MPSI
Géométrie affine réelle

Exercice 1:
Soient V, V' deux sea de E tels que $V \cap V' = \emptyset$. Montrer qu'il existe deux sea W, W' de E tels que:
$$W \parallel W',\ V \subset W,\ V' \subset W',\ W \cap W' = \emptyset.$$

Exercice 2:
Soient A, B, C trois points non alignés du plan affine réel $\mathcal{A}_2$, $(\alpha, \beta, \gamma) \in (\mathbb{R}^*)^3$ tel que les barycentres respectifs G, G_1, G_2, G_3 de $\begin{pmatrix} A & B & C \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} A & B & C \\ -\alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} A & B & C \\ \alpha & -\beta & \gamma \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} A & B & C \\ \alpha & \beta & -\gamma \end{pmatrix}$ existent.

1. Montrer que les droites $(AG_1), (BG_2), (CG_3)$ concourent en G.
2. Montrer que les droites $(G_2G_3), ((G_1G_3), (G_1G_2)$ passent respectivement par A, B, C.

Exercice 3:
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(A_1, \ldots, A_n) \in E^n$, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 0$, $\{I, J\}$ une partition de $\{1, \ldots, n\}$ telle que $\sum\limits_{i \in I} \alpha_i \neq 0$,$G_1 = baycentre\,((A_i, \alpha_i); i \in I\}$ et $G_2 = baycentre\,((A_j, \alpha_j); j \in J\}$. Montrer que si $G_1 \neq G_2$ la direction de la droite (G_1G_2) ne dépend pas du choix de $\{I, J\}$.

Exercice 4:
On considère les huit points de $\mathbb{R}^3$ définie dans le repère canonique par $A(1,1,1)$, $B(3,0,1)$, $C(1,2,1)$, $D(0,1,4)$, $A'(2,3,2)$,$B'(5,4,3)$, $C'(1,2,1)$,$D'(4,9,8)$. Déterminer l'application affine f qui transforme respectivement A, B, C, D en A', B', C', D'.

Exercice 5:
On considère les droites (D) $\left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z & = & 1 \\ x-2y-z & = & 0 \end{array} \right.$ et (Δ) $6x = 2y = 3z$, et le plan (P) $x + 3y + 2z = 6$.
Déterminer la projection de (D) sur (P) parallèlement à (Δ).

Exercice 6:
Soient $(a, b, c) \in (\mathbb{R}^*)^3$ et $t \in \mathbb{R}$. Montrer que les plans $\frac{x}{a} = \frac{z}{c} \cos t - \sin t$, $\frac{y}{b} = \frac{z}{c} \sin t + \cos t$, $\frac{x}{a} = -\frac{z}{c} \sin t + \cos t$, $\frac{y}{b} = \frac{z}{c} \cos t - \sin t$ admettent un point commun. Quel est le lieu de ce point lorsque t décrit $\mathbb{R}$.

Exercice 7: Soient A, B, C, D, P cinq points du plan affine réel tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et que A, B, C, D ne soient pas alignés. La parallèle à (AB) menée par P coupe (AD) en E et (BC) en F, la parallèle à (AD) menée par P coupe (AB) en G et (CD) en H. Montrer que les droites $(EH), (FG), (AC)$ sont concourantes ou parallèles.

Exercice 8:
On munit l'espace affine réel $\mathcal{A}_3$ d'un repère cartésien $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Déterminer

la nature et les éléments caractéristiques de l'application affine f définie par la formule suivante où $M(x,y,z)$ décrit $\mathcal{A}_3$ et $f(M)$ a pour coordonnées (x',y',z'):

$$\begin{cases} x' = -y - z + 1 \\ y' = -2x - y - 2z + 2 \\ z' = x + y + 2z - 1 \end{cases}$$

Exercice 9:
Soient A, B, C un triangle, $A' \in (BC), B' \in (AC), C' \in (AB)$ distincts des sommets.

a)**Théorème de Ménélaüs** Montrer que A', B', C' sont alignés si et seulement si:

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1.$$

b)**Théorème de Céva** Montrer que $(AA'), (BB'), (CC')$ sont concourantes ou parallèles si et seulement si

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1.$$

Exercice 10:
On considère les huit points de $\mathbb{R}^3$ définie dans le repère canonique par $A(1,1,1)$, $B(3,0,1)$, $C(1,2,1)$, $D(0,1,4)$, $A'(2,3,2)$,$B'(5,4,3)$, $C'(1,2,1)$,$D'(4,9,8)$. Déterminer l'application affine f qui transforme respectivement A, B, C, D en A', B', C', D'.

Exercice 11:
On munit l'espace affine réel $\mathcal{A}_3$ d'un repère cartésien $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application affine f définie par la formule suivante où $M(x,y,z)$ décrit $\mathcal{A}_3$ et $f(M)$ a pour coordonnées (x',y',z'):

$$\begin{cases} x' = -y - z + 1 \\ y' = -2x - y - 2z + 2 \\ z' = x + y + 2z - 1 \end{cases}$$