MPSI-Systèmes linéaires

Exercice 1:
Résoudre le système d'équations suivant où m est un paramètre:

$$\begin{cases} x - my + m^2 z = 2m \\ mx - m^2 y + mz = 2m \\ mx + y - m^2 z = 1 - m \end{cases}$$

Exercice 2:
Résoudre le système d'équations suivant où a, b sont des paramètres:

$$\begin{cases} x_2 = ax_1 + b \\ x_3 = ax_2 + b \\ \vdots \\ x_n = ax_{n-1} + b \\ x_1 = ax_n + b \end{cases}$$

Exercice 3:
CNS sur $m \in \mathbb{C}$ pour que les trois plans vectoriels de $\mathbb{C}^3$ d'équations :

$$x - 2y + z = mx, \qquad 3x - y - 2z = my, \qquad 3x - 2y - z = mz$$

contiennent une même droite vectorielle.

Exercice 4:
Résoudre les systèmes d'équations suivants ($(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ sont les inconnues et a, b, m sont des paramètres):

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = -1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ 3x + 4y - 5z = -4 \end{cases} \quad \text{et} \begin{cases} x + y + (2m-1)z = 1 \\ mx + y + z = 1 \\ x + my + z = 3(m+1) \end{cases}$$

Exercice 5:
Soient $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}, A \in M_n(K)$.

Etablir : $\begin{cases} rgA = n \Rightarrow rg(com(A)) = n \\ rg(A) = n - 1 \Rightarrow rg(com(A)) = 1 \\ rg(A) \leq n - 2 \Rightarrow rg(com(A)) = 0 \end{cases}$

Exercice 6:
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer $\forall \varphi \in (M_n(K))^*, \exists! F \in M_n(K), \forall X \in M_n(K), \varphi(X) = tr(FX)$ où $(M_n(K))^*$ désigne le dual de $M_n(K)$.

2. Soit $\varphi \in (M_n(K))^*$ telle que $\forall (X, Y) \in (M_n(K))^2, \varphi(XY) = \varphi(YX)$. Montrer qu'il existe $\lambda \in K$ tel que $\forall X \in M_n(K), \varphi(X) = \lambda tr(X)$.

Exercice 7:
Résoudre les systèmes d'équations suivants d'inconnues $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ et de paramètres complexes $a_1, \ldots, a_{n-1}, \lambda$:

$$\left\{\begin{array}{c} x_1 + x_2 = a_1 \\ x_1 + x_2 = a_2 \\ \vdots \\ x_1 + x_n = a_{n-1} \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \lambda \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{c} x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \cdots + 2x_n = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + 3x_n = 1 \\ \vdots \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n = 1 \end{array}\right.$$