

# MPSI

## Espaces vectoriels. Applications linéaires

### Exercice 1:

Soit  $E$  un  $K$ -ev,  $f \in \mathcal{E}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$  deux à deux distincts. On note  $N_i = \text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id}_E)$  pour  $1 \leq i \leq n$ .  
Démontrer que les  $N_i$  sont linéairement indépendants, c'est-à-dire :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in N_1 \times \dots \times N_n, x_1 + \dots + x_n = 0 \Rightarrow x_1 = \dots = x_n = 0$$

### Exercice 2:

Soit  $E = \mathbb{R}[X]$  le  $\mathbb{R}$ -ev des polynômes à coefficients réels,  $f: \begin{matrix} E & \rightarrow & E \\ P & \mapsto & P' - P \end{matrix}$ .

Montrer que  $f$  est un automorphisme et exprimer  $f^{-1}$ .

### Exercice 3:

Soient  $E$  un  $K$ ev,  $(a, b) \in K^2$  tel que  $a \neq b$ ,  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que

$$(f - a\text{Id}) \circ (f - b\text{Id}) = 0.$$

1. Montrer qu'il existe  $(\lambda, \mu) \in K^2$  et des projecteurs  $p, q$  de  $E$  tels que :

$$p = \lambda(f - a\text{Id}), \quad q = \mu(f - b\text{Id}), \quad f = bp + aq.$$

2. Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , calculer  $f^{\circ k}$  en fonction de  $p, q, k, a, b$ .

### Exercice 4:

Soit  $E = \mathbb{R}[X]$  le  $\mathbb{R}$ -ev des applications polynômiales à coefficients réels.

On définit  $D: \begin{matrix} E & \rightarrow & E \\ P & \mapsto & P' \end{matrix}$  et  $I: \begin{matrix} E & \rightarrow & E \\ P & \mapsto & \int_0^x P(t) dt \end{matrix}$ .

1. Vérifier que  $D$  et  $I$  sont linéaires.
2. Exprimer  $D \circ I$  et  $I \circ D$ .
3. Etudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de  $D$  et  $I$ .

### Exercice 5:

Soient  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ .

1. Vérifier que  $\mathbb{C}^n$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel pour les lois usuelles.

2. Soit  $E_1$  le sev de  $\mathbb{C}^n$  engendré par  $e = \overbrace{(1, \dots, 1)}^{k \text{ fois}}, 0, \dots, 0$ , et

$$H = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n; \sum_{i=1}^k x_i = 0 \right\}.$$

Vérifier que :  $E_1 \oplus H = \mathbb{C}^n$ .

**Exercice 6:**

Soit  $E$  un  $K$ -ev,  $E \neq \{0\}$ ,  $f \in \mathcal{L}(E)$  nilpotent et  $p$  son indice de nilpotence, c'est-à-dire :

$$p \in \mathbb{N}^*, f^{\circ p} = 0, f^{\circ(p-1)} \neq 0.$$

On suppose  $p \geq 2$ .

1. Montrer que  $\text{Ker}(f) \neq \{0\}$ .
2. Montrer que la famille  $(\text{Id}_E, f, \dots, f^{\circ(p-1)})$  est libre.

**Exercice 7:**

Soient  $E$  un  $K$ ev,  $f \in \mathcal{L}(E)$ . On suppose que, pour tout  $x$  de  $E$ , la famille  $(x, f(x))$  est liée. Montrer que  $f$  est une homothétie. En déduire une description du commutant de  $\mathcal{L}(E)$ , c'est-à-dire l'ensemble des éléments de  $\mathcal{L}(E)$  qui commutent avec tous les autres.

**Exercice 8:**

Soient  $E$  un  $K$ -ev,  $p$  un projecteur de  $E$ ,  $q = \text{Id}_E - p$ ,

$$L = \{f \in \mathcal{L}(E); \exists u \in \mathcal{L}(E), f = u \circ p\}$$

et

$$M = \{g \in \mathcal{L}(E); \exists v \in \mathcal{L}(E), g = v \circ q\}.$$

Montrer que  $L$  et  $M$  sont des sev supplémentaires dans  $\mathcal{L}(E)$ .

**Exercice 9:**

Soient  $E, F, G$  trois  $K$ -ev,  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $g, h \in \mathcal{L}(F, G)$ . Montrer :

$$\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker}(h \circ f) \Leftrightarrow \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(g) = \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(h).$$

**Exercice 10:**

Soient  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ .

1. Vérifier que  $\mathbb{C}^n$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel pour les lois usuelles.
2. Soit  $E_1$  le sev de  $\mathbb{C}^n$  engendré par  $e = (1, \dots, 1)$ ,

$$H = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n; \sum_{i=1}^n x_i = 0 \right\}.$$

Vérifier que :  $E_1 \oplus H = \mathbb{C}^n$ .

**Exercice 11:**

Soient  $E, F, G$  trois  $K$ ev,  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ . Montrer :

1.  $\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker}(f) \Leftrightarrow \text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$
2.  $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im}(g) \Leftrightarrow \text{Ker}(g) + \text{Im}(f) = F$

**Exercice 12:**

Soient  $E$  un  $K$ ev,  $F, G, F', G'$  des sev de  $E$  tels que :

$$\begin{cases} F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } E \\ F' \text{ et } G' \text{ sont supplémentaires dans } E \\ F' \subset G \end{cases}$$

Montrer que  $F, F', G \cap G'$  sont en somme directe.

**Exercice 13:**

Soient  $E$  un  $K$ -ev,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $F_1 \dots F_n$  des sev de  $E$ .

1. Montrer que si,  $F_1, \dots, F_n$  sont en somme directe et si, pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $L_i$  est une famille libre de  $F_i$  alors  $\bigcup_{i=1}^n L_i$  est libre dans  $E$ .
2. Montrer que si,  $F_1 + \dots + F_n = E$  et si, pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $G_i$  est une famille génératrice de  $F_i$ , alors  $\bigcup_{i=1}^n G_i$  est génératrice de  $E$ .
3. Montrer que si,  $F_1, \dots, F_n$  sont en somme directe et de somme égale à  $E$  et si, pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $B_i$  est une base de  $F_i$  alors  $\bigcup_{i=1}^n B_i$  est une base de  $E$ .

**Exercice 14:**

On considère le  $\mathbb{R}$ -ev  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  formé des suites réelles. Soit  $r_1 \in \mathbb{R}$ , on pose

$$L = \{(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \forall n \geq 0, u_{n+2} - 2r_1 u_{n+1} + r_1^2 u_n = 0\}$$

- Vérifier que  $L$  est un sev de  $E$ .
- Montrer que  $L$  est de dimension 2.
- On considère les suites  $u = (r_1^n)_n$  et  $v = (nr_1^n)_n$ . Montrer que  $(u, v)$  est une base de  $L$ .

**Exercice 15:**

1. Soient  $E$  un  $K$ -ev de dimension finie,  $f \in L(E)$ . Montrer qu'il existe un automorphisme  $g$  de  $E$  et un projecteur  $p$  de  $E$  tels que  $f = g \circ p$ .
2. Soit  $E$  un  $K$ -ev,  $p$  un projecteur de  $E$ ,  $f \in L(E)$ . Montrer :

$$p \circ f = f \circ p \Leftrightarrow \text{Ker}(p) \text{ et } \text{Im}(p) \text{ sont stables par } f.$$

**Exercice 16:**

Soient  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ ,  $E$  le  $\mathbb{R}$ -ev des polynômes de  $\mathbb{R}[X]$  de degré  $\leq n$ , et  $f: E \rightarrow E$

$$P \mapsto P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$$

1. Vérifier que  $f$  est linéaire. Déterminer  $\text{Im}(f)$ ,  $\text{rg}(f)$  et  $\text{Ker}(f)$ .
2. Soit  $Q \in \text{Im}(f)$ . Montrer qu'il existe  $P \in E$  unique tel que  $f(P) = Q$  et  $P$  soit divisible par  $X^2$ .

**Exercice 17:**

1. Soient  $\lambda \in K \setminus \{0; 1\}$ ,  $E$  un  $K$ -ev,  $p$  un projecteur de  $E$ . Montrer que  $p - \lambda \text{Id}$  est un automorphisme de  $E$ .
2. Soit  $E$  un  $K$ -ev de dimension 3,  $f \in L(E)$  tel que  $f^2 = 0, f \neq 0$ . Montrer que le rang de  $f$  vaut 1.

**Exercice 18:**

Soient  $E$  un  $K$ -ev,  $f \in L(E)$ ,  $\varphi_f: L(E) \rightarrow L(E)$ .

$$g \mapsto f \circ g - g \circ f$$

1. Vérifier que  $\varphi_f \in L(L(E))$ .
2. Montrer que si  $f$  est nilpotent (il existe  $n$  tel que  $f^n = 0$ ) alors  $\varphi_f$  l'est aussi

**Exercice 19:**

Soit  $f \in L(\mathbb{R}^3)$  tel que  $f^2 = 0$ . Montrer qu'il existe  $a \in \mathbb{R}^3$  et une forme linéaire  $\varphi$  sur  $\mathbb{R}^3$  tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, f(x) = \varphi(x)a.$$

**Exercice 20:**

Soit  $E$  un  $K$ -ev,  $F$  un sev de  $E$ .

- Montrer que si  $F$  est de dimension finie alors :  $\forall f \in L(E), F \subseteq f(F) \Rightarrow F = f(F)$ .
- Trouver un contre-exemple à ce qui précède si l'on ne suppose pas que  $F$  est de dimension finie.

**Exercice 21:**

Soient  $E, F, G$  trois  $K$ -ev de dimension finie,  $f \in L(E, F), g \in L(F, G)$ .

- $\text{Ker}(g|_{\text{Im}(f)}) = \text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f)$
- En déduire :  $rg(g \circ f) = rf(f) - \dim(\text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f))$ .
- Montrer :  $rg(g \circ f) \geq rf(f) + rg(g) - \dim(F)$ .

**Exercice 22:**

Soient  $E$  un  $K$ -ev,  $F, G$  deux sev de  $E$ ,  $f: F \times G \rightarrow F + G$ .

$$(x, y) \mapsto x + y$$

1. Vérifier que  $f$  est linéaire surjective.
2. Montrer  $\text{Ker}(f) \simeq F \cap G$ .
3. En déduire que si  $F$  et  $G$  sont de dimensions finies alors  $F + G$  aussi et

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

**Exercice 23:**

On considère le  $\mathbb{R}$ -ev  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  formé des suites réelles. Soit  $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ . On pose

$$L = \{(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \forall n \geq 0, u_{n+2} - (r_1 + r_2)u_{n+1} + r_1r_2u_n = 0\}$$

- Vérifier que  $L$  est un sev de  $E$ .
- Montrer que  $L$  est de dimension 2.
- On considère les suites  $u = (r_1^n)_n$  et  $v = (r_2^n)_n$ . Montrer que  $(u, v)$  est une base de  $L$ .

**Exercice 24:**

Soient  $E$  un  $K$ -ev et  $\varphi, \psi \in E^* \setminus \{0\}$ . Montrer :

$$\text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(\psi) \Leftrightarrow \exists \lambda \in K \setminus \{0\}, \psi = \lambda\varphi$$

**Exercice 25:**

- Soient  $E$  un  $K$ -ev et  $\varphi \in E^*$  telle que  $\varphi \neq 0$ . Montrer que  $\varphi$  est surjective.
- Soit  $F$  un sev de  $E$ . Montrer :

$$H \text{ est un hyperplan} \Leftrightarrow \exists \varphi \in E^*, \varphi \neq 0, H = \text{Ker}\varphi$$

- Soient  $E$  un  $K$ -ev et  $\varphi, \psi \in E^* \setminus \{0\}$ . Montrer :

$$\text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(\psi) \Leftrightarrow \exists \lambda \in K \setminus \{0\}, \psi = \lambda\varphi$$