MPSI-Théorie des ensembles

Exercice 1 :
Soient E, E' deux ensembles et $f\colon E \to E'$ une application. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

1. f est surjective
2. $\forall y \in E', f\left(f^{-1}(\{y\})\right) = \{y\}$
3. $\forall A' \in \mathcal{P}(E'), f(f^{-1}(A')) = A'$
4. $\forall A' \in \mathcal{P}(E'), f^{-1}(A') = \emptyset \Longrightarrow A' = \emptyset$

Exercice 2 :
Soit E un ensemble non vide. Montrer qu'il n'existe pas de surjection de E sur $\mathcal{P}(E)$. (On pourra raisonner par l'absurde en supposant qu'une telle application $\varphi\colon E \to \mathcal{P}(E)$ existe et on pourra alors considérer le sous-ensemble A de E :

$$A = \{x \in E\,;\, x \notin \varphi(x)\}).$$

Exercice 3 :
Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{R}$ par : $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer la classe de x modulo $\mathcal{R}$.

Exercice 4 :
Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{R}$ par : $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xe^y = ye^x$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, préciser le nombre d'éléments de la classe de x modulo $\mathcal{R}$.

Exercice 5 :
Soient E, F deux ensembles et $f\colon E \to F$ une application. On définit une relation sur E par : $\forall x, x' \in E,\ x\mathcal{R}_f x' \Leftrightarrow f(x) = f(x')$.

1. Montrer que $\mathcal{R}_f$ est une relation d'équivalence sur E.
2. On note $i\colon f(E) \to F$ l'injection canonique et $p\colon E \to E/\mathcal{R}_f$ la surjection canonique. Montrer qu' il existe une unique application $\hat{f}\colon E/\mathcal{R}_f \to f(E)$ telle que $f = i \circ \hat{f} \circ p$ et que $\hat{f}$ est bijective.
3. Etude d'un exemple : calculer $\widehat{E}$ pour $E\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & E(x) \end{array}$ où $E(x)$ désigne la partie entière de x.

Exercice 6 :
Soient $(E, \leq)$ un ensemble ordonné, A, B deux parties de E telles que $A \subset B$. Montrer que si A et B admettent des bornes supérieures dans E, alors $\sup_E(A) \leq \sup_E(B)$.

Exercice 7 :
On considère l'ensemble E des matrices 1×2 à coefficients réels de la forme $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ où $a, b \in \mathbb{R}$ que l'on munit de la relation d'ordre :

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} a' & b' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a < a' \\ \text{ou} \\ a = a' \text{ et } b \leq b' \end{array} \right.$$

1. Vérifier que l'on a bien une relation d'ordre sur E et que celui-ci est un ordre total.
2. Préciser pour tout élément de E l'ensemble de ses majorants dans E.
3. On considère le sous-ensemble A de E défini par : $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \in E ; a \leq 0 \right\}$. Admet-il une borne supérieure dans E. Si oui, quelle est-elle ?