l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que les points  $i, z, iz$  forment un triangle équilatéral.

Cours : Polynômes de Tchebychev.

Exercice : Soient  $A, B, C$  trois points du plan affine euclidien, d'affixes respectives  $a, b, c$ .

- (a) Montrer que le triangle  $ABC$  est équilatéral direct si et seulement si  $a + jb + j^2c = 0$ .
- b) Montrer que le triangle  $ABC$  est équilatéral si et seulement si  $a^2 + b^2 + c^2 - (ab + ac + bc) = 0$ .
- c) Déterminer l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que les points  $i, z, iz$  forment un triangle équilatéral.

Cours : Le groupe  $(\mathbb{U}_n, \cdot)$ . Générateurs de  $(\mathbb{U}_n, \cdot)$ , racines primitives  $n$ -ièmes de l'unité.

Exercice :

- Soit  $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ . Montrer que  $\mathbb{U}_p$  est inclus dans  $\mathbb{U}_q$  si et seulement si  $p$  divise  $q$ .

- Soient  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ , et  $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ . Montrer que  $\forall z \in \mathbb{C}, \prod_{k=1}^{n-1} (z - \omega^k) = \sum_{r=0}^{n-1} z^r$

et en déduire que  $\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$ .

Cours : Polynômes de Tchebychev.

Exercice :

1. Soit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ . On note pour tout  $k$  de  $\{0, \dots, n-1\}$ ,  $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ .

Calculer pour tout  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k^p$ .

2. Pour  $(n, x) \in \mathbb{N} \times (\mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z})$  calculer les sommes

$$A_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx} \text{ et } B_n(x) = \sum_{k=0}^n A_k(x)$$

Cours : Forme trigonométrique des nombres complexes, arguments, coordonnées polaires.

Exercice :

1. Montrer que  $\sin \frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$ .

2. Déterminer l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $|z| = 2|z - i|$ .

Cours : Le groupe  $(\mathbb{U}_n, \cdot)$ . Générateurs de  $(\mathbb{U}_n, \cdot)$ , racines primitives  $n$ -ièmes de l'unité.

Exercice :

1. Résoudre l'équation d'inconnue  $z \in \mathbb{C}$ :  $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 + \frac{z+i}{z-i} + 1 = 0$

2. Soit  $(n, z) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{C}$  tel que  $z^n = (z+1)^n = 1$ . Montrer que  $n$  est un multiple de 6 et que  $z^3 = 1$ .

Cours : Polynômes de Tchebychev.

Exercice : On note  $T_n$  le n-ième polynôme de Tchebychev.

- a) Montrer que  $T_n$  admet  $n$  zéros deux à deux distincts. Les déterminer.
- b) Montrer que  $T_n$  vérifie la relation de récurrence linéaire suivante :

$$T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X)$$

- c) En déduire le coefficient dominant de  $T_n(X)$ .
- d) Exemple : calculer  $T_5(X)$ .

Cours : Linéarisation de  $\cos^n(x)$  et  $\sin^n(x)$ .

Exercice : Soit  $(n, a) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$ . Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $(z + 1)^n = e^{2nia}$  d'inconnue  $z$ .

En déduire la valeur de  $\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)$ .

Cours : Le groupe  $(\mathbb{U}_n, \cdot)$ . Générateurs de  $(\mathbb{U}_n, \cdot)$ , racines primitives n-ièmes de l'unité.

Exercice :

- a) Soient  $t \in \mathbb{R}$  et  $z_1, z_2$  les racines complexes de l'équation  $z^2 + tz + 1 = 0$ . Quel est le lieu des images de  $z_1$  et  $z_2$  lorsque  $t$  décrit  $\mathbb{R}$  ?
- b) Déterminer l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  dans chacun des cas suivants :

- $\frac{z - 1 - i}{z + 1} \in \mathbb{R}$       et      • les points d'affixe  $z, z^2, z^5$  sont alignés