MPSI
Continuité

Exercice 1:

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et périodique. Montrer que f est bornée.
2. Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformément continue bijective et telle que f^{-1} n'est pas uniformément continue.

Exercice 2:
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et telle qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \alpha \text{ et } \lim_{x \to \infty} f(x) = \beta.$$

Démontrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3:

1. Trouver une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ discontinue en tout point de $\mathbb{R}$ et telle que $f \circ f$ est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$, et $f : [a, b] \to [a, b]$ continue. Montrer qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Exercice 4:
Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dans chacun des cas suivants:

1. f est continue en 0 et $f(x) = f(3x)$.
2. f est continue en 1 et $f(x) = -f(x^2)$.

Exercice 5:
Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Exercice 6:

1. Soit f et g deux applications continues sur I. Montrer que la fonction $h(x) = \max(f(x), g(x))$ est continue sur I.
2. I est un intervalle de $\mathbb{R}$. $f, g : I \to \mathbb{R}$ sont deux applications continues telles que:

   $$|f| = |g| \text{ et } \forall x \in \mathring{I}, f(x) \neq 0.$$

   Montrer que $f = g$ ou $f = -g$.

Exercice 7:

1. Montrer que $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}_+$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq A|x| + B$.

Exercice 8:
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue et injective. Montrer que f est strictement monotone.

Exercice 9:
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq f(x_0)$.

Exercice 10:
Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x^2)$ est continue bornée mais non uniformément continue.

Exercice 11:
Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une application continue. Evaluer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right)$$