

MPSI

Polynômes

Exercice 1:

Pour $(m, n) \in (\mathbb{N} - \{0; 1\})^2$, déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de $(X - 2)^m + (X - 1)^n - 1$ par $(X - 1)(X - 2)$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2:

Soient $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $r = \text{pgcd}(a, b)$. Montrer que $\text{pgcd}(X^a - 1, X^b - 1) = X^r - 1$ dans $K[X]$.

Exercice 3:

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \neq b$. Trouver un couple $(U, V) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que:

$$\begin{cases} (X - a)^n U + (X - b)^n V = 1 \\ \text{Deg}(U) \leq n - 1, \text{Deg}(V) \leq n - 1 \end{cases}$$

Exercice 4:

Soit $(A, B) \in (K[X] - \{0\})^2$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

1. A et B ne sont pas premiers entre eux

$$2. \exists (U, V) \in (K[X] - \{0\})^2, \begin{cases} \text{Deg}(U) < \text{Deg}(B) \\ \text{Deg}(V) < \text{Deg}(A) \\ AU + BV = 0 \end{cases}$$

Exercice 5:

Exercice : On note $\mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X]; \text{Deg}(P) \leq n\}$. Soit $a \neq b \in \mathbb{R}$. Montrer que la famille de polynômes $((X - a)^k (X - b)^{n-k})_{k=0..n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 6:

Trouver tous les P de $\mathbb{R}[X]$ tels que:

$$P(0) = 1, P(1) = 0, P'(0) = 0, P'(1) = 1$$

Exercice 7:

En notant x_1, x_2, x_3, \dots les zéros de l'équation indiquée (dans \mathbb{C}), calculer l'expression E proposée où le symbole \sum indique la somme de tous les termes obtenus par permutation d'indices.

$$1. x^3 + px + q = 0, \quad (p, q) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*, \quad E = \sum \frac{1}{x_i^2} \text{ (trois termes)}$$

$$2. x^3 - 3x^2 + x - 1 = 0, \quad E = \sum x_i^3 x_j^2 \text{ (six termes)}$$

Exercice 8:

Trouver tous les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P'|P$.

Exercice 9:

Soient $n \in \mathbb{N}$, $P_n = (X + i)^{2n+1} - (X - i)^{2n+1}$. Montrer que iP_n est un polynôme à coefficients réels et former sa décomposition primaire dans $\mathbb{R}[X]$.

En déduire, pour $(n, a) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{C}$, la valeur de $\prod_{k=1}^n \left(a^2 + \cotan^2 \frac{k\pi}{2n+1} \right)$

Exercice 10:

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ les fse de x_1, \dots, x_n . Etablir :

$$(\forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i \in \mathbb{R}_+) \Leftrightarrow (\forall i \in \{1, \dots, n\}, \sigma_i \in \mathbb{R}_+)$$

Exercice 11:

Déterminer les n de \mathbb{N} ($n \geq 3$) tels que le polynôme $P_n = (X - 1)^n - X^n + 1$ de $\mathbb{C}[X]$ ait au moins un zéro au moins double.

Exercice 12:

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

1. $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$
2. $\exists (A, B) \in (\mathbb{R}[X])^2, P = A^2 + B^2$