MPSI
Equations différentielles

Exercice 1:
Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$: $xy' = |y-1|$

Exercice 2:
Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(-x) = (-2x+2)e^x.$$

Exercice 3:
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les ED suivantes:

- $2x(1-x)y' + (1-x)y = 1$.
- $|x|y' + (x-1)y = x^3$.

Exercice 4:
Résoudre $y" + y = \cos^3 x$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5:
Résoudre $y' - y - \ln x = 0$ sur $]0; +\infty[$. Existe-t-il des solutions bornées?

Exercice 6:
Résoudre l'équation différentielle:

$$2x(1+x)y' + (1+x)y = 1$$

sur tout intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

Exercice 7:
Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, 2xf(x) = 3\int_0^x f(t)\,dt.$$

Exercice 8:
Résoudre les ED suivantes:

- $(1+x^2)y' + 4xy = 0$.
- $x^n y' - \alpha y = 0, \quad (n, \alpha) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 9:
On considère l'équation $xy' + y + (y')^2 = 0$. Montrer qu'en posant $t = y'$ on se ramène à la résolution d'une équation différentielle du premier ordre et donner une représentation paramétrique des courbes intégrales.

Exercice 10:
Résoudre l'équation différentielle:

$$(1+x)y' - xy = 0$$

sur tout intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

Exercice 11:
Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + 4f(-x) = (x-1)e^x.$$

Exercice 12:
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$une application deux fois dérivable telle que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) - 2f'(x) + f(x) = 2e^x.$$

- Montrer que si $f' \geq 0$ alors $f \geq 0$.
- La réciproque est-elle vraie?

Exercice 13:
Soit $(\alpha, T) \in \mathbb{R}_+^{*2}$. Pour $\omega \in \mathbb{R}_+^*$, on considère l'équation différentielle sur $[0, T]$ avec condition aux limites suivantes:

$$(E_\omega) : \begin{cases} y" + \omega^2 y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(T) + \alpha y(T) = 0 \end{cases}$$

- Montrer que (E_ω) admet des solutions autres que 0 si et seulement si ω fait partie d'une suite strictement croissante $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
- Soient $p \neq q$, et y_p et y_q les solutions respectives de (E_{ω_p}) et $(E\omega_q)$. Montrer que
$$\int_0^T y_p(x) y_q(x)\, dx = 0.$$

Exercice 14:
Résoudre $y"(x) + y(x) = \cos^3(x)$.

Exercice 15:
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'ED suivante:

$$y"(x) + y'(x) + \frac{1}{2} y(x) = \sin(x) \quad \text{et } y(0) = y'(0) = 0.$$