MPSI
Dérivabilité

Exercice 1:
Trouver les limites suivantes où $a \in \mathbb{R}$, I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sont dérivables en a.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h^2) - f(a+h)}{h} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to a} \frac{f(x)g(a) - g(x)f(a)}{x-a}$$

Exercice 2:
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Deg(P) \geq 2$.

1. Montrer que si les zéros de P sont tous reéls et simples, il en est de même pour P'.

2. Montrer que si P est scindé sur $\mathbb{R}$, alors P' est aussi scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3:
Calculer $\sup \left\{-x^3 + \frac{75}{4}x ; x \in \mathbb{R} \text{ et } x^4 + 36 \leq 13x^2\right\}$.

Exercice 4:
Soient I un intervalle ouvert , $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable sur I.

1. Soient $a, b \in I$ tels que $a < b$ et $f'(a) < f'(b)$. Montrer que la fonction définie par $x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si } x \in]a,b] \\ f'(a) & \text{si } x = a \end{cases}$ est continue sur $[a, b]$.

2. Montrer que $[f'(a); (f(b) - f(a))/(b-a)] \subset f'(I)$.

3. En déduire le **théorème de Darboux**, ie $f'(I)$ est un intervalle.

Exercice 5:
Déterminer pour tout n la dérivée n-ième de

$$x \mapsto (x^3 + x^2 + 1)e^{-x} \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } \frac{2x+3}{(x-1)^2(x+1)} \text{ sur }]-1, 1[$$

Exercice 6:
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a < b$. Montrer que l'application $f\ :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}$.

Exercice 7:

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0, 1]$ tels que $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$. Montrer que $\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$,

$$f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k)$$

2. Soit $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer:

$$\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

Exercice 7:
Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{l} P(x) \text{ si } x \leq 0 \\ Q(x) \text{ si } x > 0 \end{array} \right. \end{array}$ soit de classe C^∞. Montrer que $P = Q$.

Exercice 8:
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe.

1. Montrer que $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ admet une limite finie ou tend vers $+\infty$ lorsue $x \to \infty$.

2. Montrer que si $\frac{f(x)}{x} \to l \in \mathbb{R}$ quand $x \to \infty$ alors $x \mapsto f(x) - lx$ tend vers une limite finie ou vers $-\infty$ lorsque $x \to \infty$.