MPSI
Intégration

Exercice 1:
Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue telle que $f \neq 0$ et $\int_0^1 f = \int_0^1 f^2$. Montrer que $f = 1$.

Exercice 2:
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que pour toute application en escalier et croissante $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, on ait $\int_0^1 fg = 0$. Montrer que $f = 0$.

Exercice 3:
Si f est continue, positive et non identiquement nulle sur $[a,b]$ alors son intégrale est strictement positive.

Exercice 4:
Calculer les limites des suites suivantes:

$$\sum_{k=0}^{2n} \frac{k}{k^2+n^2}, \quad \frac{1}{n^{\alpha+1}} \sum_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{\alpha}} (n^{\alpha-\frac{1}{\alpha}} + k^{\alpha-\frac{1}{\alpha}}) \quad (\alpha \in]0,+\infty[\setminus \{1\}),$$

$$\sum_{k=n}^{2n} \sin \frac{\pi}{k}, \quad n^2 \left(\prod_{k=1}^{n} k^k \right)^{\frac{-4}{n^2}}$$

Exercice 5:
Soient $f, g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continues telles que: $\forall x, g(x) > 0$ et $\frac{f}{g}$ est monotone. On note $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ et $G(x) = \int_0^x g(t)\,dt$. Montrer que $\frac{F}{G}$ est monotone sur $[0,+\infty[$.

Exercice 6:
Calculer les limites des suites suivantes:

$$n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+n^2}, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k^2}{k^3+n^3}, \quad \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+1}, \quad \left(\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{n+k}} \right) - n$$

Exercice 7:
Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue telle qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in [0,+\infty[, 0 \leq f(x) \leq k \int_0^x f(t)\,dt.$$

Montrer que $f = 0$.

Exercice 8:
Soient $f, g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continues, $f \geq 0, g \geq 0$, et $C \in \mathbb{R}_+^*$ tels que:

$$\forall x \in [0,+\infty[, f(x) \leq C + \int_0^x f(t)g(t)\,dt.$$

Montrer que $\forall x \in [0,+\infty[, f(x) \leq C \exp\left(\int_0^x g(t)\,dt\right)$.

Exercice 9:
Trouver toutes les applications continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x) - f(y) = \int_{x+2y}^{2x+y} f(t)\,dt.$$

Exercice 10:
Soient $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ continues. Montrer

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{f\left(\frac{k}{n}\right)+g\left(\frac{k+1}{n}\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 \sqrt{f+g}$$

Exercice 11:
Calculer pour $x \in]1;+\infty[$:

$$\int_0^{\pi} \ln(1-2x\cos(t)+x^2)\,dt$$