

# MPSI

## Groupe, groupe symétrique

### Exercice 1 :

Soit  $G$  un groupe et  $H, K$  deux sous-groupes de  $G$ . Montrer que

$$G = H \cup K \Leftrightarrow G = H \text{ ou } G = K$$

### Exercice 2 :

Soient  $(G, \top), (G', \perp)$  deux groupes et  $f : G \rightarrow G'$  un morphisme de groupes.

- Montrer que pour tout sous-groupe  $H$  de  $G$ ,  $f(H)$  est un sous-groupe de  $G'$ .
- Montrer que pour tout sous-groupe  $H'$  de  $G'$ ,  $f^{-1}(H')$  est un sous-groupe de  $G$ .
- On note  $e$  le neutre de  $G$ . Montrer que  $f$  est injectif si et seulement si  $\text{Ker}(f) = \{e\}$ .

### Exercice 3 :

Soient  $(G, \top), (G', \perp)$  deux groupes,  $*$  la loi produit définie par

$$(x, x') * (y, y') = (x \top y, x' \perp y').$$

- Montrer que  $(G \times G', *)$  est un groupe.
- Montrer que si  $H$  (resp  $H'$ ) est un sous-groupe de  $G$  (resp  $G'$ ) alors  $H \times H'$  est un sous-groupe de  $G \times G'$ .

### Exercice 4 :

Soit  $G$  un groupe fini et  $H$  un sous-groupe de  $G$  tel que  $2\text{Card}(H) > \text{Card}(G)$ .

- a) Si  $H \neq G$  alors  $\exists x \in G, x \notin H$ . Montrer que l'application  $f_x : \begin{array}{l} H \rightarrow xH \\ h \mapsto xh \end{array}$  est une bijection.
- b) En déduire que  $H = G$ .

### Exercice 5 :

Soit  $\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 7 & 1 & 5 & 12 & 6 & 3 & 9 & 4 & 2 & 11 & 8 & 10 \end{pmatrix}$ .

- a) Déterminer le nombre d'inversions de  $\Phi$  puis sa signature.
- b) Décomposer  $\Phi$  en un produit de cycles à supports disjoints et retrouver ainsi la signature de  $\Phi$ .

### Exercice 6 :

Soit  $\sigma \in S_n$  une permutation. Montrer que si  $\sigma$  est un produit de  $q$   $p$ -cycles à supports disjoints alors  $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{q(p-1)}$ .

### Exercice 7 :

Soient  $(G, \cdot)$  un groupe,  $H, K$  deux sous-groupes de  $G$ . Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $HK$  est un sous-groupe de  $G$ .
- $KH$  est un sous-groupe de  $G$ .
- $KH \subset HK$
- $HK \subset KH$

**Exercice 8 :**

Soit  $G$  un ensemble fini non vide muni d'une loi de composition interne  $*$  associative pour laquelle tous les éléments de  $G$  sont réguliers, ie  $x * a = y * a \Rightarrow x = y$  et  $a * x = a * y \Rightarrow x = y$ .

$$\begin{array}{ccc} \text{a) Soit } x \in G. \text{ Montrer que les applications } \varphi_x: G \rightarrow G & \text{et } \psi_x: G \rightarrow G \\ y & \mapsto & y * x & & y & \mapsto & x * y \end{array}$$

sont bijectives.

b) Soit  $e_x, \varepsilon_x \in G$  tel que  $\varphi_x(e_x) = x$  et  $\psi_x(\varepsilon_x) = x$ . Montrer que  $e_x = \varepsilon_x$  et  $e_x * e_x = e_x$ .

c) Soit  $(x, y) \in G^2$ . Montrer que  $e_x = e_y$  et en déduire que  $e_x$  ne dépend pas de  $x$ .  
On note  $e = e_x$  pour un  $x \in G$ . Montrer que  $e$  est l'élément neutre de  $G$

d) Par un raisonnement analogue à la question a) montrer que  $(G, *)$  est un groupe.

**Exercice 9 :**

Soit  $G$  un groupe et  $a, b \in G$ . Montrer :

1. a) Si  $a, b, ab$  sont d'ordre 2, alors  $ab = ba$ .
2. b) Si  $a$  est d'ordre fini alors  $a^{-1}$  aussi et  $a$  et  $a^{-1}$  ont le même ordre.
3. c) Si  $a$  est d'ordre fini alors  $bab^{-1}$  aussi, et  $a$  et  $bab^{-1}$  ont le même ordre.
4. d) Si  $ab$  est d'ordre fini alors  $ba$  aussi, et  $ab$  et  $ba$  ont le même ordre.

**Exercice 10 :**

Soit  $G$  un groupe fini,  $H$  un sous-groupe de  $G$ ,  $\mathcal{R}$  la relation définie dans  $G$  par

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xy^{-1} \in H.$$

1. Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence dans  $G$ .
2. Montrer que  $\forall x \in G, \bar{x} = Hx$ . Puis montrer que l'application  $f_x: H \rightarrow Hx$   
 $h \mapsto hx$   
est bijective et en déduire que toutes les classes d'équivalences ont même cardinal : celui de  $H$ .
3. En déduire que  $\text{Card}(G) = \text{Card}(H) \times \text{Card}\left(\frac{G}{\mathcal{R}}\right)$
4. Montrer que l'ordre de chaque élément de  $G$  divise le cardinal de  $G$ .
5. Soit  $G_n$  et  $G_p$  deux groupes d'ordre respectifs  $n$  et  $p$  tels que  $n \wedge p = 1$ . Montrer qu'il n'existe pas de morphisme de groupe non trivial de  $G_n$  dans  $G_p$ .

**Exercice 11 :**

$$\text{Soit } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 2 & 6 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Décomposer  $\sigma$  en produit de cycles disjoints.
2. Déterminer la signature de  $\sigma$ .
3. Déterminer l'ordre de  $\sigma$  dans le groupe  $S_n$ .